Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

4^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Dê um exemplo de aplicação contínua, sobrejetora e fechada que não é aberta.

2. Dê um exemplo de aplicação quociente que não é aberta nem fechada.

3. Mostre que qualquer composição de aplicações quocientes é uma aplicação quociente.

4. Considere o quadrado $[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$ e identifique cada ponto $(0, x)$ com o ponto $(2\pi, x)$. Mostre que o espaço quociente resultante é homeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi]$. (Dica: estude a aplicação $\rho : [0, 2\pi]\times[0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1\times[0, 2\pi]$ dada por $\rho(x, y) = ((\cos x, \operatorname{sen} x), y))$

5. Considere o quadrado $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Identifique cada ponto $(0, x)$ com o ponto $(2\pi, x)$ e cada ponto $(x, 0)$ com o ponto $(x, 2\pi)$. Mostre que o espaço quociente resultante é homeomorfo ao 2 -toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. (Dica: estude a aplicação $\rho : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por $\rho(x, y) = ((\cos x, \operatorname{sen} x), (\cos y, \operatorname{sen} y)))$

6. Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos. Para cada $\lambda \in \Lambda$, defina o conjunto $X^*_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in X_\lambda\}$ e considere a topologia induzida pela aplicação $x \in X \to (x, \lambda) \in X^*_\lambda$ $(X^*_\lambda \approx X_\lambda)$. Defina a coleção τ de subconjuntos de $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X^*_\lambda$ por

$$\tau = \{U \subset X : U \cap X^*_\lambda \text{ é aberto em } X^*_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

   Mostre que τ é uma topologia sobre X. O espaço (X, τ) é chamado de união disjunta dos espaços X_λ e é denotado por $\sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$($X + Y$ para o caso de apenas dois espaços X e Y).

7. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : A \to Y$ uma função contínua definida em um subespaço fechado A de X. Para cada $p \in f(A)$, defina o conjunto $A_p = \{p\} \cup f^{-1}(p)$. Considere o espaço quociente $X +_f Y$ obtido a partir do colapso de A_p na união disjunta $X + Y$. Seja $\rho : X + Y \to X +_f Y$ a aplicação quociente.

   a) Mostre que $\rho|_Y$ é um homeomorfismo sobre sua imagem e $\rho(Y)$ é fechado em$X +_f Y$.

   b) Prove que $\rho|_{X\setminus A}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem e $\rho(X\setminus A)$ é aberto em $X +_f Y$.

8. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que existe uma aplicação quociente $\rho : X \to Z$ e uma função contínua injetiva $\bar{f} : Z \to Y$ tal que $f = \bar{f} \circ \rho$.

9. Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos e $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ uma família de funções. Defina a coleção τ de subconjuntos de Y por

$$\tau = \left\{U \subset Y : f_\lambda^{-1}(U) \text{ é aberto em } X_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\right\}$$

   a) Mostre que τ é uma topologia sobre Y.

   b) Verifique que τ é a maior topologia sobre Y que torna cada função f_λ contínua; τ é chamada de topologia forte coinduzida pela família de funções $\{f_\lambda\}$.

   c) Considere Y com a topologia forte coinduzida pelas funções $\{f_\lambda\}$. Prove que uma função $g : Y \to Z$ é contínua se e somente se $g \circ f_\lambda$ é contínua, para todo $\lambda \in \Lambda$.

10. Mostre que todo espaço metrizável é de Hausdorff. Conclua que todo espaço T_0 pseudometrizável é de Hausdorff.

11. Seja G um grupo algébrico com identidade e e seja $\mathcal{U}$ uma coleção de subconjuntos de G que satisfaz as seguintes propriedades:

   a) $e \in U$, para todo $U \in \mathcal{U}$.

   b) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$.

   c) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

   d) para cada $U \in \mathcal{U}$ e $g \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $gV \subset U$.

   e) para cada $U \in \mathcal{U}$ e $g \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $gVg^{-1} \subset U$.

   f) para cada par $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.

   g) $\{e\} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$.

   Para cada $g \in G$, defina $\mathcal{U}_g = \{gU : U \in \mathcal{U}\}$. Mostre que $\mathcal{U}_g$ é um sistema de vizinhanças de g para alguma topologia de Hausdorff sobre G. Com essa topologia, mostre que as operações de produto $(g, h) \in G\times G \to gh \in G$ e inversão $g \in G \to g^{-1} \in G$ são contínuas. Essas propriedades torna G é um grupo topológico (de Hausdorff).

