

ELETROMAGNETISMO - PARTE 1 - Edição 01.2011

Eduardo Fontana, PhD

Professor Titular

Departamento de Eletrônica e Sistemas

UFPE

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Capítulo 2 - Eletrostática

[2.1 Campo Eletrostático](#)

[2.1.1 Lei de Coulomb](#)

[2.1.2 Campo eletrostático](#)

- [Conceituação do campo eletrostático](#)
- [Linhas de campo](#)

[2.1.3 O conceito de cargas distribuídas](#)

[2.2 Lei de Gauss para o Campo Elétrico](#)

[2.2.1 Fluxo elétrico através de uma superfície fechada](#)

[2.2.2 Determinação de campos através da Lei de Gauss](#)

[2.3. Potencial Eletrostático](#)

[2.3.1 Definição da função potencial](#)

[2.3.2 Diferença de potencial e circulação do campo eletrostático](#)

[2.3.3 Energia potencial de uma carga puntiforme em uma região de campos](#)

[2.3.4 Energia potencial de uma distribuição de cargas](#)

[2.4 Equações de Maxwell para a Eletrostática](#)

[2.4.1 Forma diferencial](#)

[2.4.2 Equação de Poisson](#)

[2.4.3 Densidade de energia](#)

[2.5 Eletrostática em Meios Materiais](#)

[2.5.1 Potencial e campo do dipolo elétrico](#)

[2.5.2. Energia de interação entre campo e dipólo elétrico](#)

[2.5.3. Campo de uma distribuição de dipolos - Vetor polarização](#)

[2.5.4. Cargas de polarização e relações constitutivas em meios materiais](#)

[2.5.5. Tipos de meios materiais](#)

- [Meios lineares](#)
- [Meios isotrópicos e anisotrópicos](#)
- [Meios homogêneos](#)
- [Meios não-lineares](#)

[2.6. Condições de Contorno](#)

[Problemas](#)

2.1 Campo Eletrostático

2.1.1 Lei de Coulomb

A eletrostática lida com a interação entre partículas carregadas em repouso e com a análise de campos produzidos por distribuições de cargas em repouso. A carga elétrica é uma grandeza fundamental, tal como, por exemplo, a massa, o comprimento e o tempo. Experimentos demonstraram que cargas elétricas satisfazem as seguintes propriedades:

- Existem dois tipos de carga na natureza, que diferem na forma com que interagem.
- Cargas do mesmo tipo se repelem, e cargas de tipos distintos se atraem.
- Para representar-se o tipo de interação entre cargas, atribui-se o sinal positivo para cargas de um tipo, e o negativo para cargas pertencentes ao segundo tipo.
- A carga é quantizada, e o quantum de carga elétrica corresponde a carga de um elétron e vale $1,60 \times 10^{-19}$ Coulombs. O Coulomb é a unidade de carga no Sistema Internacional (SI) de unidades.
- A carga total em um sistema isolado é conservada. Por sistema isolado nesse caso, subentende-se aquele que bloqueie a entrada ou saída de matéria mas que seja susceptível a penetração ou emissão de radiação eletromagnética.
- Historicamente, foi atribuído o sinal negativo à carga do elétron.

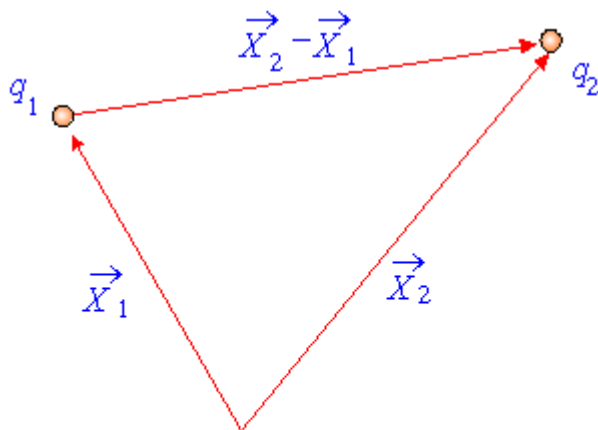


Fig.2.1 Disposição geométrica de cargas elétricas para o cálculo da força eletrostática expressa pela Eq.(2.1)

Coulomb em 1785 realizando uma série de experimentos com uma balança de torção de alta precisão, determinou que a força entre objetos puntiformes carregados era inversamente proporcional ao quadrado da distância e proporcional ao produto das cargas. Por objetos puntiformes entendem-se aqueles cujas dimensões típicas sejam pequenas comparadas com a distância de separação. Foi também observado que a linha de ação da força era dirigida ao longo da linha de separação entre cargas. Com base na Fig. 2.1, a relação matemática obtida por Coulomb pode ser posta na forma vetorial

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{X}_2 - \vec{X}_1|^3} (\vec{X}_2 - \vec{X}_1) \quad (2.1)$$

onde ϵ_0 é a **permissividade elétrica do vácuo** e q_1 e q_2 são os valores das cargas localizadas nos pontos \vec{X}_1 e \vec{X}_2 , respectivamente. Em unidades SI, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{Nm}^2)$. Na notação da Eq.(2.1), o termo \vec{F}_{12} representa a força sobre a carga q_2 devido a q_1 , que será repulsiva ou atrativa, se o produto das cargas for positivo ou negativo, respectivamente.

Um outro resultado importante obtido de observações experimentais é que a força eletrostática obedece ao princípio da superposição, i.e., a força total sobre uma carga de teste, produzida por um conjunto de cargas puntiformes, pode ser obtida somando-se vetorialmente a força de cada carga individual, na ausência das demais. Conseqüentemente, para a situação ilustrada na Fig.2.2, a força total sobre a carga q_t devido ao conjunto de cargas q_i pode ser obtida de,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_t (\vec{X} - \vec{X}_i)}{|\vec{X} - \vec{X}_i|^3} \quad (2.2)$$

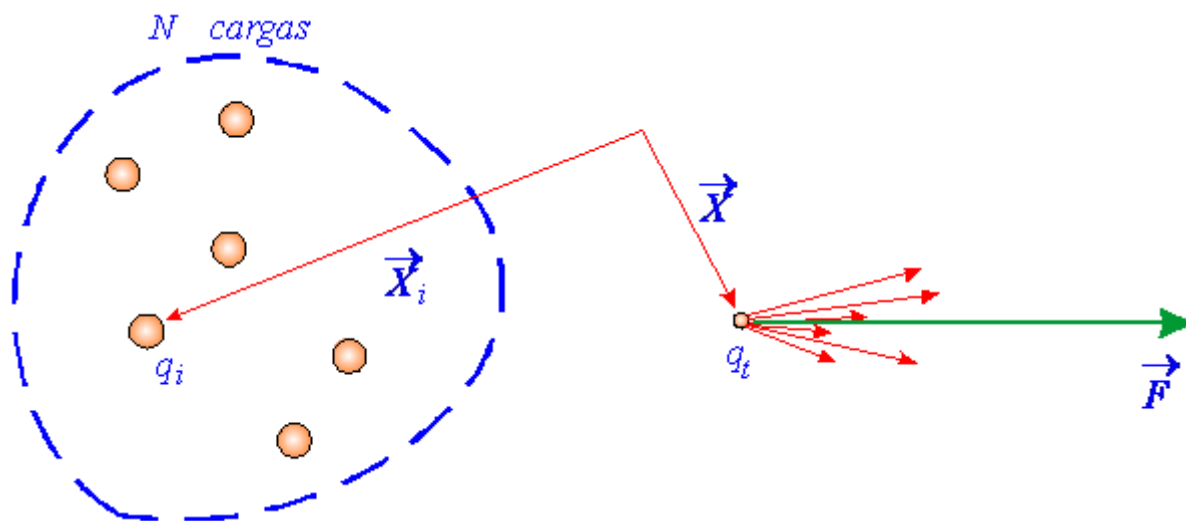


Fig.2.2 Geometria para o cálculo da força total produzida por um conjunto de N cargas sobre uma carga de teste q_t .

2.1.2 Campo eletrostático

Conceituação do campo eletrostático

Observa-se que uma carga elétrica produz uma região de influência ao seu redor. O efeito pode ser sentido por outro objeto carregado posicionado nas imediações da carga. Este transmissor de efeito, que faz-se presente no espaço, a partir da existência de uma partícula carregada, é denominado de **campo eletrostático**.

A caracterização do campo eletrostático produzido por um conjunto de cargas elétricas, pode ser feita colocando-se uma carga de teste q_t na região de campo, e medindo-se a força elétrica \vec{F} produzida sobre q_t . A magnitude da carga de teste deve ser pequena de forma a não perturbar o campo originalmente presente. A partir dessa medição, o campo eletrostático pode ser definido pela relação

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_t} \quad (2.3)$$

De acordo com essa definição, o campo eletrostático é independente da existência de uma carga no ponto de observação, sendo medido, no sistema SI, em unidades de Newton/Coulomb.

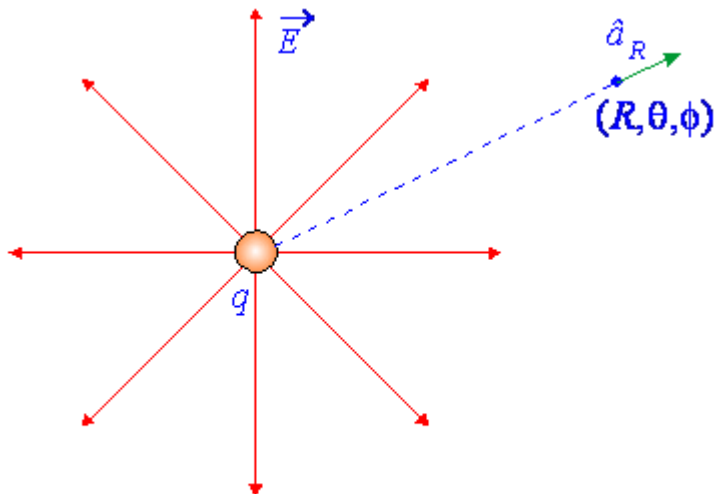


Fig.2.3. Linhas de campo produzidas por uma carga pontiforme

Por exemplo, uma carga pontiforme positiva produz um campo elétrico radial conforme ilustrado na Fig.2.3. A dependência espacial do campo elétrico nessa situação, é mais convenientemente obtida, admitindo-se um sistema de coordenadas tendo como origem a posição da carga pontiforme. Nesse sistema, o vetor campo elétrico observado no ponto de coordenadas (R, θ, ϕ) , é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (2.4)$$

Como mostra a Eq.(2.4), o vetor campo elétrico de uma carga pontiforme é radial, o que caracteriza a natureza central da força eletrostática, sendo dependente apenas do inverso do quadrado da distância.

A generalização da Eq.(2.3) para o campo produzido por um conjunto de cargas discretas é obtida diretamente da expressão para a força eletrostática dada pela Eq.(2.2), resultando em

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{X} - \vec{X}_i)}{|\vec{X} - \vec{X}_i|^3} \quad (2.5)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Linhas de campo

Considere-se a existência no espaço de uma distribuição de cargas que produz um campo elétrico. Se uma carga de teste positiva fosse colocada em um determinado ponto dessa região, sofreria uma aceleração que, em cada ponto da trajetória, teria mesma direção e sentido do vetor força elétrica, e por conseguinte do vetor campo elétrico sobre a carga de teste. **Uma linha de campo** é uma curva que fornece, em cada ponto, a **direção inicial da trajetória** que seria descrita por uma carga de teste inicialmente em repouso. É importante salientar que a linha de campo assim definida não corresponde a **trajetória completa** que seria seguida pela carga de teste uma vez que esta deve estar inicialmente em repouso e não em movimento, de acordo com a definição.

Para uma dada distribuição de campo elétrico, equações para as linhas de campo podem ser obtidas fazendo-se as correspondências apropriadas entre as componentes do campo e as coordenadas. Considere-se por exemplo o traçado de linhas em um plano, com o campo decomposto em uma base ortonormal do tipo

$$\vec{E} = \hat{a}_1 E_1 + \hat{a}_2 E_2$$

De acordo com a definição de linha de campo, o vetor campo elétrico deve ser tangente a curva correspondente em cada ponto. Sendo dl_1 e dl_2 os comprimentos diferenciais ao longo das direções 1 e 2, respectivamente, a equação da linha de campo tem de satisfazer a relação

$$\frac{dl_2}{dl_1} = \frac{E_2}{E_1} \quad (2.6)$$

Conhecendo-se a dependência espacial das componentes do campo, pode-se resolver a equação diferencial expressa pela Eq.(2.6) para obtenção da equação da linha que passa por um dado ponto do espaço. Se uma solução analítica da Eq.(2.6) não puder ser obtida, recorrem-se a métodos numéricos de solução. Com a difusão de *softwares* de computação matemática compatíveis com o sistema operacional *Microsoft Windows*TM, tais como *Mathcad*, *Matematica*[®] e *Matlab*[®], o cálculo e traçado de linhas de campo pode ser prontamente programado.

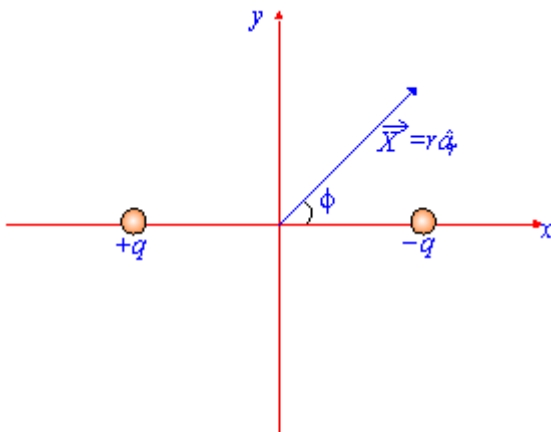


Fig.2.4 Geometria para a determinação das linhas de campo do dipolo elétrico.

