Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

3^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família localmente finita de subconjuntos fechados de um espaço topológico X tal que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua se e somente se cada restrição $f|_{F_\lambda}$ é contínua. Prove um resultado análogo trocando fechados por abertos.

2. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se x é um ponto de acumulação de um conjunto $A \subset X$, então $f(x)$ é um ponto de acumulação da imagem $f(A) \subset Y$?

3. Uma função $f : X \to A$ de X sobre um subespaço A de X é chamada de retração de X sobre A se $f|_A : A \to A$ é a aplicação identidade de A. Nesse caso, A é chamado de conjunto retraído de X. Mostre que o disco unitário é um conjunto retraído do plano.

4. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferiormente se para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se $f^{-1}((a, +\infty))$ é aberto em $X; f$ é dita semicontínua superiormente se para todo $a \in \mathbb{R}, f^{-1}((-\infty, a))$ é aberto em X. Prove que f é contínua se e somente se f é semicontínua inferiormente e superiormente.

5. Seja $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de funções $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$ semicontínuas inferiormente. Assuma que $\sup_\lambda f_\lambda(x)$ existe para todo $x \in X$. Mostre que a função $f(x) = \sup_\lambda f_\lambda(x)$ é semicontínua inferiormente.

6. Seja $A \subset X$. Mostre que a função característica $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (superiormente) se e somente se A é aberto (fechado) em X. Conclua que $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se A é aberto e fechado em X.

7. Seja C^1 (I) o espaço das funções com derivadas contínuas no intervalo $\mathrm{I} = [0, 1]$, munido da topologia gerada pela métrica $\mathrm{d}(f, g) = \sup_{x\in\mathrm{I}} \{| f(x) - g(x |\}$. Defina a função $L : C^1(\mathrm{I}) \to \mathbb{R}$ por

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx.$$

Tal função é chamada função comprimento de arco. Mostre que L é semicontínua inferiormente.

8. Seja X um espaço topológico e $C(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Defina ponto a ponto as operações de soma, produto e produto por escalar em $C(X)$:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f.g)(x) &= f(x).g(x),\\ (a.f)(x) &= a.f(x), \qquad \text{com } a\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Mostre que essas operações são fechadas em $C(X)$ e que $C(X)$ é uma álgebra sobre os números reais.

9. Seja $C_b(X) \subset C(X)$ o subconjunto das funções contínuas e limitadas. Mostre que $C_b(X)$ é uma sub-álgebra de $C(X)$.

10. Para cada $f \in C_b(X)$, defina o valor $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Mostre que $\|\cdot\|$ define uma norma em $C_b(X)$, tornando-o um espaço vetorial normado.

11. Sejam X e Y dois espaços ordenados. Mostre que toda função bijetiva $f : X \to Y$ que preserva ordem é um homemorfismo.

12. Seja Y um espaço ordenado e $f, g : X \to Y$ funções contínuas.

    a) Prove que o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em X.
    b) Defina $h : X \to Y$ por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que h é contínua.

13. Sejam X um conjunto e $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos. Dada uma família de funções $f_\lambda : X \to X_\lambda$, com $\lambda \in \Lambda$, a topologia fraca induzida sobre X pela família $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é a menor topologia sobre X em relação a qual toda função f_λ é contínua. Assuma X com a topologia fraca. Construa explicitamente tal topologia e exiba uma sub-base para ela. Mostre que uma função $f : Y \to X$ é contínua se e somente se $f_\lambda \circ f$ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$.

14. Seja E um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo com a métria $d(x, y) = \|x - y\|$ e $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ a família dos funcionais lineares definidos em E dados por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, $\varphi_f(x) = f(x)$. Construa a topologia fraca associada a família $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ e exiba uma base de vizinhanças para um ponto $x_0 \in E$ nesta topologia. Mostre que munido da topologia fraca, E torna-se um espaço vetorial topológico. Tal topologia é chamada topologia fraca $\sigma(E, E')$.

15. Verifique que a topologia produto sobre $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é a topologia fraca induzida pela família de projeções $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

16. Seja S um subespaço do espaço topológico X. Mostre que S tem a topologia fraca induzida pela inclusão $i : S \hookrightarrow X$.

17. Assuma que um espaço X possui a topologia fraca induzida por uma família de funções $f_\lambda : X \to X_\lambda$, com $\lambda \in \Lambda$. Mostre que qualquer subespaço $S \subset X$ possui a topologia fraca induzida pela família de funções $f_\lambda|_S : S \to X_\lambda$, com $\lambda \in \Lambda$.

18. Seja $\sigma : \Lambda \to \Gamma$ uma bijeção entre os conjuntos Λ e Γ. Se $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ são famílias de espaços topológicos tais que X_λ é homeomorfo a $Y_{\sigma(\lambda)}$, para todo $\lambda \in \Lambda$, mostre que $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é homeomorfo a $\prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$.

19. Seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ uma coleção finita de espaços topológicos. Dados $A_i \subset X_i, i = 1, \ldots, n$, mostre que $\operatorname{int}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \operatorname{int}(A_i)$.

20. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que $\partial(A \times B) = (\bar{A} \times \partial B) \cup (\partial A \times \bar{B})$. Generalize para um produto finito.

21. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $D_\lambda \subset X_\lambda$. Mostre que $\prod_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ é denso em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ se e somente se D_λ é denso em X_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$.

22. Pada cada $\lambda \in \Lambda$, seja $y_\lambda \in X_\lambda$ um ponto fixado. Dado $\mu \in \Lambda$, defina o subconjunto $X_\mu^\# = \left\{x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : x_\lambda = y_\lambda \text{ sempre que } \lambda \neq \mu\right\}$. Prove que $X_\mu^\#$ como subespaço de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é homeomorfo a X_μ. Conclua que cada função $i_\mu : X_\mu \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ definida por
$$i_\mu(z) = \begin{cases} y_\lambda, & \text{se } \lambda \neq \mu \\ z, & \text{se } \lambda = \mu \end{cases}$$
é um mergulho.

23. Pada cada $\lambda \in \Lambda$, seja $y_\lambda \in X_\lambda$ um ponto fixado. Mostre que o subconjunto $D = \left\{x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : x_\lambda = y_\lambda \text{ exceto para finitos } \lambda\right\}$ é denso em $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

24. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ funções contínuas e defina o produto cartesiano $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ por $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$. Mostre que $f \times g$ é contínua.

25. Seja $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, onde $X_n = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ por $f(t) = (t)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que f é contínua se $\mathbb{R}^\omega$ é o espaço produto, mas f não é contínua se $\mathbb{R}^\omega$ possui a topologia box.

26. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\omega : x_i \neq 0 \text{ somente para finitos valores de } i\}$. Determine o fecho de $\mathbb{R}^\infty$ em $\mathbb{R}^\omega$ com relação a topologia produto e a topologia box. (Dica: veja Exercício 22)