Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

6^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Seja X um espaço primeiro enumerável e seja $A \subset X$ um subconjunto não vazio. Mostre que $x \in \bar{A}$ se e somente se existe uma sequência (x_n) em A tal que $x_n \to x$.

2. Seja X um espaço primeiro enumerável e seja $F \subset X$ um subconjunto não vazio. Mostre que F é fechado se e somente se uma sequência (x_n) em F converge para x então $x \in F$.

3. Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em um espaço X. Prove que se x é um ponto de aderência para uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, então x é um ponto de aderência para $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

4. Seja $\prod_{t \in \mathbb{R}} X_t$ o espaço produto com $X_t = \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ $\left(\prod_{t \in \mathbb{R}} X_t = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$. Seja $E \subset \prod_{t \in \mathbb{R}} X_t$ o subconjunto de todos os pontos x com coordenadas 0 ou 1 , e $x_t = 0$ somente para finitos índices t. Seja $z \in \prod_{t \in \mathbb{R}} X_t$ tal que $z_t = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que $z \in \overline{E}$.

5. Seja X um conjunto infinito munido da topologia cofinita. Mostre que qualquer subconjunto infinito de X é compacto.

6. Sejam τ e τ' duas topologias compactas sobre um mesmo conjunto X. Mostre que ou $\tau = \tau'$ ou essas topologias não são comparáveis.

7. Descreva os subconjuntos compactos do plano de Moore $\mathbf{\Gamma}$.

8. Prove que uma união finita de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

9. Encontre um exemplo de dois conjuntos compactos com interseção não compacta.

10. Em que condições uma interesecção de conjuntos compactos é compacta?

11. Encontre um exemplo de subconjunto compacto que não é fechado.

12. Sejam A e B dois conjuntos compactos e disjuntos em um espaço de Hausdorff X. Mostre que existem abertos disjuntos $V, U \subset X$ tais que $A \subset V$ e $B \subset U$.

13. Sejam A e B subconjuntos disjuntos de um espaço regular X, com A compacto e B fechado. Mostre que existem abertos disjuntos $V, U \subset X$ tais que $A \subset V$ e $B \subset U$.

14. Seja $A \times B$ um subconjunto compacto e W um subconjunto aberto do espaço produto $X \times Y$ com $A \times B \subset W$. Prove que existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

15. Seja Y um espaço compacto Hausdorff. Mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua se e somente se seu gráfico é fechado no produto $X \times Y$. (Dica: use o Lema do Tubo).

16. Sejam $A \times B \subset U$ subconjuntos do espaço produto $X \times Y$ com U aberto. Se B é compacto, prove que existe um aberto $V \subset X$ tal que $A \times B \subset V \times B \subset U$

17. (Teorema da Categoria de Baire: caso compacto) Seja X um espaço compacto Hausdorff e $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção de conjuntos fechados e com interior vazio em X (conjuntos magros). Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq X$.

18. Um espaço topológico X é dito sequencialmente compacto se toda sequência em X possui subsequência convergente.

    a) Encontre um exemplo de espaço compacto que não é sequencialmente compacto. (Dica: $[0,1]^{\mathbb{R}}$)

    b) Encontre um exemplo de espaço sequencialmente compacto que não é compacto. (Difícil! Veja o livro do Willard)

19. Um espaço topológico X é dito enumeravelmente compacto se toda sequência em X possui um ponto de aderência.

    a) Mostre que todo espaço compacto é enumeravelmente compacto.

    b) Prove que um espaço T_1 é enumeravelmente compacto se e somente se todo subconjunto infinito possui ponto de aderência.

    c) Encontre um exemplo de espaço compacto que não é enumeravelmente compacto.

    d) Mostre que um espaço primeiro enumerável é sequencialmente compacto se e somente se é enumeravelmente compacto.

20. Seja X um espaço metrizável. Mostre que as seguintes sentenças são equivalentes:

    a) X é compacto.

    b) X é sequencialmente compacto.

    c) X é enumeravelmente compacto.