12. Seja G um grupo topológico. Um subconjunto $B \subset G$ é dito simétrico se $B^{-1} = B$. Mostre que as vizinhanças simétricas da identidade de G formam uma base para as vizinhanças de e.

13. Se H é um subgrupo de um grupo topológico G, mostre que $\bar{H}$ também é subgrupo de G.

14. Um espaço topológico X é chamada de espaço homogêneo se para todo par de pontos $x, y \in X$, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo de G. Denote por G/H o espaço quociente das classes laterais a esquerda de H em G.

   a) Mostre que G/H é um espaço homogêneo.

   b) Mostre que a aplicação quociente $\rho : G \to G/H$ é aberta.

   c) Prove que G/H é Hausdorff se e somente se H é fechado em G.

   d) Se H é normal e fechado, mostre que G/H é um grupo topológico.

15. Descreva os grupos topológicos $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$ e $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

16. Verifique que o plano radial, a reta de Sorgenfrey e o plano de Moore são espaços de Hausdorff.

17. Mostre que todo subespaço de um espaço $T_0\,(T_1)$ é um espaço $T_0\,(T_1)$.

18. Prove que um espaço produto é $T_0\,(T_1)$ se e somente se cada fator é $T_0\,(T_1)$.

19. Mostre que um espaço quociente de X é T_1 se e somente se cada classe de equivalência define um subconjunto fechado de X.

20. Seja X um espaço topológico e defina a relação $x \sim y$ se e só se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

    a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X e que o espaço quociente $X/\sim$ é T_0.

    b) Se X é pseudometrizável, prove que $X/\sim$ é metrizável.

21. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos polinômios de n variáveis reais e defina a coleção $\mathcal{B} = \{p^{-1}(0) : p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

    a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para conjuntos fechados de uma topologia sobre $\mathbb{R}^n$. A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é chamada de topologia de Zariski.

    b) Mostre que a topologia de Zariski é T_1 mas não T_2.

22. Seja X um espaço T_1. Moster que um ponto $x_0 \in X$ é um ponto de acumulação de um subconjunto A de X se e somente se toda vizinhança de x_0 intersecta A em um conjunto infinito.

23. Um ponto x_0 é um ponto de condensação de um subconjunto A de um espaço topológico X se toda vizinhança de x_0 intersecta A em um conjunto não enumerável. O conjunto de todos os pontos de condensação de A é denotado por A^c. Mostre que se X é T_1 então A' e A^c são subconjuntos fechados de X e $A^c \subset A'$.

24. Mostre que todo subespaço de um espaço regular é regular e que todo subespaço de um espaço T_3 é T_3.

25. Prove que um espaço produto é regular se e somente se cada fator é regular.

26. Prove que um espaço produto é T_3 se e somente se cada fator é T_3.

27. Seja X um espaço T_3 e seja $f : X \to Y$ uma função contínua, sobrejetora, aberta e fechada. Mostre que Y é Hausdorff. (Dica: verifique que o conjunto

    $$A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

    é fechado em $X \times X$)

28. Mostre que o espaço de Moore Γ é Tychonoff.

29. Seja H um subgrupo fechado de um grupo topológico G. Mostre que G/H é um espaço T_3. Conclue que G é um espaço T_3 (lembre-se que estamos considerando grupos topológicos de Hausdorff).

30. Prove que todo grupo topológico é um espaço de Tychonoff.

31. Mostre que todo subespaço de um espaço completamente regular é completamente regular e que todo subespaço de um espaço de Tychonoff é um espaço de Tychonoff.

32. Prove que um espaço produto é completamente regular se e somente se cada fator é completamente regular.

33. Prove que um espaço produto é Tychonoff se e somente se cada fator é Tychonoff.

34. Prove que todo subespaço fechado de um espaço normal é normal e que todo subespaço fechado de um espaço T_4 é T_4.

35. Mostre que a imagem de um espaço normal (ou T_4) por uma aplicação contínua e fechada é um espaço normal (respectivamente T_4).

36. Seja X o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela união das retas $y = 0$ e $y = 1$. Identifique $(x, 0)$ com $(x, 1)$, para todo $x \neq 0$, e considere o espaço quociente resultante Y. Prove que X é T_4, a aplicação quociente $\rho : X \to Y$ é aberta e Y não é Hausdorff.