Primeira avaliação de Topologia - 20/04/2023

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0) Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se for falsa, demonstre ou dê um contra-exemplo.

   a) Em um espaço métrico (X, d) para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ tem-se $\overline{B(x, \varepsilon)} = B[x, \varepsilon]$.
   b) Todo espaço métrico separável é segundo enumerável.
   c) Uma bijeção $f : X \to Y$, que é uma aplicação quociente é um homeomorfismo.
   d) Uma topologia mais fina do que uma topologia metrizável é metrizável.
   e) Seja $f : X \to Y \times Z$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ então f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.

2. (2,0)

   a) Mostre que a interseção arbitrárias de topologias de X é uma topologia de X.
   b) Seja $\mathcal{B}$ uma base em X. Mostre que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é a interseção de todas as topologias que contém $\mathcal{B}$.

3. (2,0) Mostre que as topologias $\mathbb{R}_K$ e $\mathbb{R}_l$ não são comparáveis.

4. (2,0) Seja $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ uma união de conjuntos fechados de um espaço métrico (X, d) tais que $d(F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}) = \inf\{d(x, y) : x \in F_{\lambda_1}, y \in F_{\lambda_2}\} \geq \varepsilon$ sempre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde $\varepsilon > 0$ é um número fixado. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é fechado. Dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de uma família $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo essa condição.

5. (2,0) Defina a topologia do complemento finito em $\mathbb{R}$ através da função fecho de Kuratowski. Mostre que $\mathbb{R}$, munido da topologia do complemento finito, é separável, isto é, possui um subconjunto enumerável e denso, mas não tem base enumerável.