21. Mostre que um espaço segundo enumerável e T_1 é sequencialmente compacto se e somente se é compacto.

22. Seja $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ um espaço produto com cada X_n sequencialmente compacto. Prove que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é sequencialmente compacto.

23. Uma função contínua $f : X \to Y$ é dita própria se é fechada e $f^{-1}(y)$ é compacto em X, para todo ponto $y \in Y$.

    a) Se $f : X \to Y$ é própria e X é Hausdorff, mostre que o subespaço $f(X) \subset Y$ é Hausdorff.

    b) Se $f : X \to Y$ é própria e X é regular, mostre que o subespaço $f(X) \subset Y$ é regular.

24. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação quociente com X compacto Hausdorff. Prove que as seguintes sentenças são equivalentes:

    a) Y é Hausdorff.

    b) f é fechada.

    c) o conjunto $\Delta_f = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ é fechado no produto $X \times X$.

25. Mostre que se Y é compacto, então a projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ é fechada.

26. Seja G um grupo topológico e sejam $A, B \subset G$ subconjuntos fechados com B compacto. Prove que AB é fechado em G. Mostre que AB não é necessariamente fechado se B não for compacto.

27. Seja G um grupo topológico e sejam $K \subset U$ subconjuntos de G com K compacto e U aberto. Mostre que existe uma vizinhança V da identidade em G tal que $KV \subset U$.

28. Seja G um grupo topológico, $K \subset G$ um subconjunto compacto e U uma vizinhança da identidade em G. Mostre que existe uma vizinhança V da identidade tal que $gVg^{-1} \subset U$, para todo $g \in K$.

29. Seja G um grupo topológico, $g, h \in G$ e $A, B \subset G$. Prove as seguintes relações:

    a) $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{AB}$.

    b) $\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1}$.

    c) $\overline{gAh} = g\bar{A}h$.

30. Se $H \subset G$ é um subgrupo de um grupo topológico G, prove que $\bar{H}$ é subgrupo de G; além disso, se H é abeliano então $\bar{H}$ é abeliano; se H é normal, então $\bar{H}$ é normal.

31. Mostre que qualquer subgrupo aberto de um grupo topológico é fechado.

32. Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto não vazio e limitado. O diâmetro de A é definido por $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$. Se A é compacto, mostre que $\text{diam}(A) = d(a, b)$ para certos $a, b \in A$.

33. Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto não vazio. Dado $x \in M$ e $\varepsilon > 0$, defina $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ e $B(A, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, A) < \varepsilon\}$.

    a) Mostre que a função $d_A : M \to \mathbb{R}$, dada por $d_A(x) = d(x, A)$, é contínua.

    b) Prove que $d(x, A) = 0$ se e somente se $x \in \bar{A}$.

    c) Mostre que $B(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

    d) Se A e B são subconjuntos disjuntos de M, com A fechado e B compacto, mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$.

34. Dado um espaço métrico (M, d), seja $\mathcal{H}(M)$ o conjunto de todos os subconjuntos fechados e limitados de M. Dados $A, B \in \mathcal{H}(M)$, defina o número $d_H(A, B)$ por

    $$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

    Prove que d_H define uma métrica em $\mathcal{H}(M)$ (d_H é conhecida como métrica de Hausdorff).

35. Um espaço X é dito localmente compacto se cada ponto de X possui uma base de vizinhanças compactas. Mostre que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se e somente se cada ponto tem uma vizinhança compacta.

36. Verifique que os espaços dos racionais $\mathbb{Q}$ e dos irracionais $\mathbb{I}$ não são localmente compactos.

37. Prove que se $f : X \to Y$ é própria e X é localmente compacto, então $f(Y)$ é localmente compacto.

38. Prove que se $f : X \to Y$ é contínua e aberta e X é localmente compacto, então $f(Y)$ é localmente compacto.

39. Seja Y localmente compacto Hausdorff. Prove que uma função contínua $f : X \to Y$ é própria se e somente se $f^{-1}(K)$ é compacto em X, para todo compacto $K \subset Y$.