Exemplo 2.1. Traçado de linhas de campo utilizando Mathcad[®]

Considere-se como exemplo o traçado das linhas de campo de um par de cargas de sinais opostos, conforme ilustrado na Fig.2.4. Em um ponto do plano xy definido pelo vetor posição, $\vec{X} = r\hat{a}_r$, o vetor campo elétrico é obtido da soma vetorial,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{X} + d\hat{a}_x}{|\vec{X} + d\hat{a}_x|^3} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{X} - d\hat{a}_x}{|\vec{X} - d\hat{a}_x|^3} \right)$$

Utilizando-se a transposta da matriz de transformação dada pela Eq.(1.8), o vetor \hat{a}_x é posto na forma,

$$\hat{a}_x = \cos \phi \hat{a}_r - \sin \phi \hat{a}_\phi$$

resultando em

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(r+d \cos \phi)\hat{a}_r - d \sin \phi \hat{a}_\phi}{(r^2 + d^2 + 2rd \cos \phi)^{3/2}} \right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(r-d \cos \phi)\hat{a}_r + d \sin \phi \hat{a}_\phi}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \phi)^{3/2}} \right]$$

donde,

$$\frac{E_r}{E_\phi} = -\frac{1}{\sin \phi} \left[\cos \phi + \frac{r}{d} \frac{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \phi)^{3/2} - (r^2 + d^2 + 2rd \cos \phi)^{3/2}}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \phi)^{3/2} + (r^2 + d^2 + 2rd \cos \phi)^{3/2}} \right]$$

Utilizando-se a Eq.(2.6), com $dl_2=dr$; $dl_1=r d\phi$, resulta em

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{\sin \phi} \left[\cos \phi + \frac{r \left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \phi \right)^{3/2} - \left(r^2 + d^2 + 2rd \cos \phi \right)^{3/2}}{d \left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \phi \right)^{3/2} + \left(r^2 + d^2 + 2rd \cos \phi \right)^{3/2}} \right]$$

Dado um valor inicial r_i para a função r ; valores subseqüentes podem ser obtidos para pequenos incrementos $d\phi$, a partir da aproximação de Taylor,

$$r_{i+1} = r_i + dr \left(\frac{dr}{d\phi} \right)_i$$

onde os valores do primeiro membro são calculados iterativamente a partir de um dado valor inicial. A Fig.2.5 ilustra algumas linhas de campo calculadas com o emprego do aplicativo Mathcad® cujo código está mostrado no Quadro 2.1. Nesse cálculo, utilizou-se $d = 1$ e 400 pontos de iteração. Cinco linhas de campo no semi-plano $y \geq 0$ foram geradas no intervalo $5^\circ \leq \phi \leq 175^\circ$, a partir de valores iniciais, $\phi = 5^\circ$, $r = 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15$, respectivamente. Linhas de campo no semi-plano $y \leq 0$ são simétricas com respeito ao eixo x .

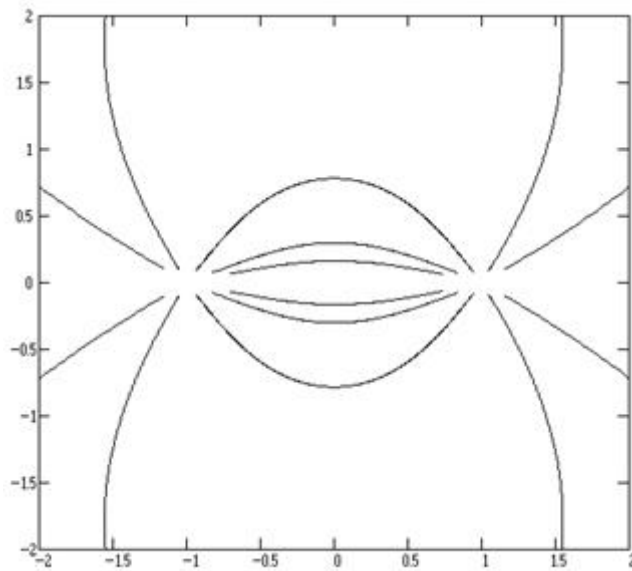


Fig.2.5 Linhas de campo para o dipólo elétrico

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Quadro 2.1 Código *Mathcad* correspondente ao Exemplo 2.1

Traçado de linhas de campo para o dipólo elétrico
 copyright by Eduardo Fontana, 1994
 Mathcad

$d := 1$

$N := 400$ Número de pontos

$k := 0 \dots 4$

Subscrito utilizado para denotar 5 pontos iniciais distintos

$i := 1..N+1$

Subscrito utilizado para calcular N pares de coordenadas

$\theta_0 := \frac{5}{180} \cdot \pi$

Valor inicial do azimute

$$\theta_1 := \pi - \theta_0 \quad \text{Valor final do azimute}$$

$$r_{0,k} := 0.1 \cdot k + 0.75 \quad \text{Valores iniciais para a variável } r$$

$$\delta\theta := \frac{\theta_1 - \theta_0}{N} \quad \text{Incremento da variável azimutal}$$

Calcula a variável azimutal na iteração de ordem i :

$$\theta_i := (i-1) \cdot \delta\theta + \theta_0$$

Calcula a variável r na aproximação em 1ª orde de Taylor :

$$r_{i,k} := r_{i-1,k} \left\{ 1 - \frac{\delta\theta}{\text{sen}\theta_{i-1}} \left\{ \cos\theta_{i-1} + \frac{\left[\left(r_{i-1,k}^2 + 1 - 2 \cdot r_{i-1,k} \cdot \cos\theta_{i-1} \right)^{3/2} - \left(r_{i-1,k}^2 + 1 + 2 \cdot r_{i-1,k} \cdot \cos\theta_{i-1} \right)^{3/2} \right]}{\left[\left(r_{i-1,k}^2 + 1 - 2 \cdot r_{i-1,k} \cdot \cos\theta_{i-1} \right)^{3/2} + \left(r_{i-1,k}^2 + 1 + 2 \cdot r_{i-1,k} \cdot \cos\theta_{i-1} \right)^{3/2} \right]} \right\} \right\}$$

Transforma coordenadas para o sistema xy e plota :

$$x_{i,k} := r_{i,k} \cdot \cos[\theta_i]$$

$$y_{i,k} := r_{i,k} \cdot \text{sen}[\theta_i]$$

2.1.3 O conceito de cargas distribuídas

No cálculo do campo eletrostático resultante de um grande número de cargas discretas, como por exemplo, aquelas compondo um meio macroscópico, é muitas vezes conveniente definir uma função densidade, que forneça uma medida da distribuição de cargas no meio em questão. Na Fig. 2.6, está ilustrado um elemento de volume diferencial com dimensões lineares pequenas comparadas com a escala de variação do campo, o que equivale a admitir que o volume diferencial esteja contido no interior de uma esfera de raio δ , tal que,

$$\delta \ll |\vec{X} - \vec{X}'| \quad (2.7)$$

onde \vec{X}' define o centro do elemento de volume, e \vec{X} define o ponto de observação. Por outro lado, para que se obtenha uma boa medida da quantidade de carga existente no interior do volume diferencial, é necessário que sua dimensão característica seja grande comparada com as distâncias inter-atômicas, de forma a conter um grande número de elementos de carga. O campo eletrostático gerado pelos elementos de carga contidos no volume diferencial pode ser obtido diretamente da Eq. (2.5),

$$d\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{X} - \vec{X}' + \vec{r}_i)}{|\vec{X} - \vec{X}' + \vec{r}_i|^3}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Com base na condição expressa pela Eq.(2.7), pode-se escrever,

$$|\vec{Y}_i| < \delta \ll |\vec{X} - \vec{X}'| \Rightarrow \vec{X} - \vec{X}' + \vec{Y}_i \approx \vec{X} - \vec{X}'$$

resultando em

$$d\vec{E}(\vec{X}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \sum_{i=1}^N q_i$$

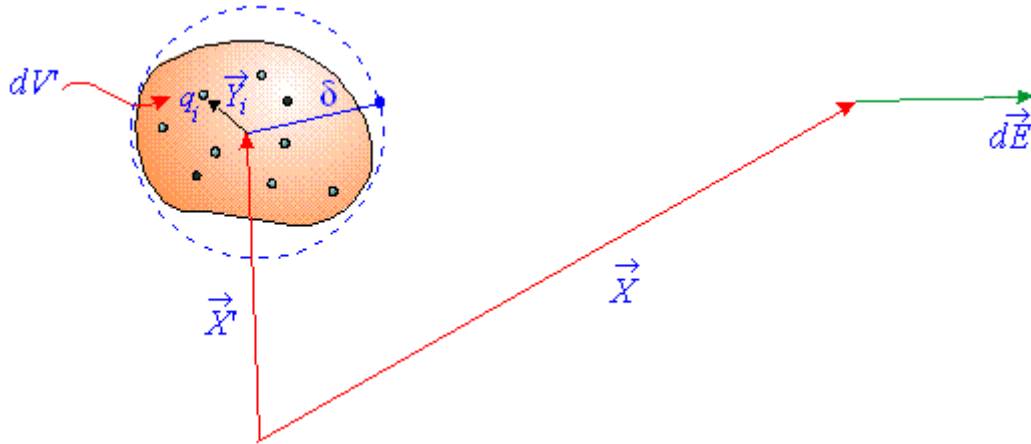


Fig.2.6. Geometria para determinação do campo produzido por um elemento diferencial de volume de um meio material.

Da última relação, a contribuição para o campo elétrico observado no ponto \vec{X} , depende da carga total contida no volume diferencial, mas independe de como essa carga esteja distribuída no volume. Conseqüentemente, pode-se assim definir uma função densidade de carga, tal que

$$\sum_{i=1}^N q_i = dq = \rho(\vec{X}') dV'$$

donde

$$\rho(\vec{X}') = \frac{dq}{dV'} \quad (\text{C/m}^3) \quad (2.8)$$

e o campo produzido pelo elemento diferencial é obtido de

$$d\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dV' \rho(\vec{X}') (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \quad (2.9)$$

O campo total produzido pelas cargas no volume V pode ser assim obtido integrando-se diretamente a Eq. (2.10), o que fornece,

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dV' \rho(\vec{X}') (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \quad (2.10)$$

situações, densidades superficial e linear de carga podem também ser respectivamente definidas, a partir das relações:

$$\rho_s(\vec{X}') = \frac{dq}{dS'} \quad (\text{C/m}^2) \quad (2.11)$$

$$\rho_l(\vec{X}') = \frac{dq}{dl'} \quad (\text{C/m}) \quad (2.12)$$

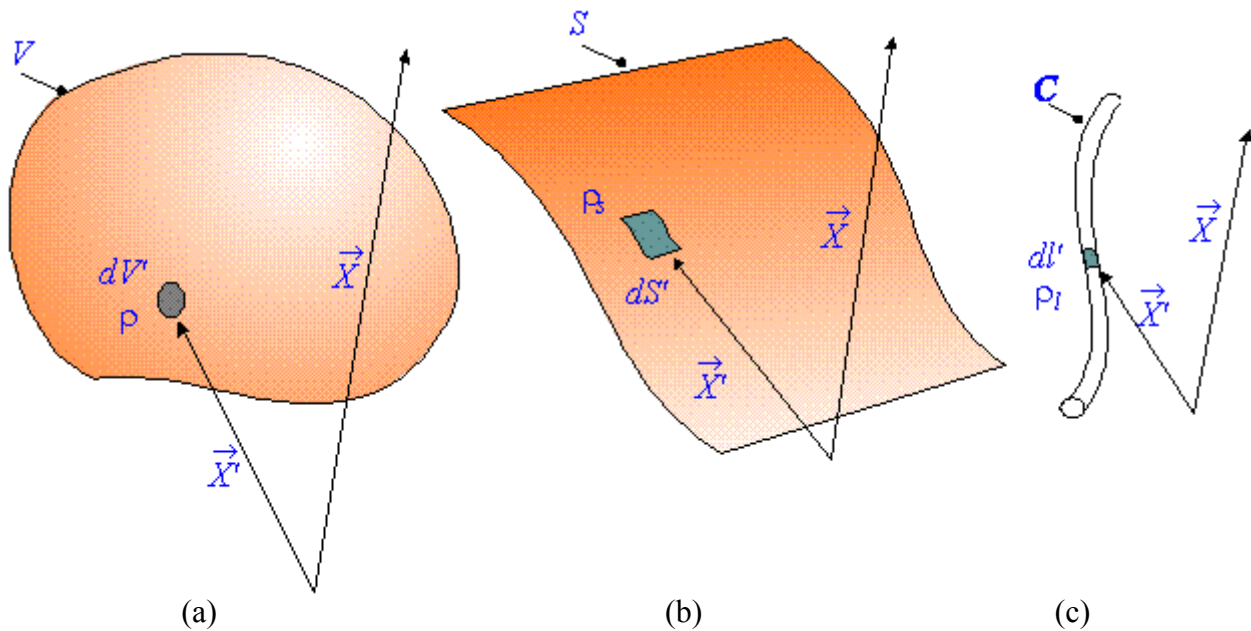


Fig.2.7. Geometria para o cálculo do campo elétrico para distribuições de carga, (a) volumétrica, (b) superficial e (c) linear.

