Primeira avaliação de Análise Funcional - 26/09/2022

Professor: Victor Hugo Gonzalez Martinez

Nome: ____

1. (3,0) Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se for falsa, demonstre ou dê um contra-exemplo.

   a) Seja X um espaço métrico e $A \subset X$ um subconjunto denso de X. Se toda sequência de Cauchy em A converge para um ponto de X então X é completo.
   b) $C([-1,1])'$ é estritamente convexo.
   c) Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, então $f \in X'$ e é uma aplicação aberta.
   d) Sejam E e F espaços normados sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ tal que $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em F para todo $x \in E$. Se $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então
      a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$;
      b) $T \in \mathcal{L}(E,F)$;
      c) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

2. (1,0) Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X satisfaz a propriedade $(*)$ se

$$\|x_n - x_{n+1}\|_X < \frac{1}{2^n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

   a) Mostre que toda sequência que satisfaz a propriedade $(*)$ é de Cauchy.
   b) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma sub-sequência que satisfaz a propriedade $(*)$

3. (1,0) Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere o funcional $f_a : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ dado por

$$f_a(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx + a\varphi(0).$$

   Mostre que f_a é um elemento do dual topológico de $C([-1,1])$ e que $\|f_a\|_{C([-1,1])'} = 2 + |a|$.

4. (2,0) Enuncie e demonstre o Teorema de Unicidade da Extensão de Hahn-Banach.

5. (2,0) Seja E um espaço de Banach e $T : E \to E'$ um operador linear tal que $\langle Tx, x\rangle_{E',E} \geq 0$ para cada $x \in E$. Prove que T é um operador limitado.

6. (2,0) Prove os seguintes itens:

   a) Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado e W um subespaço vetorial fechado de X e $y_0 \in X \setminus W$. Então existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x) = 0$ para cada $x \in W$ e $\varphi(y_0) = 1$.
   b) Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial normado não nulo. Prove que $(\mathcal{L}(X,X), \circ)$ é comutativo se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$.