Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

2^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Seja X um espaço topológico. Um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de um conjunto $A \subset X$ se cada vizinhança de x contém algum ponto de $A \backslash \{x\}$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é chamado de conjunto derivado de A e é denotado por A'. Mostre que $\bar{A} = A \cup A'$. Conclua que um conjunto é fechado se e somente se contém todos seus pontos de acumulação.

2. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a topologia do limite inferior é chamada de reta de Sorgenfrey. Descreva o fecho de cada um dos seguintes conjuntos na reta de Sorgenfrey:

   (a) $\mathbb{Q}$.

   (b) $\{1/n : n = 1, 2, \ldots\}$.

   (c) $\{-1/n : n = 1, 2, \ldots\}$.

   (d) $\mathbb{Z}$.

3. Mostre que a reta de Sorgenfrey é um espaço primeiro enumerável e separável.

4. Seja Γ o semiplano superior em $\mathbb{R}^2$. Considere a coleção τ de subconjuntos de $\mathbf{\Gamma}$ definida da seguinte forma. Para cada ponto no semiplano aberto, as vizinhanças básicas são os discos abertos inteiramente contidos no semiplano. Para cada ponto z no eixo $0x$, as vizinhanças básicas são os conjuntos da forma $\{z\} \cup A$, onde A é um disco aberto no semiplano, tangente ao eixo $0x$ no ponto z.

   (a) Mostre que τ é uma topologia sobre $\mathbf{\Gamma}$. O espaço topológico $(\mathbf{\Gamma}, \tau)$ é chamado de plano de Moore.

   (b) Compare a topologia τ com a topologia relativa do semiplano superior.

   (c) Descreva as operações de fecho e interior no plano de Moore.

   (d) Mostre que o plano de Moore é separável.

   (e) Prove que a topologia relativo do eixo $0x$ no plano de Moore é a topologia discreta. Conclua que subespaço de espaço separável não é necessariamente separável.

5. Defina a coleção τ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ da seguinte forma. Para cada ponto $x \neq 0$, as vizinhanças básicas são os intervalos abertos centrados em x, como usual. As vizinhanças básicas de 0 são os conjuntos da forma $(-\varepsilon, \varepsilon) \cup (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$, com $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que τ é uma topologia e descreva o fecho de Kuratowski associado.

6. Seja $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ o conjunto das funções reais com valores no intervalo $\mathrm{I} = [0, 1]$. Para cada $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, cada subconjunto finito $F \subset \mathrm{I}$, e cada número $\varepsilon > 0$, defina o conjunto

$$U(f, F, \varepsilon) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}} : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in F \right\}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{B}_f = \{U(f, F, \varepsilon) : F \subset \mathrm{I} \text{ finito e } \varepsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças de f, para todo $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, tornando $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ um espaço topológico.

   (b) Prove que $\mathrm{fe}\,(\{f\}) = \{f\}$ para todo $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.

7. Para cada $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ e cada número $\varepsilon > 0$, defina o conjunto

$$V(f, \varepsilon) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}} : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in \mathrm{I} \right\}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{C}_f = \{V(f, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças de f, para todo $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, tornando $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ um espaço topológico.

   (b) Compare a topologia obtida sobre $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ com a topologia do exercício anterior.

   (c) Prove que o subespaço das funções contínuas $C(\mathrm{I}) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ é metrizável. (Dica: defina $\mathrm{d}(f, g) = \sup_{x \in \mathrm{I}}\{|\, f(x) - g(x\,|\})$

8. Mostre que a coleção dos conjuntos da forma $(-\infty, a)$ e da forma $(b, +\infty)$ é uma subbase da topologia usual da reta real.

9. Descreva a topologia do plano que tem como subbase a família de todas as retas.

10. Denote por P o plano radial.

   (a) Verifique que a topologia relativa de uma reta $E \subset P$ coincide com a topologia usual da reta.

   (b) Mostre que a topologia relativa de um círculo $C \subset P$ é a topologia discreta.

11. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Tome como subbase de topologia todos os conjuntos da forma $\{x : x < a\}$ e $\{x : x > a\}$, para $a \in X$. A topologia resultante é chamada de topologia da ordem e X é chamado de espaço ordenado.

    (a) Se $a < b$, mostre que o intervalo $\{x \in X : a < x < b\}$ é um conjunto aberto da topologia da ordem.

    (b) Verifique que intervalos da forma $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$ podem ser abertos.

    (c) Compare esta topologia com a estudada em aula.

12. Considere a ordem lexicográfica em $X = [0,1] \times [0,1] : (x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ se $x_1 < x_2$ ou, se $x_1 = x_2, y_1 < y_2$. Descreva as vizinhanças dos pontos $(x, 0); (x, 1)$; e (x, y), com $0 < x < 1$ e $0 < x < 1$.

13. Uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é chamada localmente finita se cada ponto de X tem uma vizinhança que intersecta somente finitos elementos de $\mathcal{U}$. Mostre que a união dos elementos de qualquer família localmente finita de subconjuntos fechados é um conjunto fechado.

14. Mostre que se Y é um subespaço topológico de X e A é um subconjunto Y, então a topologia induzida em A como subespaço de Y e a mesma topologia que é induzida como subespaço de X.

15. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ topologias em X com $\mathcal{T}'$ estritamente mais fina que $\mathcal{T}$. O que pode ser dito sobre as topologias induzidas em um subconjunto $Y \subset X$ por $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$?

16. Considere o conjunto $Y = [-1, 1]$ como subespaço de $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos são abertos em Y ? Quais são abertos em $\mathbb{R}$?

    i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| < 1\right\}$

    ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\right\}$

    iii) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\right\}$

    iv) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\right\}$

    v) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1 \text{ e } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\}$

17. Mostre que a coleção enumerável

$$\{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 : a < b, \quad c < d, \quad \text{e} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

    é uma base para $\mathbb{R}^2$.

18. Se L é uma reta arbitrária em $\mathbb{R}^2$, descreva a topologia induzida em L como um subespaço de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ e como subespaço de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

19. Mostre que a topologia da ordem lexicográfica em $\mathbb{R}^2$ coincide com a topologia produto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_d$ denota a topologia discreta em $\mathbb{R}$. Compare esta topologia com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$.

20. Seja $I = [0, 1]$. Compare a topologia produto de $I \times I$, com a topologia da ordem (considerando a ordem lexicográfica) e com a topologia induzida por $\mathbb{R}^2$ munido da topologia da ordem (considerando a ordem lexicográfica).