Campos gerados pelas distribuições ilustradas nas Figs.2.7b e 2.7c podem ser expressos nas formas gerais:

- Distribuição superficial de cargas:

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS' \rho_s(\vec{X}') (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \quad (2.13)$$

- Distribuição linear de cargas:

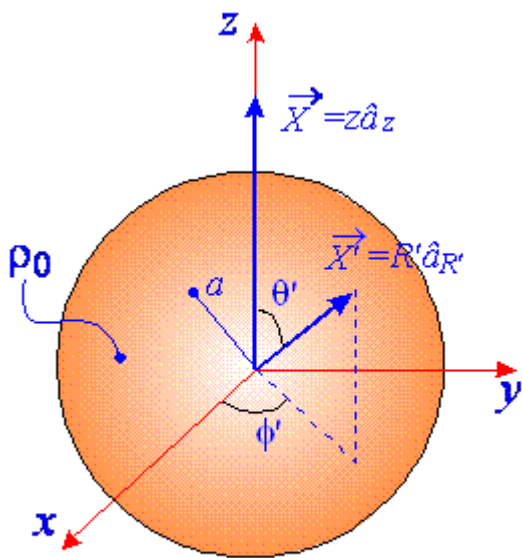
$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dl' \rho_l(\vec{X}') (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \quad (2.14)$$

Exemplo 2.2. Campo produzido por uma esfera exibindo distribuição uniforme de carga.

Considere-se uma esfera de raio a , uniformemente carregada com densidade de carga ρ_0 , conforme ilustrado na Fig.2.8. Se a carga total na esfera é Q , então a densidade uniforme é simplesmente,

$$\rho_0 = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}$$

O objetivo é determinar-se o campo eletrostático gerado por essa distribuição. Sem perda de generalidade, o ponto de observação é escolhido sobre o eixo z . Utilizando-se a Eq.(2.10), com $\vec{X} = z\hat{a}_z$ e $\vec{X}' = R'\hat{a}_{R'}$, vem



$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}}{|z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}|^3}$$

O elemento de volume em coordenadas esféricas é dado por,

$$dV' = R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

donde,

Fig.2.8. Esfera carregada com densidade uniforme.

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a R'^2 dR' \int_V d\theta' \sin \theta' \frac{z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}}{|z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}|^3}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Para resolver-se a integral, é necessário explicitar-se a dependência do vetor variável $\hat{a}_{R'}$, o que pode ser feito a partir de sua decomposição nos vetores de base do sistema xyz ,

$$\hat{a}_{R'} = \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x + \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + \cos \theta' \hat{a}_z$$

O denominador do integrando é obtido de,

$$|z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}|^3 = [(z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}) \cdot (z\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'})]^{3/2} = (z^2 + R'^2 - 2R'z \cos \theta')^{3/2}$$

Os termos do integrando, dependentes das funções periódicas $\sin \phi'$ e $\cos \phi'$, fornecem contribuição nula após integração no intervalo de um período completo dessas funções. Assim, o vetor campo elétrico assume a forma

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{a}_z \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a R'^2 dR' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \frac{(z - R' \cos \theta')}{(z^2 + R'^2 - 2R'z \cos \theta')^{3/2}}$$

A integração em θ' é realizada a partir da mudança de variáveis,

$$u = z^2 + R'^2 - 2R'z \cos \theta'$$

$$du = 2R'z \sin \theta' d\theta'$$

$$-R' \cos \theta' = \frac{u - z^2 - R'^2}{2z}$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow u = u_1 = (z - R')^2$$

$$\theta' = \pi \Rightarrow u = u_2 = (z + R')^2$$

donde,

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a R' dR' \int_{u_1}^{u_2} \frac{u + z^2 - R'^2}{u^{3/2}}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Resolvendo-se a integral na variável u , resulta em

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,z) &= \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a R' dR' \left[\frac{u - (z^2 - R'^2)}{u^{1/2}} \right]_{u_1}^{u_2} \\ &= \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a R' dR' \left[\frac{(z + R')^2 - (z^2 - R'^2)}{|z + R'|} - \frac{(z - R')^2 - (z^2 - R'^2)}{|z - R'|} \right] \end{aligned}$$

Para a integral em R' , note-se que o termo entre colchetes é da forma:

$$[] = \begin{cases} \left[\frac{(z + R')^2 - (z^2 - R'^2)}{(z + R')} - \frac{(z - R')^2 - (z^2 - R'^2)}{(z - R')} \right] = 4R', & \text{para } R' < z \\ \left[\frac{(z + R')^2 - (z^2 - R'^2)}{(z + R')} + \frac{(z - R')^2 - (z^2 - R'^2)}{(z - R')} \right] = 0, & \text{para } R' > z \end{cases}$$

logo,

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^z 4R'^2 dR'$$

Se o ponto de observação é exterior a esfera, $z > a \geq R'$, o que fornece

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a 4R'^2 dR' = \hat{a}_z \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 z^2}$$

Se o ponto de observação é interior a esfera vem

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{a}_z \frac{\rho_0}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^z 4R'^2 dR' = \hat{a}_z \frac{\rho_0 z}{3\epsilon_0}$$

Note-se que a escolha do eixo z é arbitrária, e o campo elétrico é radial a partir do centro da esfera. Conseqüentemente, sendo R a distância medida até o ponto de observação, a expressão geral para o campo reduz-se a,

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \hat{a}_R \quad , \quad R \leq a$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad , \quad R > a$$

É importante observar-se que o campo pode ser representado em ambas as situações na forma,

$$\vec{E} = \frac{q_{env}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

onde q_{env} é a carga total envolvida por uma esfera imaginária de raio R . A carga envolvida em termos da densidade de carga é dada por,

$$q_{env} = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} \quad , \quad \text{para } R \leq a$$

$$q_{env} = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} = Q \quad , \quad \text{para } R \geq a$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

exteriores.

Na Fig.2.9, está ilustrada a dependência em R da componente E_R . Note-se que a dependência é linear para pontos no interior da esfera, variando inversamente com o quadrado da distância para pontos

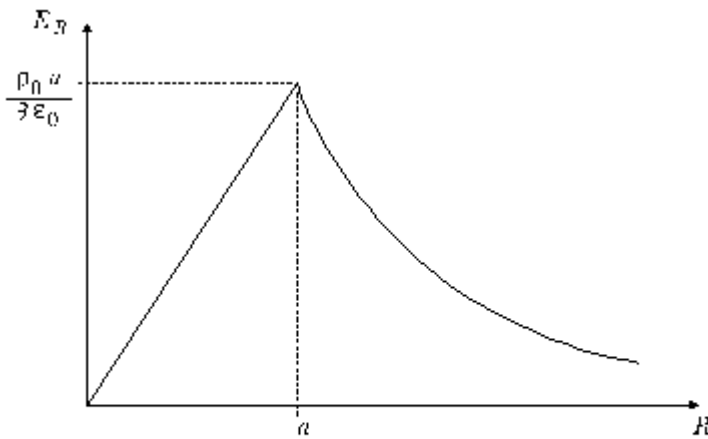


Fig.2.9 Dependência funcional da componente radial do campo eletrostático produzido por uma esfera de raio a , carregada uniformemente

2.2 Lei de Gauss para o Campo Elétrico

2.2.1 Fluxo elétrico através de uma superfície fechada

A natureza central e a dependência com o inverso do quadrado da distância, do campo eletrostático, conforme previsto pela lei de Coulomb, implica em uma propriedade de conservação para o fluxo das linhas de campo elétrico através de uma superfície fechada.

Considere-se inicialmente uma carga

puntiforme q , localizada na origem de um sistema de coordenadas, interior a uma superfície fechada imaginária e de forma arbitrária, conforme ilustrado na Fig.2.10a. No vácuo, o fluxo elétrico Ψ_E para fora da região limitada por essa superfície é definido pela relação,

$$\Psi_E = \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.15)$$

Em um ponto sobre a superfície, definido pelo vetor posição $\vec{X} = R\hat{a}_R$, o vetor campo elétrico é dado por,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{a}_R}{R^2},$$

resultando em

$$\Psi_E = \oint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi R^2} d\vec{S} \cdot \hat{a}_R = \oint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi R^2} dS_R,$$

onde $dS_R = d\vec{S} \cdot \hat{a}_R$, é a componente radial do vetor $d\vec{S}$ cuja magnitude corresponde àquela do elemento diferencial de área perpendicular ao vetor unitário \hat{a}_R . Em termos do elemento diferencial de ângulo sólido, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, ilustrado na Fig. 2.10a, pode-se escrever,

$$dS_R = R^2 d\Omega,$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

É importante observar-se que a partir da introdução do parâmetro $d\Omega$, a superfície fechada subtende um ângulo sólido total

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi$$

e portanto,

$$\Psi_E = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega = q$$

o que implica na seguinte lei de conservação para as linhas de campo eletrostático,

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad (2.16)$$

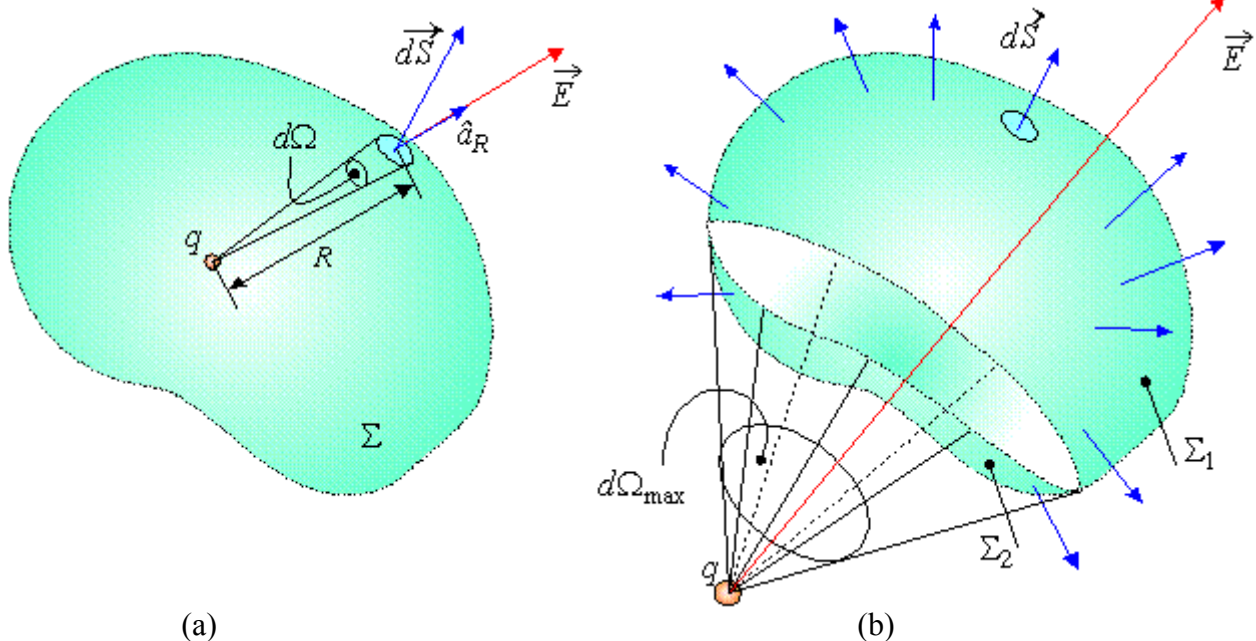


Fig.2.10 (a) Carga envolvida por uma superfície imaginária e geometria utilizada para computar o fluxo elétrico através da superfície. (b) Determinação do fluxo elétrico quando a carga é exterior ao volume limitado pela superfície.

Ou seja, independentemente da localização da carga e do formato da superfície que encerra essa carga, o fluxo elétrico é sempre igual ao valor da carga envolvida pela superfície. A questão a se considerar a partir da propriedade obtida da Eq.(2.16), é a seguinte: o que ocorreria se a carga envolvida fosse colocada na região exterior ao volume limitado pela superfície? Note-se que para responder a essa questão, não basta atribuir-se o valor $q = 0$ na Eq.(2.16), pois isso poderia implicar a não existência de um campo elétrico, levando-se a conclusão óbvia de um fluxo elétrico líquido nulo. Para analisar-se essa questão considere-se o cálculo da Eq.(2.15), para a situação ilustrada na Fig.2.10b. A superfície fechada é dividida em duas superfícies Σ_1 e Σ_2 . Sobre Σ_1 o produto escalar do integrando da Eq.(2.15) é sempre positivo, sendo sempre negativo sobre Σ_2 , logo,

$$\Psi_E = \int_{\Sigma_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS_R - \int_{\Sigma_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS_R$$

que em termos do ângulo sólido pode ser posto na forma,

$$\Psi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{\Omega_{\max}} d\Omega_1 - \int_0^{\Omega_{\max}} d\Omega_2 \right) = 0$$

onde a última relação decorre do fato de termos um mesmo ângulo sólido Ω_{\max} , subtendido por ambas as superfícies, conforme ilustrado na Fig.2.10b. Ou seja:

- ***O fluxo elétrico para o exterior da região limitada por uma superfície fechada é igual a carga envolvida por essa superfície, com cargas exteriores não exercendo qualquer influência na determinação do fluxo***

Esse resultado pode ser generalizado para o caso de um número arbitrário de cargas discretas, pela aplicação direta do princípio da superposição. Para isso considere-se a situação ilustrada na Fig.2.11a, onde existe um conjunto de N cargas, com as N_1 primeiras limitadas pela superfície Σ , e as $(N - N_1)$ subseqüentes, localizadas no exterior do volume limitado pela mesma superfície. O campo total gerado pelo conjunto de N cargas é dado por,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

onde \vec{E}_i é o campo produzido pela carga q_i . O fluxo elétrico através de Σ é dado por,

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} \sum_{i=1}^N \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{S} + \sum_{i=N_1+1}^{N-N_1} \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A segunda soma corresponde ao fluxo elétrico devido as cargas exteriores à superfície Σ , sendo portanto nulo. A primeira soma, corresponde à carga total líquida limitada pela superfície Σ , e de acordo com a Eq.(2.16),

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N_1} q_i = \text{Carga total envolvida} \quad (2.17)$$

É importante observar-se que no primeiro membro da Eq.(2.17), o campo elétrico que aparece no integrando é o campo total produzido pelas N cargas, sejam elas internas ou externas.

