Terceira avaliação de Análise Funcional - 15/12/2022

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (2,0)

   i) Seja $H = \ell^2$ (real). Denote por $C = \{x = (x_n) : x_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.

      a) Prove que C é convexo e fechado.

      b) Calcule a projeção de H sobre C.
      Dica: Faça um desenho em duas dimensões.

   ii) Seja H um espaço de Hibert real. Determine a projeção de H sobre $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$.

2. (2,0)

   i) Se H é um espaço com produto interno então $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u, v)|$.

   ii) Seja H um espaço de Hilbert real não nulo e T um operador auto-adjunto e limitado de H. Prove que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H = 1}} |(Tx, x)|.$$

   Dica: Utilize o item i), a identidade $(Tx, y) = \frac{(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)}{4}$ (verifique!) e a identidade do paralelogramo.

3. (2,0) Prove que o espectro $\sigma(T)$ de um operador limitado é compacto e $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

4. (2,0) Sejam E e F espaços de Banach. Mostre que se $T : E \to F$ é compacto e $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $T(x_n) \to T(x)$ na topologia da norma em F.

5. (2,0)

   i) **Enuncie** o Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-Adjuntos visto em aula.

   ii) **Enuncie** os Teoremas de Lions-Stampacchia e Lax-Milgram e **demonstre** apenas Lax-Milgram.

6. (2,0) Prove que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ^2.