Segunda avaliação de Análise Funcional - 18/11/2022

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (4,0) Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita.

   a) Defina as topologias $\sigma(E', E'')$ e $\sigma(E', E)$ em E' e exiba uma base de vizinhanças de um ponto f_0 em cada uma dessas topologias.

   b) Mostre que $(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço de Hausdorff.

   c) Mostre que $\overline{S(0,1)}^{\sigma(E,E')} = B_E$.

   d) Mostre que $(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço vetorial topológico, isto é, a soma e a multiplicação por escalar são funções contínuas quando E está munido da topologia fraca $\sigma(E, E')$.

   e) Mostre que E é separável se, e somente se $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ é separável.

2. (2,0) Seja E um espaço de Banach. Temos que $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

   i) $\|x_n\| \leq M$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

   ii) $\langle g, x_n \rangle \to \langle g, x \rangle$ para todo $g \in B'$ onde B' é um subconjunto denso de E'

3. (2,0) Defina $C = \{\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p : |\xi_j| \leq \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}\}$. Assuma que $1 \leq p < \infty$. Mostre que toda sequência que converge fraco em C também converge em norma.

4. (2,0) Para cada $n \geq 1$ seja
$$e^n = (0, 0, \dots, \underset{(n)}{1}, 0, \dots).$$

   a) Prove que $e^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ fracamente em $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$ com $1 < p \leq \infty$ mas $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em norma.

   b) Prove que não existe subsequência (e^{n_k}) que converge em ℓ^1 com respeito a topologia $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

5. (3,0)

   a) Enuncie e demonstre o Teorema de Kakutani.

   b) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um isomorfismo vetorial topológico. Mostre que E é reflexivo se, e somente se, F é reflexivo.