Se a carga está distribuída continuamente com densidade em um volume V , conforme ilustrado na Fig.2.11b, então a Eq.(2.17) pode ser posta na forma,

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{X}') dV' \quad (2.18)$$

onde o volume de integração no segundo membro, é aquele limitado pela superfície Σ , conforme ilustrado na Fig.2.11b. As Eqs.(2.17) e (2.18) são as formas da lei de Gauss para distribuições discreta e contínua, respectivamente.

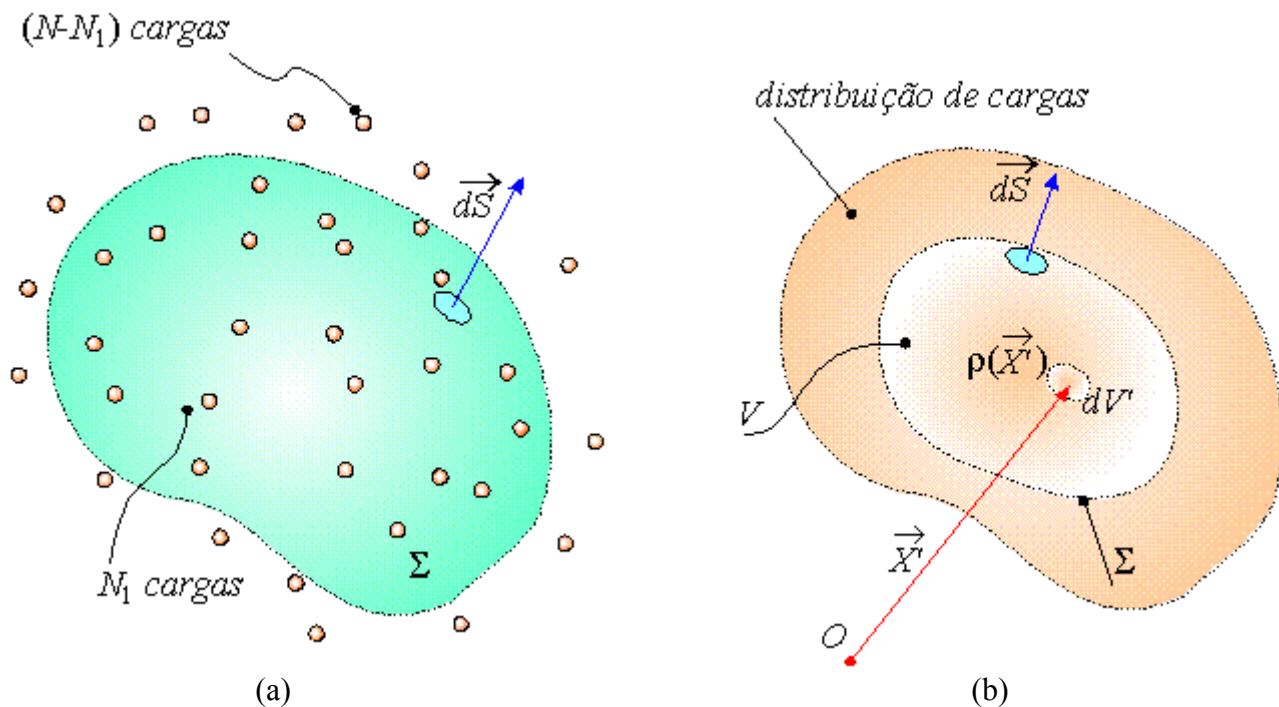


Fig.2.11. Aplicação da lei de Gauss para:(a) distribuição discreta de cargas; (b) distribuição contínua de cargas.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.2.2 Determinação de campos através da Lei de Gauss

Na presente seção são examinadas algumas situações favoráveis a determinação de campos através da lei de Gauss. Nessa formulação quer-se determinar o campo elétrico a partir da Eq. (2.18), para uma dada distribuição de cargas ρ . Uma vez que o campo eletrostático aparece no integrando da Eq.(2.18), sua determinação só será possível quando a componente normal à superfície for constante, permitindo assim extrair-se aquela componente do integrando da Eq. (2.18). Situações dessa natureza ocorrem, em geral, quando a distribuição de carga exibe um alto grau de simetria.

Assim, o emprego dessa formulação, requer obtenção *a priori*, de respostas as seguintes questões:

- Quais componentes de campo estão presentes?

- De que coordenadas o campo depende?

Exemplo 2.3. Campo de uma esfera uniformemente carregada.

Considere-se novamente o exemplo da esfera de raio a , onde o campo elétrico foi determinado no Exemplo 2.2 pelo uso da Eq.(2.14). Para determinar-se de que coordenadas as componentes de campo dependem, analisa-se inicialmente a simetria da distribuição. Como a função densidade possui simetria esférica, i.e., a função densidade é independente das coordenadas angulares, pode-se definir um sistema de coordenadas com centro coincidente com o centro da esfera. Nesse sistema, qualquer operação de rotação em torno de qualquer eixo passando pelo centro da esfera, não modifica a distribuição de carga. A partir dessa operação de simetria, conclui-se que as componentes do vetor campo elétrico só devem depender da distância R ao centro da esfera. Sabe-se também que esse tipo de configuração produz um campo com uma componente radial apenas. Conseqüentemente, o campo eletrostático deve ser do tipo,

$$\vec{E} = E_R(R)\hat{a}_R$$

A próxima etapa é determinar-se uma superfície Gaussiana sobre a qual a componente normal do campo seja constante. Como o campo é radial e só depende da variável R , a superfície deve satisfazer a equação $R = ct\theta$, que corresponde a superfície de uma esfera. Se a superfície Gaussiana é tal que, $R \leq a$, a Eq.(2.18) conduz a:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \epsilon_0 E_R(R) \hat{a}_R \cdot R^2 \hat{a}_R = \int_{R \leq a} \rho(\vec{X}') dV' \\ \therefore \epsilon_0 R^2 E_R(R) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho_0 R'^2 dR' \\ \therefore 4\pi \epsilon_0 R^2 E_R(R) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho_0 R'^2 dR' = 4\pi \rho_0 \int_0^R R'^2 dR' = 4\pi \rho_0 \frac{R^3}{3} \\ E_R(R) &= \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Se $R \geq a$, a integral de volume é realizada sobre toda a esfera de raio a , resultando em

$$\begin{aligned} 4\pi \epsilon_0 R^2 E_R(R) &= 4\pi \rho_0 \int_0^a R'^2 dR' \\ \Rightarrow E_R(R) &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

Essas expressões são idênticas àquelas obtidas no Exemplo 2.2, através do princípio da superposição que envolve uma maior manipulação algébrica.

Exemplo 2.4 Campo eletrostático para um fio retilíneo uniformemente carregado.

Considere-se um fio retilíneo infinitamente longo, com carga uniformemente distribuída com densidade linear ρ_l (C/m). Para essa distribuição é importante observar-se que o sistema de coordenadas que mais se adapta a simetria do problema é o cilíndrico, devido a própria forma cilíndrica do fio retilíneo. A escolha mais adequada para o eixo de simetria do sistema é aquela coincidente com o eixo do fio, conforme ilustrado na Fig.2.12. Nesse sistema de coordenadas, pode-se extrair as seguintes observações:

- Como o fio é infinitamente longo, não importa em que plano transversal do fio esteja localizado o plano xy , o que implica na existência de simetria de translação ao longo da direção z . Assim, as componentes de campo que existirem independem da variável z , uma vez que a distribuição é inalterada perante translação ao longo dessa direção.
- Rotações arbitrárias no ângulo ϕ , também não alteram a distribuição de carga, indicando também que as componentes presentes do campo independem dessa variável.
- As componentes do campo devem portanto depender apenas da variável r :

Para determinação das componentes de campo presentes pode-se, por exemplo, aplicar o princípio da superposição, na forma ilustrada na Fig.2.12. Como pode ser aí observado, o campo resultante da contribuição de um par de elementos de carga, localizados simetricamente com respeito ao plano xy é dirigido no sentido do vetor \hat{a}_r . Pode-se portanto decompor toda a distribuição em pares de cargas diferenciais, simetricamente localizados em relação ao plano xy , e concluir-se que o campo elétrico resultante é da forma

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{a}_r$$

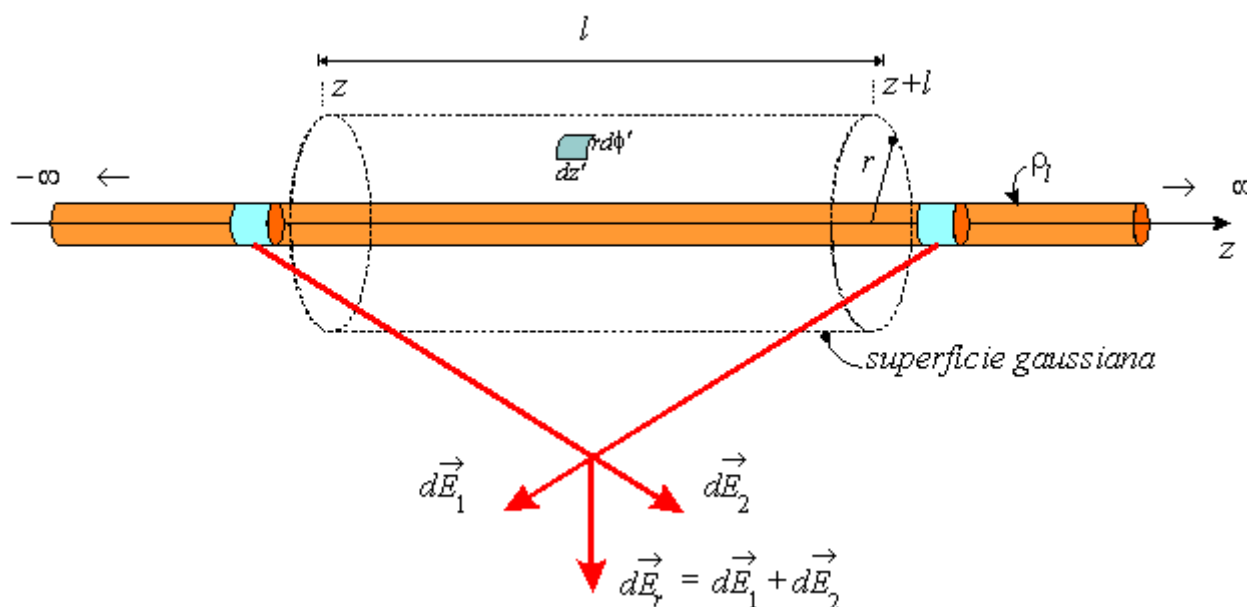


Fig.2.12 Geometria utilizada para a determinação do campo eletrostático de um filamento retilíneo infinitamente longo através da lei de Gauss.