40. Um espaço topológico é chamado contínuo se é compacto, conexo e Hausdorff. Seja $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede de subconjuntos contínuos em um espaço topológico X tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ implica $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$. Mostre que a interseção $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ é um contínuo.

41. Mostre que todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.

42. Mostre que um subespaço completo de um espaço métrico é fechado.

43. Seja (X, d) um espaço métrico completo. Mostre que um subconjunto $A \subset X$ é compacto se e somente se A é fechado e totalmente limitado.

44. Prove que o completamento de um espaço métrico é único, a menos de isometrias.

45. Seja (X, d) um espaço métrico com métrica d não necessariamente limitada. Defina $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ para todos $x, y \in X$.

    a) Mostre que $\bar{d}$ é uma métrica limitada em X.

    b) Verifique que d e $\bar{d}$ geram a mesma topologia sobre X.

    c) Prove que (X, d) é completo se e somente se $(X, \bar{d})$ é completo.

46. Seja (X, d) um espaço métrico. Defina $d^*(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ para todos $x, y \in X$. Repita o exercício anterior para d^*.

47. Seja (Y, d) um espaço métrico com métrica limitada d. Dado um conjunto X, seja Y^X o conjunto das funções $f : X \to Y$. Para todo par $f, g \in Y^X$, defina o número $\rho(f, g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

    a) Mostre que ρ é uma métrica sobre Y^X (chamada métrica uniforme sobre Y^X).

    b) Prove que se (Y, d) é completo, então $\left(Y^X, \rho\right)$ é completo.

48. Sejam X um espaço topológico e (Y, d) um espaço métrico com métrica limitada d.

    a) Mostre que o conjunto das funções contínuas $C(X, Y)$ é fechado em $\left(Y^X, \rho\right)$

    b) Prove que se (Y, d) é completo, então $(C(X, Y), \rho)$ é completo.

49. Para cada $p > 0$ denote por l^p o conjunto de todas as sequências (x_n) de números reais tais que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge.

a) Para $p \geq 1$ e $(x_n), (y_n) \in l^p$, defina $d((x_n), (y_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$. Mostre que d é uma métrica em l^p.

b) Para $0 < p < 1$ e $(x_n), (y_n) \in l^p$, defina $d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$. Mostre que d é uma métrica em l^p.

50. Verifique que l^2 é um espaço métrico completo.

51. Um espaço métrico (X, d) é dito uniformemente localmente compacto se existe um número $\varepsilon > 0$ tal que toda ε-bola em X tem fecho compacto. Prove que se X é uniformemente localmente compacto, então X é completo.

52. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos, com (Y, d') completo. Suponha que $A \subset X$ e $f : A \to Y$ é uniformemente contínua. Mostre que existe uma única extensão uniformemente contínua $\bar{f} : \bar{A} \to Y$ de f.

53. (Teorema da interseção de Cantor) Mostre que um espaço métrico (X, d) é completo se e somente se qualquer sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ de conjuntos fechados em X, com $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, possui interseção não vazia consistindo de um único ponto.

54. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $f : X \to X$ é chamada contração se existe um número $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Mostre que toda contração é uniformemente contínua.

55. (Teorema de Banach do Ponto Fixo das contrações) Se (X, d) é um espaço métrico completo e $f : X \to X$ é uma contração, mostre que f possui um único ponto fixo $(f(x) = x)$.

56. Mostre que se $h, h' : X \to Y$ são homotópicas e $k, k' : Y \to Z$ são homotópicas então $k \circ h$ e $k' \circ h'$ são também homotópicas.

57. Sejam X e Y espaços dados; seja $[X, Y]$ o conjunto de todas as classes de homotopias de funções de X em Y.

a) Seja $I = [0, 1]$. Mostre que para qualquer X, o conjunto $[X, I]$ possui um único elemento

b) Mostre que se Y é conexo por caminhos, o conjunto $[I, Y]$ possui um único elemento.

