Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

5^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Verifique que todo espaço ordenado é T_4.

2. Um espaço topológico X é dito completamente normal se todo subespaço de X é normal. Prove que X é completamente normal se e somente se para todo par de subconjuntos A e B de X tais que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$, existem subconjuntos abertos e disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

3. Mostre que todo espaço métrico é completamente normal.

4. Um espaço X do tipo T_1 é chamado perfeitamente normal se para cada par de subconjuntos fechados e disjuntos A e B de X, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$. Mostre que um espaço X é perfeitamente normal se e somente se X é T_4 e cada subconjunto fechado de X é um conjunto G_δ.

5. Prove que todo espaço métrico é perfeitamente normal.

6. Mostre que um subconjunto retraído de um espaço de Hausdorff é fechado.

7. Prove que um subconjunto A de um espaço X é um subconjunto retraído de X se e somente se toda função contínua $f : A \to Y$ admite uma extensão contínua $g : X \to Y$.

8. Mostre que a imagem contínua e aberta de um espaço primeiro (segundo) enumerável é primeiro (respec. segundo) enumerável.

9. Verifique que todo subespaço de um espaço primeiro (segundo) enumerável é primeiro (respec. segundo) enumerável.

10. Um espaço quociente de um espaço segundo enumerável é segundo enumerável?

11. Prove que o espaço produto de espaços de Hausdorff é segundo enumerável se e somente se cada fator é segundo enumerável e, exceto para uma quantidade enumerável de, todos os fatores são espaços formados por apenas um ponto.

12. Prove que toda base para abertos de um espaço segundo enumerável possui uma subfamília enumerável que também é uma base.

13. Um espaço X é um espaço de Lindelöf se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável. Mostre que se X é um espaço de Lindelöf regular, então X é normal.

14. Encontre um exemplo de espaço regular separável que não é normal.

15. Prove que um espaço regular X é de Lindelöf se e somente se toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X admite uma subcoleção enumerável $\mathcal{C}' = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} = X$.

16. Se X é um espaço segundo enumerável, mostre que X é um espaço de Lindelöf separável.

17. Seja X um espaço pseudometrizável. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

    a) X é segundo enumerável.

    b) X é de Lindelöf.

    c) X é separável.

18. Mostre que imagem contínua de espaço de Lindelöf é de Lindelöf.

19. Prove que todo subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é de Lindelöf.

20. Se X é um espaço de Lindelöf, mostre que todo subconjunto não enumerável de X possui um ponto de acumulação.

21. Verifique que a imagem contínua de um espaço separável é separável.

22. Mostre que todo subespaço de um espaço métrico separável é separável.

23. Verifique que o plano radial é separável, mas não primeiro enumerável nem Lindelöf.

24. Verifique que o plano de Moore $\mathbf{\Gamma}$ é separável e primeiro enumerável, mas não é de Lindelöf.

25. Mostre que qualquer conjunto infinito com a topologia cofinita é conexo.

26. Mostre que a reta de Sorgenfrey é desconexa.

27. Verifique que nenhum subconjunto enumerável da reta $\mathbb{R}$ pode ser conexo.

28. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. Prove que qualquer função contínua $f : I \to I$ possui um ponto fixo.

29. Use o Exercício 28 para provar que qualquer função polinomial de grau ímpar tem pelos menos uma raíz real.

30. Um espaço topológico X é dito conexo por arcos se para qualquer par de pontos $x, y \in X$, existe uma função contínua e injetiva $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Se X é Hausdorff, mostre que X é conexo por arcos se e somente se é conexo por caminhos.

31. Mostre que o produto finito de espaços topológicos é conexo por caminhos se e somente cada fator é conexo por caminhos.

32. Em um espaço topológico X, defina a seguinte relação: $x \sim y$ se existe um caminho conectando x a y.

    a) Mostre que essa relação é de equivalência (a classe de equivalência de x é chamada de componente conexa por caminhos de x).

    b) Prove que X é localmente conexo por caminhos se e somente se cada componente conexa por caminhos de cada conjunto aberto é aberta.

    c) Conclua que se X é localmente conexo por caminhos, então cada componente conexa por caminhos é um subconjunto aberto e fechado de X.

33. Seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de subconjuntos conexos de um espaço X. Se $A \subset X$ é conexo e $A \cap A_\lambda \neq \emptyset$, para todo λ, mostre que $B = A \cup \bigcup A_\lambda$ é conexo.

34. Um espaço X é dito totalmente desconexo se a componente conexa de cada ponto x de X consiste somente de x. Mostre que se X é discreto então X é totalmente desconexo. Vale a recíproca?

35. Seja A um subconjunto de um espaço X. Se $B \subset X$ é um subconjunto conexo de X que intersecta ambos A e $X \backslash A$, mostre que B deve intersectar a fronteira de A.

36. Seja A um subconjunto de um espaço X com interior e fronteira não vazios. Se ambos $\text{int}(A)$ e $\text{fr}(A)$ são conexos, então A é conexo? Vale a recíproca? (dica: pense no subconjunto do plano formado pela figura oito e seu interior)

37. Mostre que $\mathbb{R}^\omega$ não é conexo com a topologia box. (dica: mostre que o conjunto de todas as sequências limitadas é aberto e fechado)

38. Considere $\mathbb{R}^\omega$ com a topologia box. Mostre que duas sequências $x, y \in \mathbb{R}^\omega$ estão em uma mesma componente conexa se e somente se $x - y$ é eventualmente zero.

39. Prove que a união de conjuntos conexos por caminhos com um ponto em comum é conexa por caminhos.

40. Por quê $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ se $n > m$?

41. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é enumerável, mostre que $\mathbb{R}^n \backslash A$ é conexo por caminhos.

42. Mostre que qualquer subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.