A partir dessas considerações, conclui-se que a superfície gaussiana apropriada para a geometria do problema deve ser da forma, $r = cte$. Escolhendo-se uma seção longitudinal de

comprimento l de uma superfície cilíndrica, conforme ilustrado na Fig.2.12 e notando-se que o fluxo elétrico só existe através dessa superfície, a aplicação da Eq.(2.18) resulta em

$$\int_{r=\text{cte}} \epsilon_0 E_r(r) \hat{a}_r \cdot dS \hat{a}_r = \int_{r' < r} \rho' dV' \rightarrow \int_z^{z+l} \rho_l dz'$$

Sobre a superfície cilíndrica, $dS = r d\phi' dz'$, e conseqüentemente,

$$\epsilon_0 E_r(r) r \int_0^{2\pi} d\phi' \int_z^{z+l} dz' = \int_z^{z+l} \rho_l dz' = \rho_l l$$

donde,

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

Com base na lei de Gauss para o campo eletrostático, e utilizando-se considerações semelhantes àsquelas descritas anteriormente, pode-se mostrar que o campo eletrostático produzido pelo plano infinito com carga uniformemente distribuída com densidade superficial ρ_s , ilustrado na Fig.2.13, é constante acima ou abaixo do plano, e dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} \hat{a}_z \right), \quad z \neq 0$$

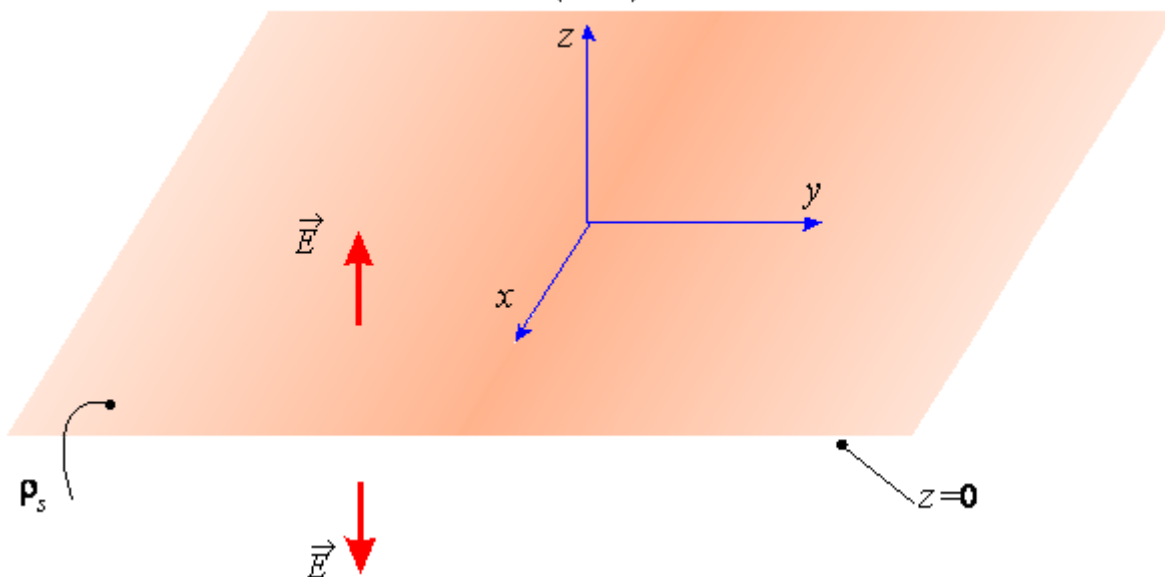


Fig.2.13 Geometria utilizada para a determinação do campo eletrostático do plano infinito uniformemente carregado.

2.3. Potencial Eletrostático

2.3.1 Definição da função potencial

Considere-se a Eq.(2.10) para o campo produzido por uma distribuição de cargas suspensas no vácuo,

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dV' \rho(\vec{X}') (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \quad (2.10)$$

onde deve-se notar que as variáveis de integração são aquelas relacionadas ao vetor posição \vec{X}' , que define a localização do elemento diferencial de carga no volume de integração. Considerando-se o fator no integrando,

$$\frac{\vec{X} - \vec{X}'}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

nota-se que este pode ser obtido da operação,

$$\frac{\vec{X} - \vec{X}'}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

onde o operador $\vec{\nabla}$ atua sobre as coordenadas do vetor posição \vec{X} . Portanto, a Eq.(2.10) pode ser reescrita na forma,

$$\vec{E}(\vec{X}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{X}') \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

ou ainda,

$$\vec{E}(\vec{X}) = -\vec{\nabla} \left[\int_V dV' \left(\frac{\rho(\vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} \right) \right] \quad (2.19)$$

A Eq.(2.19) indica que o campo eletrostático pode ser obtido do gradiente de uma função escalar. Essa função escalar é a **função potencial eletrostático** resultante da distribuição de cargas, e dada por,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V dV' \left(\frac{\rho(\vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} \right) \quad (2.20)$$

No sistema SI, a função potencial é medida em $\text{N}\times\text{m}/\text{C}$ que é a denominação do **Volt** nesse sistema. Note-se que a adição de uma constante arbitrária no segundo membro da Eq.(2.20) não altera o valor do campo elétrico obtido da Eq.(2.19). Conseqüentemente, a função potencial é definida a menos de uma constante. Essa constante pode ser definida estabelecendo-se uma referência para o potencial em um ponto ou superfície no espaço. Para distribuições físicas, isto é, distribuições que podem ser localizadas no interior de um volume finito, uma referência de potencial nulo é geralmente imposta para pontos arbitrariamente afastados da distribuição.

Devido a natureza escalar da função potencial, o problema de determinação do campo de uma distribuição de cargas, é simplificado com o auxílio dessa função, pois a integração vetorial presente na Eq.(2.10), que envolve a obtenção de três componentes vetoriais é eliminada, dando lugar a uma única integração escalar, como expresso pela Eq.(2.20). Como demonstra a Eq.(2.19), obtida a função potencial, o vetor campo elétrico pode então ser determinado da relação

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.21)$$

Por exemplo, para uma carga puntiforme q , pode-se utilizar a Eq.(2.20), com

$$\int_V \rho(\vec{X}') dV' = q$$

e notando-se que $|\vec{X} - \vec{X}'|$ é constante sobre a região ocupada pela carga puntiforme, obtém-se

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|}$$

onde \vec{X}' define a posição da carga q , e \vec{X} corresponde ao ponto de observação. Portanto, **para uma carga puntiforme, o potencial eletrostático é inversamente proporcional a distância medida desde a carga até o ponto de observação.**

Para um conjunto de N cargas discretas, com a i -ésima carga localizada no ponto \vec{X}_i , o potencial total pode ser obtido pela soma das contribuições individuais, na forma,

$$\Phi(\vec{X}) = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}_i|} \quad (2.22)$$

2.3.2 Diferença de potencial e circulação do campo eletrostático

O potencial eletrostático é formado pela superposição de funções que, excluídos os pontos de singularidade, assumem valores bem definidos em cada ponto do espaço, conforme demonstram as Eqs. (2.20) e (2.22). Conseqüentemente, estabelecido um valor de referência, o potencial eletrostático é univocamente especificado.

Considere-se um caminho arbitrário C_1 ligando dois pontos P_1 e P_2 conforme ilustrado na Fig.2.13, a **diferença de potencial** entre esses dois pontos pode ser obtida de

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} (-\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{l} = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\Phi}{\partial l} dl = - \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -(\Phi_2 - \Phi_1)$$

donde,

$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.23)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Na Eq.(2.23), Φ_1 e Φ_2 são os valores assumidos pela função potencial nos pontos P_1 e P_2 , respectivamente. A unicidade da função potencial em cada ponto do espaço implica que a integral de linha no segundo membro da Eq.(2.23) independe da escolha da curva conectando os pontos P_1 e P_2 . Conseqüentemente, se for escolhido o caminho fechado formado pela união de C_1 e C_2 conforme ilustrado na Fig.2.13, tem-se que

$$\int_{C_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\Phi_2 - \Phi_1) - (\Phi_1 - \Phi_2) = 0$$

ou equivalentemente,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.24)$$

A Eq.(2.24), indica que o campo eletrostático possui circulação nula, Esse era um resultado esperado em vista de o campo elétrico ser uma grandeza vetorial derivada do gradiente de uma função escalar.

Em resumo:

As Eqs.(2.18) e (2.24) descrevem o comportamento básico do campo eletrostático de cargas no vácuo e correspondem as Eqs. de Maxwell para a eletrostática no vácuo, na forma integral.

Com base nas propriedades da operação gradiente, conclui-se que as linhas de campo são sempre perpendiculares as **superfícies equipotenciais** e que o vetor campo elétrico tem magnitude igual a máxima taxa de variação da função potencial, sendo dirigido no sentido de diminuição do valor dessa função no ponto considerado.

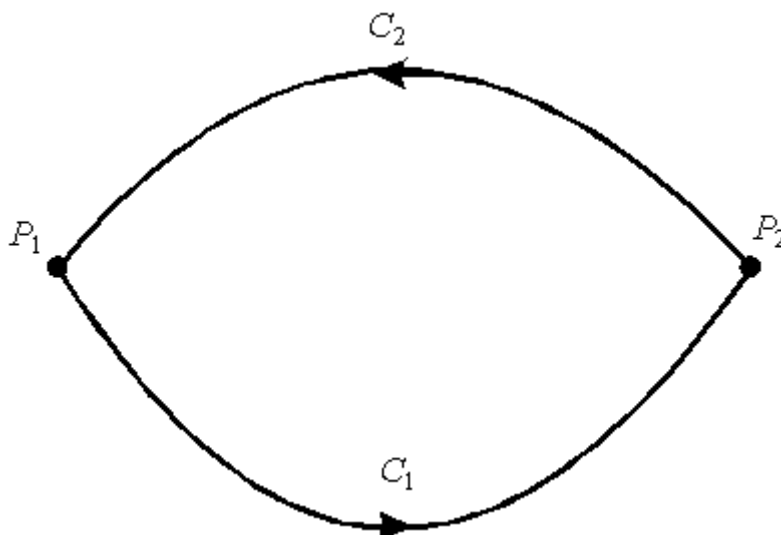


Fig.2.14 Caminho fechado utilizado para o cálculo da circulação do campo elétrico

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.3.3 Energia potencial de uma carga puntiforme em uma região de campos

A função potencial tem uma relação direta com a energia de interação entre cargas e campos. Considere-se uma região onde existe um campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Quer-se computar a energia de uma carga de teste em um ponto dessa região. Para isso imagina-se que um agente externo fictício traga essa carga de um ponto distante, onde a carga não interage com o campo, até o ponto de localização final, seguindo, por exemplo, a trajetória definida pela curva C ilustrada na Fig.2.14. Para computar-se corretamente a energia, o agente externo deve trazer a carga em movimento uniforme, isto é, imprimindo uma força \vec{F}_{ext} de forma a equilibrar a força elétrica \vec{F}_E devida ao campo \vec{E} , em todos os pontos da trajetória. Dessa forma, o trabalho realizado pelo agente fictício deverá corresponder a energia adquirida pela carga de teste para ser posta na região de campo. A condição de equilíbrio de forças ao longo da trajetória pode ser posta na forma

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_E = -q\vec{E}$$

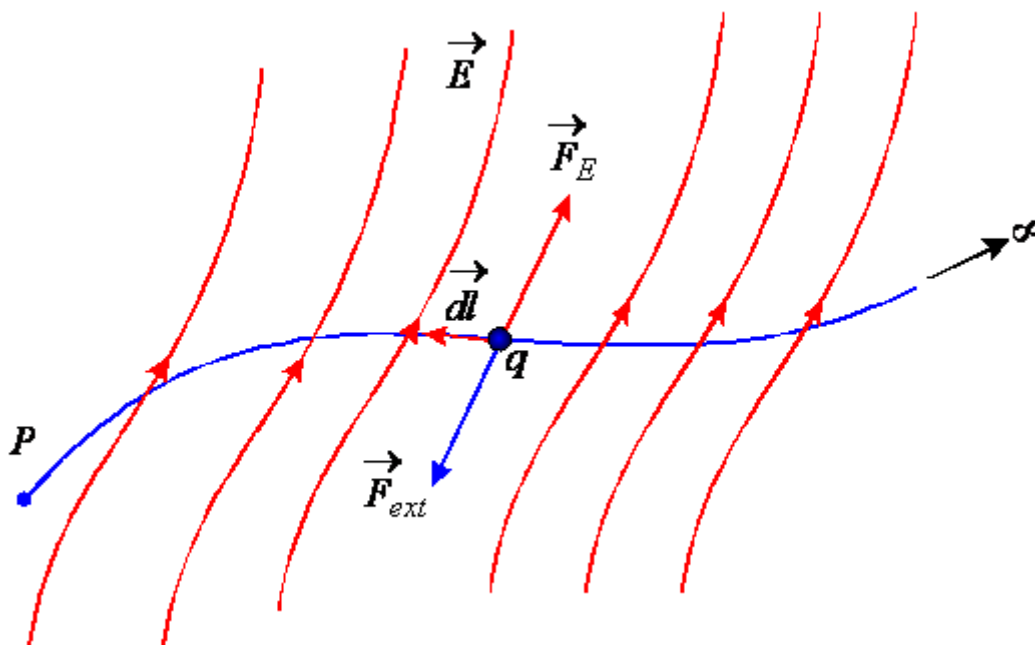


Fig.2.15. Geometria utilizada no cálculo da energia potencial de uma carga discreta em uma região de campo.

O trabalho realizado pelo agente externo, ou equivalentemente, a energia adquirida pela carga, é obtida de,

$$W_{ext} = \int_{\infty}^P \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^P \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\Phi_P$$

donde,

$$\Phi_P = \frac{W_q}{q} \quad (2.25)$$

A Eq.(2.25) mostra que a função potencial resultante de uma dada distribuição de cargas, calculada em um ponto no espaço, corresponde a energia que seria adquirida por uma carga unitária ao ser trazida àquele ponto.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.3.4 Energia potencial de uma distribuição de cargas

Considere-se a questão de determinação da energia de interação associada a um conjunto de cargas discretas. Admite-se que a configuração final consiste de N cargas discretas, com a carga q_i desse conjunto localizada no ponto \vec{X}_i . Para determinar-se a energia de interação, seja inicialmente a carga q_1 localizada em sua posição final no conjunto, e o cálculo do trabalho realizado por um agente externo fictício para trazer a carga q_2 até a sua posição final, próxima de q_1 . Com base na Eq.(2.25), essa energia é dada por,

$$U = W_{12} = q_2 \Phi_{12}$$

onde

$$\Phi_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X}_2 - \vec{X}_1|}$$

é o potencial eletrostático produzido pela carga q_1 na posição da carga q_2 . Note-se que,

$$W_{12} = W_{21}$$

e portanto essa primeira contribuição para a energia pode ser escrita na forma,

$$U = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} (q_2 \Phi_{12} + q_1 \Phi_{21})$$

Continuando-se com esse processo, e trazendo-se a carga q_3 para sua posição final na distribuição, a expressão para U se torna,

$$U = W_{12} + W_{13} + W_{23} = \frac{1}{2} (q_2 \Phi_{12} + q_1 \Phi_{21}) + \frac{1}{2} (q_3 \Phi_{13} + q_1 \Phi_{31}) + \frac{1}{2} (q_3 \Phi_{23} + q_2 \Phi_{32})$$

podendo ser posta na forma,

$$U = \frac{1}{2} [q_1 (\Phi_{21} + \Phi_{31}) + q_2 (\Phi_{12} + \Phi_{32}) + q_3 (\Phi_{13} + \Phi_{23})]$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Uma inspeção dessa última expressão permite identificar cada fator como o produto de uma das cargas do conjunto com o potencial eletrostático produzido pelas demais. Conseqüentemente, se esse procedimento for estendido para formar-se a configuração final de N cargas, obtém-se,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i \quad (2.26)$$

onde Φ_i é o potencial eletrostático calculado sobre a carga q_i devido as demais cargas no conjunto. A Eq.(2.26) representa a energia de interação entre as N cargas, e exclui termos de auto-energia, i.e., termos de interação da carga com o campo produzido por ela própria.