58. Sejam x_0 e x_1 dois pontos em um espaço conexo por caminhos X. Mostre que $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano se, e somente se, para todo par α e β de caminhos de x_0 a x_1, temos $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

59. Um espaço X é dito contrátil se a aplicação identidade $i_X : X \to X$ é homotópica a uma constante.

    a) Mostre que os espaços I e $\mathbb{R}$ são contráteis.

    b) Mostre que um espaço contrátil é conexo por caminhos.

    c) Mostre que se Y é contrátil, então para qualquer X, o conjunto $[X, Y]$ tem um único elemento.

    d) Mostre que se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então $[X, Y]$ tem um único elemento.

60. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito estrelado se existe $a_0 \in A$ de forma que, dado qualquer $x \in A$ o segmento de reta que liga a_0 a x está inteiramente contido em A.

    a) Encontre um conjunto estrelado que não é convexo.

    b) Mostre que se A é estrelado, A é simplesmente conexo.

61. Considere X um espaço topológico. Seja α um caminho em X de x_0 a x_1 e β um caminho em X de x_1 a x_2. Mostre que se $\gamma = \alpha * \beta$ então $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$.

62. Seja $A \subset X$; suponha que $r : X \to A$ é uma função contínua tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. (Este tipo de aplicação r é chamada de retração de X sobre A.) Se $a_0 \in A$, mostre que
$$r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$$
é sobrejetora.

63. Seja A um subespaço de $\mathbb{R}^n$; seja $h : (A, a_0) \to (Y, y_0)$. Mostre que se h pode ser estendida a uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ em Y, então h_* é o homomorfismo trivial (ou seja, é o homomorfismo que leva todo elemento no elemento neutro do grupo).

64. Mostre que se X é conexo por caminhos, o homomorfismo induzido por uma função contínua é sempre independente do ponto base módulo tomar isomorfismos dos grupos envolvidos. Mais precisamente, seja $h : X \to Y$ uma função contínua, com $h(x_0) = y_0$ e $h(x_1) = y_1$. Seja α um caminho em X de x_0 a x_1, e seja $\beta = h \circ \alpha$. Mostre que
$$\hat{\beta} \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \hat{\alpha}$$

65. Seja G um grupo topológico com operação $\bullet$ e elemento identidade x_0. Seja $\Omega(G, x_0)$ o conjunto de todos os laços em G com ponto base x_0. Se $f, g \in \Omega(G, x_0)$, defina o laço $f \otimes g$ por:
$$(f \otimes g)(s) = f(s) \bullet g(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

    a) Mostre que com esta operação $\Omega(G, x_0)$ se torna um grupo.

    b) Mostre que esta operação induz uma operação de grupo, que também denotaremos por $\otimes$, em $\pi_1(G, x_0)$.

    c) Mostre que as duas operações $*$ e $\otimes$ em $\pi_1(G, x_0)$ são iguais.

    d) Mostre que $\pi_1(G, x_0)$ é abeliano.

66. Seja Y com a topologia discreta. Mostre que a projeção na primeira coordenada $p : X \times Y \to X$ é uma aplicação de recobrimento.

67. Seja $p : E \to B$ contínua e sobrejetora. Suponha que U é um aberto de B que é uniformemente recoberto por p. Mostre que se U é conexo, então a partição de $p^{-1}(U)$ em fatias é única.

68. Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento; seja B conexo. Mostre que se $p^{-1}(b_0)$ tem k elementos para algum $b_0 \in B$ então $p^{-1}(b)$ possui exatamente k elementos, para todo $b \in B$.

69. Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento, mostre que se B é Hausdorff, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, ou localmente compacto Hausdorff então E também o é.

70. Prove que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ enunciando com detalhes todos os resultados utilizados na demonstração.

71. Prove que $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

72. Determine:

    a) $\pi_1(\mathbb{T}^2)$

    b) $\pi_1(\mathbb{T}^n)$ onde $\mathbb{T}^n := S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1, n$ vezes.

    c) O grupo fundamental dos toros sólidos dados por $(S^1 \times B^2)$ e $S^1 \times S^2$.

73. Prove que se X e Y são homeomorfos e X é conexo por caminhos então

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y)$$