Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT

1^a Lista de Exercícios de Topologia

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

1. Se $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove as leis de *De Morgan*:

$$a) \quad X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

$$b) \quad X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

2. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $B \subset Y$ e $B_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:

$$a) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

$$b) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

$$c) \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

3. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $A \subset X$ e $A_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:

$$a) \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

$$b) \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i), \quad \text{com igualdade se } f \text{ for injetiva.}$$

$$c) \quad f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A), \quad \text{se } f \text{ for injetiva.}$$

$$c) \quad f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A), \quad \text{se } f \text{ for sobrejetiva.}$$

4. Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$ e conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tais que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

5. Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

6. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que:

   a) $A \subset f^{-1}(f(A))$, com igualdade se f for injetiva;

   b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, com igualdade se f for sobrejetiva.

7. Dê um exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $A \neq f^{-1}(f(A))$.

8. Dê um exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $B \subset Y$ tal que $B \neq f(f^{-1}(B))$.

9. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções tais que $g \circ f(x) = x$, para todo $x \in X$. Mostre que f é injetiva e g é sobrejetiva.

10. Prove que as seguintes funções são métricas em $C[a,b]$ (onde $C[a,b]$ denota o espaço das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$).

    a) $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$;

    b) $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

11. Seja B um subconjunto fixado em um espaço topológico X. Defina $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ por $f(A) = A \cup B$, se $A \neq \emptyset$, e $f(\emptyset) = \emptyset$. Verifique que f é uma operação fecho de Kuratowski e descreva os abertos da topologia associada. Quais são as topologias resultantes nos casos $B = \emptyset$ e $B = X$?

12. Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é chamado radialmente aberto se contém um segmento de reta aberto em cada direção e em cada um de seus pontos. Mostre que a coleção dos conjuntos radialmente abertos é uma topologia sobre $\mathbb{R}^2$. Essa topologia é chamada de topologia radial e $\mathbb{R}^2$ munido da topologia radial é chamado de plano radial. Compare a topologia radial com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

13. Seja X um conjunto e defina $\tau = \{E \subset X : X \setminus E$ é enumerável ou $E = \emptyset\}$. Mostre que τ é uma topologia sobre X.

14. Seja X um conjunto e defina $\tau = \{E \subset X : X \setminus E$ é infinito, $E = \emptyset$ ou $E = X\}$. Verifique se τ é uma topologia sobre X.

15. Considere a coleção $\mathcal{B}$ de todos os intervalos semi-abertos $[a,b) \subset \mathbb{R}$, com $a < b$. A topologia sobre $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{B}$ é chamada topologia do limite inferior. Mostre que a topologia do limite inferior é estritamente mais fina do que topologia usual de $\mathbb{R}$ (gerada pelos intervalos abertos).

16. Seja $A \subset X$ e τ uma topologia qualquer sobre X. Prove que $\tau' = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau\}$ é uma topologia sobre X. Essa topologia é chamada de extensão simples de τ sobre A.

17. Mostre que qualquer subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ é a fronteira de algum conjunto de $\mathbb{R}^2$.

18. Prove que 14 é o maior número possível de conjuntos diferentes nas duas sequências abaixo

$$A, A^C, \overline{A^C}, \overline{A^C}^C, \ldots$$
$$A, \bar{A}, \bar{A}^C, \overline{\bar{A}^C}, \ldots$$

(Dica: mostre que fe (int(fe(A))) = fe(A) para qualquer subconjunto A de um espaço topológico X.)

19. Um conjunto aberto A em um espaço topológico X é chamado de regularmente aberto se $A = \text{int}(\text{fe}(A))$. Um subconjunto fechado $F \subset X$ é chamado de regularmente fechado se $F =$ fe (int (F)).

    (a) Mostre que A é regularmente aberto se e somente se $A^C = X \backslash A$ é regularmente fechado.

    (b) Mostre que int $(fe(A))$ é regularmente aberto para qualquer subconjunto $A \subset X$.

    (c) Prove que qualquer intersecção finita de conjuntos regularmente abertos é um conjunto regularmente aberto.

    (d) Prove que qualquer união finita de conjuntos regularmente fechados é um conjunto regularmente fechado.

    (e) Dê um exemplo de conjunto aberto na reta real $\mathbb{R}$ que não é regularmente aberto.

20. Considere o espaço $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ munido da topologia métrica gerada pela distância euclidiana. Mostre que nesse espaço métrico a bola fechada pode não coincidir com o fecho da bola aberta.

21. Dê um exemplo de uma sequência infinita de conjuntos fechados $F_1, F_2, \ldots$ em um espaço topológico X tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ não é um conjunto fechado.

22. Seja $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ uma união de conjuntos fechados de um espaço métrico $(X,\ \mathrm{d})$ tais que $\mathrm{d}\left(F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}\right) = \inf\left\{\mathrm{d}(x, y) : x \in F_{\lambda_1}, y \in F_{\lambda_2}\right\} \geq \varepsilon$ sempre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onde $\varepsilon > 0$ é um número fixado. Mostre que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado. Isso contradiz o fato de a união de fechados não ser fechada em geral?

23. Mostre que a interseção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ de uma família qualquer de topologias sobre X é uma topologia sobre X. Mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é a maior topologia sobre X contida em todas τ_λ.

24. Mostre por um exemplo que a união de duas topologias sobre X não é necessariamente uma topologia sobre X.

25. Dada uma família $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de topologias sobre X, mostre que existe uma topologia τ sobre X mais fina do que τ_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$, e que τ é a menor topologia satisfazendo essa propriedade.

26. Mostre que as topologias de $\mathbb{R}_\ell$ e $\mathbb{R}_K$ não são comparáveis.

27. Considere as seguintes topologias em $\mathbb{R}$:

    $\mathcal{T}_1$ = a topologia usual.

    $\mathcal{T}_2$ = a topologia de $\mathbb{R}_K$.

    $\mathcal{T}_3$ = a topologia dos complementos finitos.

    $\mathcal{T}_4$ = a topologia do limite superior, tendo todos os conjuntos $(a, b]$ como base.

    $\mathcal{T}_5$ = a topologia tendo todos os conjuntos $(-\infty, a) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ como base.

    Determine para cada uma destas topologias acima quais são as outras que ela contém.

28. Sejam $X = \{a, b, c\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ e $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. Encontre a menor topologia sobre X contendo ambas τ_1 e τ_2 e a maior topologia contida em ambas τ_1 e τ_2.

29. Um subconjunto de um espaço topológico X é um conjunto G_δ se é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos e é um conjunto F_σ se é uma união enumerável de conjuntos fechados. Prove os seguintes itens:

    (a) O complementar de um conjunto G_δ é um conjunto F_σ, e vice versa.

    (b) Um conjunto F_σ pode ser escrito como a união de uma sequência crescente $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ de conjuntos fechados.

    (c) Um conjunto G_δ pode ser escrito como a intersecção de uma sequência decrescente $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ de conjuntos abertos.

30. Mostre que todo conjunto fechado de um espaço métrico (X, d) é um conjunto G_δ. (Dica: Se $F \subset X$ é fechado, defina $A_n = \{x \in X : d(F, x) < 1/n\}$)

31. Prove que todo conjunto aberto de um espaço métrico é um conjunto F_σ.

32. Mostre o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um conjunto F_σ em $\mathbb{R}$.