O resultado obtido para um conjunto de cargas discretas pode ser generalizado para uma distribuição contínua de cargas, pelas substituições,

$$q_i \rightarrow \rho(\vec{X}') dV', \quad \Phi_i \rightarrow \Phi(\vec{X}'), \quad \sum_i \rightarrow \int_V$$

resultando em,

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV' \rho(\vec{X}') \Phi(\vec{X}') \quad (2.27)$$

Exemplo 2.6: Energia potencial de uma esfera uniformemente carregada

Considere-se a determinação da energia elétrica necessária à formação da distribuição uniforme de cargas no interior da esfera de raio a , considerada no Exemplo 2.2. Para utilização da Eq.(2.27), o potencial eletrostático no interior da distribuição deve ser inicialmente determinado. Sem perda de generalidade, essa função pode ser calculada em um ponto sobre o semi-eixo $z > 0$, a uma distância R da origem. Utilizando-se a Eq.(2.20),

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a R'^2 dR' \int_0^\pi \frac{d\theta' \sin \theta'}{|R\hat{a}_z - R'\hat{a}_{R'}|} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a R'^2 dR' \int_0^\pi \frac{d\theta' \sin \theta'}{(R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \theta')^{1/2}}$$

Fazendo-se a substituição de variáveis utilizada no Exemplo 2.2,

$$u = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \theta',$$

vem,

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a R' dR' \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^{1/2}}$$

com, $u_1 = (R - R')^2$, $u_2 = (R + R')^2$. Realizando-se a integração na variável u , vem,

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R} \int_0^a R' dR' \left((R + R') - |R - R'| \right)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Se o potencial é calculado no exterior da distribuição, então $R > a$, e a função potencial assume a forma,

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R} \int_0^a 2R'^2 dR' = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 R},$$

que é a dependência característica com o inverso da distância. Se $R < a$, então, deve-se considerar o comportamento do integrando para $R' < R$ e $R' > R$. Para isso note-se que,

$$\left((R + R') - |R - R'| \right) = \begin{cases} 2R' & , \text{ para } R > R' \\ 2R & , \text{ para } R < R' \end{cases}$$

resultando em,

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R} \left(\int_0^R R'^2 dR' + R \int_R^a R'^2 dR' \right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 R} \left(\frac{R^3}{3} + \frac{R}{2} (a^2 - R^2) \right)$$

donde,

$$\Phi(R) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (3a^2 - R^2)$$

Devido a simetria esférica da distribuição, o potencial depende apenas da variável R , i.e., os resultados obtidos são válidos independentemente da escolha da direção z , no nosso sistema de coordenadas. Para calcular-se a energia, utiliza-se a Eq.(2.27), onde deve-se observar que a integração é realizada no volume da distribuição de carga, ou seja,

$$U = \frac{\pi\rho_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a (3a^2 - R'^2) R'^2 dR' = \frac{\pi\rho_0^2}{3\varepsilon_0} \int_0^a (3a^2 - R'^2) R'^2 dR'$$

$$U = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0} \tag{2.28a}$$

ou em termos da carga Q da esfera,

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a} \tag{2.28b}$$

A Eq.(2.28a) mostra que para uma distribuição contínua a energia tende a zero, se o volume da distribuição tender a um valor nulo. A Eq.(2.28b) serve para ilustrar o comportamento da auto-

energia de uma carga puntiforme, que seria obtida mantendo-se a carga Q em um valor finito, e fazendo-se $a \rightarrow 0$ o que resultaria em uma auto-energia infinita.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.4 Equações de Maxwell para a Eletrostática

2.4.1 Forma diferencial

A partir da lei de Coulomb, obtém-se as duas relações integrais representadas pelas Eqs. (2.18) e (2.24), transcritas a seguir,

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{X}) dV \quad (2.18)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.24)$$

que juntamente com a expressão para a força eletrostática sobre uma distribuição de carga, obtida da Eq.(2.3),

$$\vec{F} = \int_V dV \rho(\vec{X}) \vec{E}(\vec{X}) \quad (2.29)$$

são suficientes para descrever o comportamento de campos eletrostáticos, bem como a interação entre corpos carregados. Essas equações integrais para o campo \vec{E} são casos particulares das relações mais gerais obtidas por James Clerck Maxwell no final do Século 19, para descrever o comportamento de campos eletromagnéticos.

Como discutido anteriormente, o uso dessa formulação integral para determinação do vetor \vec{E} se restringe a situações onde as distribuições de carga apresentem um alto grau de simetria. Este é raramente o caso encontrado na prática, onde uma relação entre campo e fonte válida ponto a ponto é mais apropriada.

Para obter-se equações diferenciais, relacionando campo e fonte, considere-se a aplicação do teorema de Gauss [Eq.(1.46)] ao primeiro membro da Eq.(2.18),

$$\oint_{\Sigma} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) dV = \int_V \rho(\vec{X}) dV$$

Essa relação é independente da escolha do volume de integração. Em particular, para um volume diferencial dV ,

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) dV = \rho(\vec{X}) dV$$

resultando na **forma diferencial da lei de Gauss**,

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \quad (2.30)$$

A Eq.(2.30) mostra que a operação divergência realizada sobre o vetor $(\epsilon_0 \vec{E})$ em um dado ponto do espaço, indica a existência de carga naquele ponto, aqui representada localmente pela densidade volumétrica ρ .

Aplicando-se o teorema de Stokes [Eq.(1.48)] ao primeiro membro da Eq.(2.24), vem,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Como essa última relação é válida qualquer que seja a área de integração, o mesmo ocorrerá sobre uma área diferencial dS , o que fornece,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Nenhuma restrição foi imposta quanto a orientação do vetor área diferencial $d\vec{S}$. Logo, essa relação só poderá ser verificada se,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.31)$$

o que mostra que o **campo eletrostático é irrotacional**.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.4.2 Equação de Poisson

As Eqs.(2.30) e (2.31) são equações diferenciais que descrevem o campo eletrostático em cada ponto do espaço, podendo ser utilizadas para sua determinação, independentemente da geometria da distribuição de cargas. Essas equações podem ser resolvidas com o auxílio da função potencial. Para isso, note-se que o rotacional nulo do vetor \vec{E} , implica que esse pode ser derivado da função potencial Φ como já mostrado anteriormente na Eq.(2.21). Isso é também decorrência direta da identidade vetorial expressa pela Eq.(1.37), ou seja,

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi) = 0, \quad \forall \Phi$$

Substituindo a Eq.(2.21) na Eq.(2.30), tem-se que,

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \Phi) = -\rho$$

donde

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

que é a **Equação de Poisson**, válida para distribuições de cargas no vácuo. A solução dessa equação, no caso especial em que a distribuição de carga ρ está imersa em uma região ilimitada, é dada pela Eq.(2.20), essa última tendo surgido da própria definição e cálculo do potencial eletrostático produzido por uma distribuição de cargas. Métodos de solução da equação de Poisson em casos envolvendo não só a existência de distribuições de carga como também a presença de superfícies condutoras e meios materiais distintos na região de interesse, serão tratados no Capítulo 3.

2.4.3 Densidade de energia

Na Secção 2.3.4 obteve-se uma expressão para a energia elétrica associada a uma distribuição de cargas existindo no espaço sem fronteiras. A expressão aí obtida, envolvia uma integral volumétrica do produto das grandezas ρ e Φ , calculada sobre o volume da distribuição, ou seja, expressa sob o **ponto de vista da fonte do campo eletrostático**. Alternativamente, pode-se imaginar essa energia como estando distribuída no **espaço de existência do campo**. Para isso, considere-se a Eq.(2.27), que com o auxílio da Eq. (2.30), pode ser posta na forma,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \Phi \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) dV$$

utilizando-se a Eq.(1.31), com $f = \Phi$ e $\vec{A} = \epsilon_0 \vec{E}$, tem-se que,

$$\Phi \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \Phi \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

e utilizando-se a Eq.(2.21) vem,

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \Phi \vec{E}) + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}] dV$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Nessa última expressão, é importante observar que a integração é realizada em todo o espaço de existência do campo eletrostático. A integral pode ainda ser posta na forma,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \Phi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} dV$$

A primeira integral pode ser transformada em uma integral de superfície com base no teorema de Gauss, o que fornece,

$$U = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} dV$$

Para distribuições de carga existindo em uma região sem fronteiras, a superfície de integração que aparece no primeiro termo envolve todo o espaço de existência do campo. Portanto, essa superfície é tomada a uma distância $R \rightarrow \infty$, com R medido desde o centro da distribuição até um ponto sobre a superfície. Levando-se em conta que a distribuição é localizada, o potencial e campo elétrico para $R \rightarrow \infty$ assumem as respectivas formas assintóticas,

$$\Phi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

onde q é a carga total na distribuição. Com $dS_R = R^2 d\Omega$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 0$$

fornecendo portanto,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} dV \quad (2.33)$$

A Eq.(2.33) representa a energia elétrica estabelecida por uma distribuição de cargas, **expressa no ponto de vista do campo eletrostático**. Nesse ponto de vista, a energia é interpretada como estando distribuída em todo o espaço. De acordo com essa interpretação, pode-se definir uma **densidade de energia**,

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (J / m^3) \quad (2.34)$$

que permite associar regiões de alta ou baixa energia como aquelas exibindo campos de alta ou baixa magnitude, respectivamente.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Considere-se, por exemplo, a obtenção da energia associada a distribuição de cargas do Exemplo 2.6, com o emprego da Eq.(2.33). O campo em cada ponto do espaço, obtido do Exemplo 2.3, é dado por,

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \hat{a}_R, \quad R \leq a$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R, \quad R \geq a$$

Utilizando-se a Eq.(2.33) vem,

$$U = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0} \left[\int_0^a R^4 dR + a^6 \int_a^\infty \frac{1}{R^2} dR \right] = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0} \left(\frac{a^5}{5} + a^5 \right) = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

que corresponde ao resultado previsto pela Eq.(2.28a).

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.5 Eletrostática em Meios Materiais

2.5.1 Potencial e campo do dipolo elétrico

Um par de cargas de sinais opostos constitui um dipolo elétrico. Dipolos na matéria podem ser produzidos pela aplicação de um campo elétrico nos átomos ou moléculas constituintes, resultando em uma separação dos centros de cargas positiva e negativa correspondentes. Dipolos assim gerados, produzem campos que se superpõem ao campo externamente aplicado.

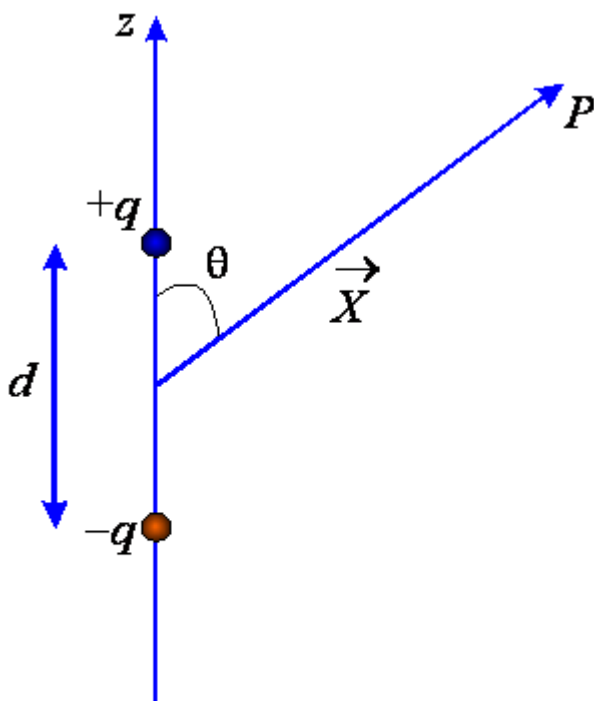


Fig.2.16. O dipolo elétrico

Em outros tipos de materiais, a configuração molecular de seus elementos constituintes é tal que os centros de cargas são intrinsecamente separados, dando origem a dipolos permanentes que existem independentemente da presença de um campo externo. Quando um campo externo é aplicado nesses materiais, os dipolos permanentes, inicialmente orientados desordenadamente, tendem a alinhar-se com o campo. Nesse processo o campo produzido pelo conjunto de dipolos é razoavelmente intenso, superpondo-se ao campo externo.

