Segunda avaliação de Topologia - 01/06/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0) Prove os seguintes itens:

   (a) Seja D um subespaço denso de um espaço topológico X, Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas tais que $f|D = g|D$. Prove que $f = g$.

   (b) Seja Y um espaço de Hausdorff. Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : X \to Y$ é fechado em $X \times Y$. O que acontece se Y não for Hausdorff?

2. (2,0) Prove os seguintes itens:

   (a) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um filtro $\mathscr{F}$ em X tal que $A \in \mathscr{F}$ e $\mathscr{F} \to x$.

   (b) Seja $f : X \to Y$ um aplicação e $\mathscr{F}$ um filtro. Defina $(f(\mathscr{F}))_0 = \{f(U) : U \in \mathscr{F}\}$. Mostre que $(f(\mathscr{F}))_0$ é uma base de filtro em Y e exiba o filtro $f(\mathscr{F})$ gerado por $(f(\mathscr{F}))_0$.

   (c) Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, sempre que $\mathscr{F} \to x_0$ tem-se que $f(\mathscr{F}) \to f(x_0)$.

3. (2,0) Mostre que um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos é conexo por caminhos.

4. (2,0) Um espaço X é um espaço de Lindelöf se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável. Mostre que se X é Lindelöf e Y é compacto então $X \times Y$ é Lindelöf.

5. (2,0) Prove os seguintes itens:

   (a) Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $D \subset I = [0, 1]$ denso. Suponha que para cada $t \in D$ existe um aberto U_t em X tal que:

      i) $t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{U_{t_1}} \subset U_{t_2}$

      ii) $X = \bigcup_{t \in D} U_t$

      Mostre que $f : X \to I$ dada por $f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\}$ é contínua.

   (b) Enuncie e demonstre o Lema de Urysohn.