Em ambas as situações o campo em um meio material constituído de dipolos é diferente do campo externamente aplicado, devido ao campo de reação no material. Dessa forma, para determinar-se o campo no interior ou nas proximidades de um material constituído de dipolos, é necessário analisar as propriedades elétricas do elemento fundamental, eletricamente neutro,

aqui denominado de dipolo elétrico.

Com esse propósito considere-se o comportamento da função potencial e campo eletrostático para o dipolo elétrico ilustrado na Fig.2.16. O potencial no ponto P é obtido a partir

da Eq.(2.22),

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left| \vec{X} - \frac{d}{2} \hat{a}_z \right|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left| \vec{X} + \frac{d}{2} \hat{a}_z \right|}$$

e o campo elétrico é obtido da relação,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Uma situação de interesse prático ocorre quando a distância do ponto de observação à origem é grande comparada com a distância de separação entre cargas. Essa situação é típica daquela encontrada em meios materiais, onde a distância de separação é tipicamente menor do que uma dimensão atômica ou molecular, e a distância ao ponto de observação corresponde a escala macroscópica de variação das grandezas de campo. Reescrevendo-se a função potencial na forma,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(R^2 + \frac{d^2}{2} - (Rd) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z \right)^{-1/2} - \left(R^2 + \frac{d^2}{2} + (Rd) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z \right)^{-1/2} \right],$$

com o auxílio da variável auxiliar,

$$y_{\pm} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{d^2}{4} \pm (Rd) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z \right]$$

e com base na aproximação de Taylor em 1a. ordem

$$(1 + y_{\pm})^{-1/2} \approx 1 - \frac{y_{\pm}}{2},$$

válida para $|y_{\pm}| \ll 1$, vem

$$\Phi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{d^2}{4} - (Rd) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z \right) - 1 + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{d^2}{4} + (Rd) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z \right) \right)$$

donde,

$$\Phi_P \approx \frac{qd \hat{a}_z \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Define-se o momento de dipolo de uma distribuição de cargas pela expressão geral,

$$\vec{p} \equiv \int \rho(\vec{X}') \vec{X}' dV'$$

Para o caso das duas cargas discretas ilustradas na Fig.2.15, essa integral reduz-se a:

$$\vec{p} = qd \hat{a}_z,$$

e a função potencial pode ser reescrita na forma,

$$\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{a}_R}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad (2.35)$$

A Eq.(2.35) permite extrair as seguintes observações:

- Para uma carga puntiforme(monopolo elétrico), o potencial varia na proporção $1/R$
 - Para o dipolo elétrico, o potencial varia na proporção $1/R^2$
- O campo elétrico é obtido diretamente da Eq.(2.21) que em coordenadas esféricas é da forma:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left(\hat{a}_R \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{\hat{a}_\theta}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\hat{a}_\phi}{R\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)$$

que com o emprego da Eq.(2.35) resulta em

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{a}_R)\hat{a}_R - \vec{p}}{4\pi \epsilon_0 R^3} \quad (2.36)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Alguns valores específicos assumidos pelo campo em sub-regiões do espaço tridimensional estão ilustrados a seguir:

- No plano $z = 0$, $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$
- Sobre o semi-eixo $z > 0$, $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 R^3}$
- Sobre o semi-eixo $z < 0$, $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 R^3}$

As linhas de campo do dipólo elétrico podem ser traçadas em um plano contendo o eixo z , com base na formulação desenvolvida na Seção 2.1. Utilizando-se a Eq.(2.6), obtém-se,

$$\frac{dR}{Rd\theta} = \frac{E_R}{E_\theta} = 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

que resulta na equação diferencial,

$$\frac{dR}{R} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

A equação descrevendo o comportamento de cada linha de campo, é resolvida por integração direta da equação diferencial. Assumindo-se o valor inicial $R(\theta_0) = R_0$, resulta em

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{R} = \int_{\theta_0}^{\theta} 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) = 2 \ln \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)$$

donde

$$R = R_0 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \quad (2.37)$$

A forma assintótica do conjunto de linhas de campo, traçadas no plano contendo o eixo z , e obtidas da Eq.(2.37), está ilustrada na Fig.2.17.

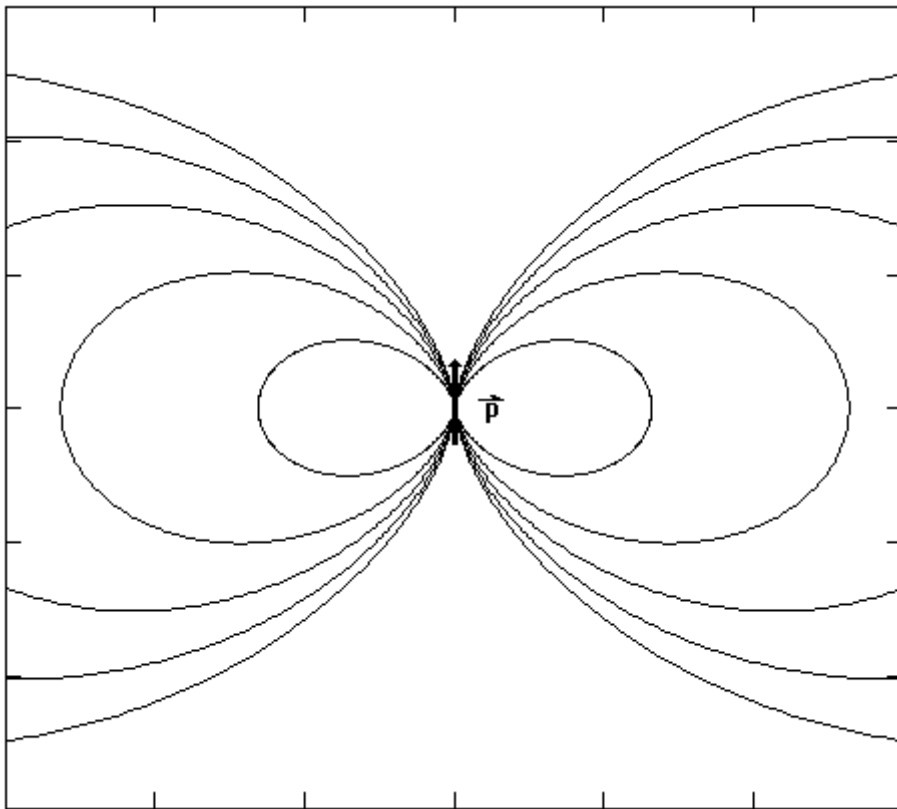


Fig.2.17. Linhas de campo para o dipolo elétrico obtidas a partir da Eq.(2.37)

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.5.2. Energia de interação entre campo e dipolo elétrico

Considere-se um dipolo elétrico imerso em uma região de campo, conforme ilustrado na Fig.2.18. A energia de interação entre campo e dipolo pode ser obtida diretamente a partir da

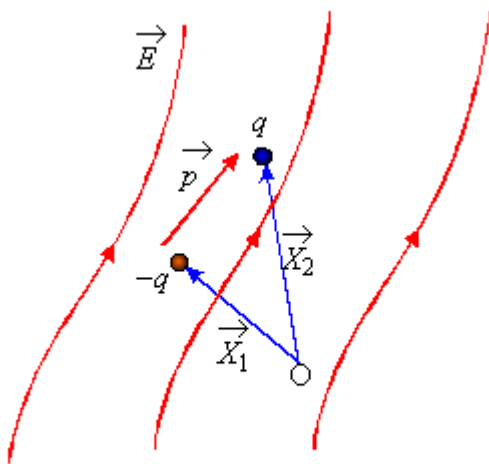


Fig.2.18 Dipólo elétrico em uma região de campo.

interpretação física da função potencial. A expressão, a ser obtida, serve para elucidar a compreensão de fenômenos de interação de meios materiais com campos eletromagnéticos.

Na geometria da Fig.2.18, admite-se que o campo elétrico é derivado da função potencial Φ . A energia de interação U , é a soma das energias potenciais das duas cargas que compõem o dipólo,

$$U = q\Phi(\vec{X}_2) - q\Phi(\vec{X}_1) = q[\Phi(\vec{X}_2) - \Phi(\vec{X}_1)]$$

Assumindo-se que a função potencial varie pouco sobre a distância de separação entre as cargas, pode-se utilizar a aproximação de Taylor em 1ª. ordem,

$$\Phi(\vec{X}_2) - \Phi(\vec{X}_1) \approx \nabla\Phi \cdot (\vec{X}_2 - \vec{X}_1)$$

o que fornece

$$U = \nabla\Phi \cdot q(\vec{X}_2 - \vec{X}_1) = -\vec{E} \cdot q(\vec{X}_2 - \vec{X}_1) = -\vec{p} \cdot \vec{E},$$

ou equivalentemente,

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.38)$$

Da Eq.(2.38) nota-se que:

- A energia é mínima quando o dipólo está alinhado com o campo.
- A energia é máxima quando campo e dipólo são antiparalelos

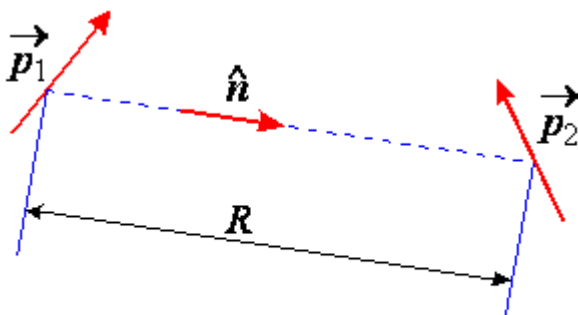


Fig.2.19. Dipolos separados por uma distância R .

Assim, a tendência natural do dipolo elétrico é a de orientar-se no sentido do campo aplicado, pois esta é a condição em que a energia de interação é minimizada.

Pode-se determinar a energia de interação entre dois dipolos a partir das Eqs.(2.36) e (2.38). Considerando-se a configuração ilustrada na Fig.2.19, é fácil mostrar que a energia de interação é da

forma,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \vec{n})(\vec{p}_2 \cdot \vec{n}) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad (2.39)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.5.3. Campo de uma distribuição de dipolos - Vetor polarização

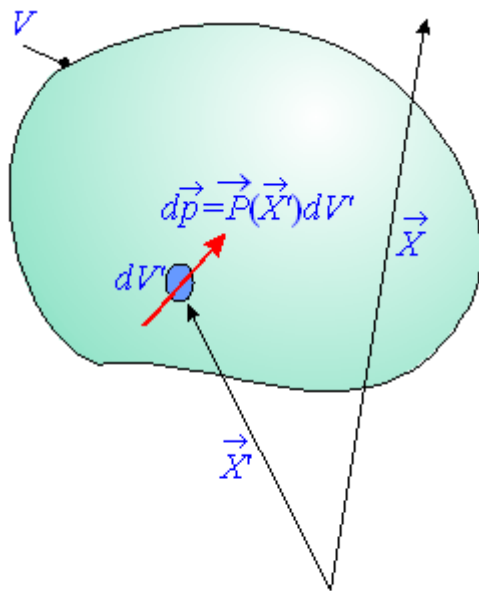


Fig.2.20 Geometria para a determinação do campo da matéria polarizada.

Considere-se o caso mais geral de uma distribuição de dipolos em um determinado volume V , conforme ilustrado na Fig.2.20. Esta é a situação obtida, por exemplo, em meios materiais isolantes neutros, cujo efeito elétrico predominante é aquele de seus dipolos constituintes. Apesar da natureza discreta da estrutura da matéria, do ponto de vista macroscópico pode-se assumir que os dipolos estejam distribuídos continuamente no interior do volume V . Sob esse ponto de vista, utiliza-se a descrição usual para o volume diferencial de um meio material, ou seja, ele deve ser grande comparado com distâncias interatômicas, e ainda assim pequeno comparado com a escala típica de variação das grandezas que definem o campo eletrostático.

Para computar-se o momento de dipolo líquido em um dado volume diferencial dV' do material localizado no vetor posição \vec{X}' , introduz-se o **vetor polarização** \vec{P} , definido pela relação:

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{X}')dV' \quad (2.40)$$

Da definição dada pela Eq.(2.40), pode-se notar que a unidade SI dessa grandeza é o C/m^2 . Dessa expressão, dado dV' e o valor do vetor polarização, obtém-se diretamente o momento de dipolo líquido no volume diferencial. Assim, o vetor \vec{P} é uma grandeza do tipo densidade volumétrica de dipolos, que fornece a magnitude, direção e sentido do momento de dipolo líquido em um volume diferencial dV' . A menos da natureza vetorial, o vetor polarização fornece uma representação da densidade local de dipolos na matéria, tendo papel semelhante àquele desempenhado pela densidade volumétrica de cargas ou monopolos em um objeto carregado.

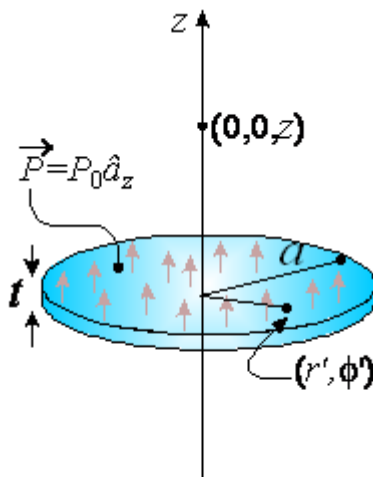
Utilizando-se a Eq.(2.35), com o auxílio da Eq.(2.40), obtém-se a contribuição do volume diferencial dV' para a função potencial no ponto \vec{X} , na forma

$$d\Phi(\vec{X}) = \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \frac{\vec{P}(\vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV'$$

e o potencial total naquele ponto é obtido integrando-se as contribuições elementares sobre o volume V , ou seja,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' \quad (2.41)$$

A Eq. (2.41) é uma expressão simples que permite computar o potencial, e por conseguinte, o campo elétrico da matéria polarizada. Existem materiais ferroeletricos que são capazes de reter polarização, mesmo na ausência de um campo aplicado. Os átomos ou moléculas destes materiais formam dipolos permanentes que em princípio são orientados aleatoriamente devido as vibrações térmicas. Quando se aplica um campo no material, suficiente para vencer o efeito térmico, é possível obter-se alinhamento dos dipolos, que pode persistir mesmo na ausência do campo externo.



Exemplo 2.7: Campo de uma placa delgada polarizada

Como exemplo de determinação da função potencial e campo elétrico da matéria polarizada, considere-se o caso do disco delgado polarizado uniformemente, conforme ilustrado na Fig. 2.21, e a determinação do potencial e vetor campo elétrico em um ponto arbitrário do eixo z .

Fig 2.21. Geometria para o Exemplo 2.7.

Utilizando-se a Eq.(2.41), com $\vec{P} = P_0 \hat{a}_z$, $\vec{X} = z\hat{a}_z$, $\vec{X}' = r'\hat{a}_{r'}$, $dV' = tr' dr' d\phi'$, tem-se

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{tP_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\hat{a}_z \cdot (z\hat{a}_z - r'\hat{a}_{r'})}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' = \frac{tP_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{z}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr'$$

Realizando-se a integração, obtém-se

$$\Phi(\vec{X}) = \frac{tR_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \Big|_a^0 = \frac{tR_0 z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]$$

Da expressão anterior, nota-se que o potencial no eixo z , apresenta os valores limites:

a) $|z| \gg a$:

$$\Phi(\vec{X}) \approx \frac{tR_0 z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z|} \left(1 - \frac{a^2}{2z^2} \right) \right] = \frac{tR_0 \pi a^2}{4\pi\epsilon_0 z |z|} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 z |z|}$$

onde, p representa o momento de dipolo do disco delgado. Uma inspeção da Eq.(2.35) indica que essa última expressão representa, de fato, o potencial no eixo z produzido por um dipolo localizado na origem.

b) $|z| \ll a$:

$$\Phi(z_+) - \Phi(z_-) = \frac{tR_0}{\epsilon_0}$$

O campo elétrico no eixo z é obtido de:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \rightarrow -a_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \hat{a}_z \frac{tR_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2)^{1/2} - z^2 (z^2 + a^2)^{-1/2}}{(z^2 + a^2)} \right] \\ &= \hat{a}_z \frac{tR_0}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

donde,

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

com $\vec{p} = R_0 \hat{a}_z (\pi a^2 t)$.

2.5.4. Cargas de polarização e relações constitutivas em meios materiais

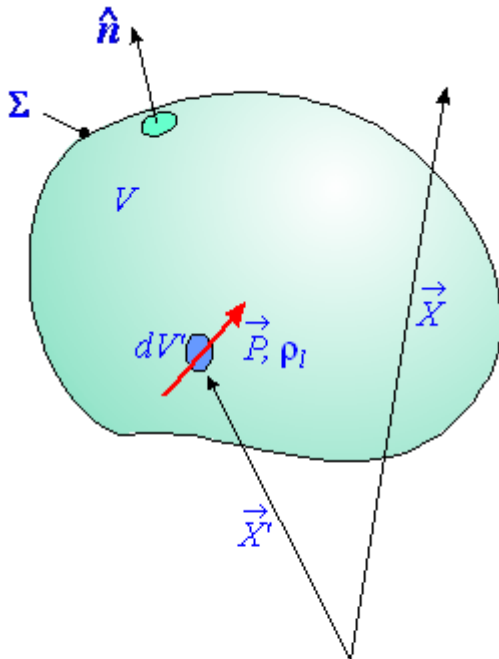


Fig.2.22 Geometria para o cálculo da função potencial associada a um meio material.

Uma questão importante no estudo de eletrostática é a determinação de campos na presença de meios materiais. Como discutido na seção anterior, dipolos na matéria fornecem uma contribuição para o potencial eletrostático e o objetivo da presente análise é caracterizar as contribuições advindas de cargas livres (monopolos) e de cargas ligadas (dipolos). Em essência, **um meio material pode ser caracterizado eletricamente como formado por dipolos e monopolos, em suspensão no vácuo.**

Considere-se o volume V do meio material contendo uma distribuição de dipolos, caracterizada pelo vetor polarização \vec{P} , e uma distribuição de cargas, caracterizada por uma densidade de cargas livres ρ_l , conforme ilustrado na Fig.2.22 O potencial eletrostático observado no ponto \vec{X} é obtido por superposição utilizando-se as Eqs.(2.20) e (2.41), o que fornece,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V \frac{\rho_l(\vec{X}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} + \int_V \frac{\vec{P}(\vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' \quad (2.42)$$

Na segunda integral da Eq.(2.42) pode-se utilizar a relação,

$$\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

com o operador $\vec{\nabla}'$ atuando apenas nas coordenadas do ponto \vec{X}' . Com base nessa relação, a dependência espacial do integrando do segundo termo da Eq.(2.42) pode ser posta na forma,

$$\frac{\vec{P}(\vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \vec{P}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

Fazendo-se uso da Eq.(1.31),

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

com as substituições, $\vec{A} \rightarrow \vec{P}$, $f \rightarrow \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$, resulta em

$$\vec{P}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \cdot \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{X}')$$

Inserindo-se esta última expressão na Eq.(2.42) e arranjando-se os termos do segundo membro, obtém-se,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V \frac{[\rho_l(\vec{X}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{X}')] dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} + \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) dV'$$

A aplicação do teorema de Gauss, na segunda integral da expressão anterior permite escrever a função potencial na forma,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V \frac{[\rho_l(\vec{X}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{X}')] dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} + \oint_{\Sigma} \frac{\vec{P}(\vec{X}') \cdot \hat{n} dS'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|} \quad (2.43)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal dirigido para fora da superfície Σ que limita o meio material, conforme ilustrado na Fig.2.22.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A Eq.(2.43) expressa a forma característica com que o vetor polarização, representativo do meio material, contribui para a função potencial. O numerador do integrando do primeiro termo da Eq.(2.43) representa uma **densidade equivalente de cargas**

$$\rho_{eq} = \rho_l + \rho_b \quad (2.44)$$

com a **densidade de cargas ligadas** ρ_b definida por,

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (2.45)$$

Com essa identificação, a contribuição do volume do material para o potencial ou campo elétrico em um ponto do espaço é aquela proveniente da densidade equivalente de cargas, definida pela Eq.(2.44).

A integral de superfície no segundo membro da Eq.(2.43) representa a contribuição da superfície do material para o potencial. O numerador do integrando desse termo equivale eletricamente a uma **densidade superficial de cargas ligadas**

$$\rho_{bs} = \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad (2.46)$$

Com a introdução da polarização do material pode-se determinar de que forma esse parâmetro deve ser levado em conta na forma diferencial da lei de Gauss, dada pela Eq.(2.30). Notando-se que o segundo membro dessa equação representa a **densidade volumétrica** de cargas, com cargas livres e ligadas simultaneamente levadas em conta, com base na Eq.(2.44) pode-se escrever a Eq.(2.30) na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho_{eq}$$

Inserindo-se a Eq.(2.44), com o auxílio da Eq.(2.45), na expressão anterior obtém-se

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

Assim, a divergência do vetor

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.47)$$

depende apenas da densidade de cargas livres ρ_l . Esse campo auxiliar é denominado de **vetor densidade de fluxo elétrico**, sendo medido em C/m^2 no sistema SI. Com a introdução do vetor \vec{D} , a lei de Gauss em forma diferencial assume a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (2.48)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Com a introdução do vetor densidade de fluxo elétrico, a eletrostática fica descrita pelas Eqs.(2.48) e (2.31), levando-se em conta a relação constitutiva, dada pela Eq.(2.47), entre os vetores \vec{D} , \vec{E} e \vec{P} . A vantagem de introduzir-se o vetor densidade de fluxo elétrico é que nesse novo ponto de vista, a densidade de cargas que aparece em uma das equações de Maxwell, representa apenas as cargas livres, com o efeito das cargas de polarização sendo levado em conta na Eq.(2.47). Observe-se que o vetor campo elétrico é aquele que leva em conta todas as fontes de carga possíveis na matéria, ou seja, livres ou ligadas. O vetor densidade de fluxo elétrico, por outro lado, aparece como grandeza auxiliar, com divergência diretamente relacionada a densidade de cargas livres, facilitando assim o tratamento das equações de Maxwell.

A título de ilustração, considerando-se o exemplo da placa polarizada ilustrada na Fig.2.19, pode-se identificar os tipos de cargas ligadas aí presentes. Nota-se, por exemplo, que a densidade volumétrica de cargas ligadas é nula, dado que,

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (P_0 \hat{a}_z) = 0$$

Existe no entanto carga ligada distribuída em partes da superfície da placa, conforme discriminado a seguir:

- Tampa superior: $\rho_{bs} = \vec{P} \cdot \hat{a}_z = P_0$
- Tampa inferior: $\rho_{bs} = \vec{P} \cdot (-\hat{a}_z) = -P_0$
- Fita lateral de altura t : $\rho_{bs} = \vec{P} \cdot (\hat{a}_y) = 0$

Ou seja, a placa delgada polarizada permanentemente é equivalente, sob o ponto de vista da eletrostática, a dois discos uniformemente carregados, imersos no vácuo, com cargas de sinais opostos e separados de uma distância t .

2.5.5. Tipos de meios materiais

Meios lineares

Existem certos materiais cujos átomos ou moléculas constituintes possuem os centros de carga positiva e negativa coincidentes, e conseqüentemente estes materiais só se polarizam na presença de um campo eletrostático externamente aplicado. Quando um campo é aplicado, induz-se uma separação de cargas que é em primeira ordem proporcional a intensidade do campo. Conseqüentemente, para essa classe de materiais, o vetor polarização pode ser relacionado ao campo interno através de uma relação do tipo,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (2.49)$$

onde o parâmetro adimensional χ_e é denominado de **susceptibilidade elétrica**. Esse parâmetro depende essencialmente da composição do material considerado. Materiais cuja relação entre \vec{P} e \vec{E} obedece a Eq.(2.49), são denominados de **lineares**. A relação entre \vec{D} e \vec{E} para meios lineares é obtida combinando-se as Eqs.(2.47) e (2.49), resultando em

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.50)$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (2.51)$$

é denominado de **permissividade elétrica** do material.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Meios isotrópicos e anisotrópicos

Um meio é eletricamente **isotrópico** quando suas propriedades dielétricas independem da direção do campo aplicado. Em materiais **lineares isotrópicos**, valem as relações dadas pelas Eqs. (2.49) e (2.50).

Existe no entanto uma classe importante de materiais em que a propriedade dielétrica em uma dada direção depende não só do campo aplicado nessa direção, como também das outras componentes de campo. Nestes materiais, denominados de **anisotrópicos**, a relação entre polarização e campo aplicado assume a forma mais geral,

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z)$$

ou equivalentemente,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi} \vec{E} \quad (2.52)$$

com,
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

representando o **tensor susceptibilidade elétrica**.

Com base na Eq.(2.47), a relação entre os vetores \vec{D} e \vec{E} pode ser posta na forma matricial

$$\vec{D} = \tilde{\epsilon} \vec{E} \quad (2.54)$$

com

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (\tilde{\mathcal{I}} + \tilde{\chi}) \quad (2.55)$$

representando o **tensor permissividade elétrica** e $\tilde{\mathcal{I}}$, a matriz identidade.

Meios homogêneos

Se além de linear e isotrópico, o meio também for **homogêneo**, i.e., se suas propriedades dielétricas independerem das coordenadas, as equações da eletrostática podem ser escritas na forma,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon,$$

o que fornece

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon$$

com $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$.

Essas relações mostram que o potencial eletrostático em um meio linear, homogêneo e isotrópico, satisfaz a Equação de Poisson. O segundo membro dessa equação indica que no interior de meios dielétricos, o potencial, e conseqüentemente o campo eletrostático, produzidos por uma distribuição de cargas livres ρ é enfraquecido por um fator $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$, com respeito àqueles que seriam produzidos pela mesma distribuição de cargas, na ausência do material.

A estrutura de materiais **ferroelétricos** é tal que seus átomos ou moléculas constituintes exibem um momento de dipolo permanente. Na ausência de um campo externo, vibrações térmicas mantêm os dipolos orientados aleatoriamente, resultando em uma polarização média nula. A aplicação de um pequeno campo no material pode ser suficiente para vencer a barreira térmica produzindo um alinhamento dos dipolos. O acoplamento dos dipolos devido aos campos dipolares pode ser suficientemente forte, de forma que retirando-se o campo externo, o material seja capaz de reter uma polarização residual que só pode ser quebrada revertendo-se o campo externo, ou aquecendo-se o material ou através de choques mecânicos. Materiais desse tipo, além de serem capazes de reter polarização permanente, exibem uma **relação não linear entre campo e polarização**. O tratamento de campos eletrostáticos na presença de tais materiais é feito utilizando-se as equações da eletrostática conjuntamente com a relação constitutiva mais geral expressa pela Eq.(2.47).

2.6. Condições de Contorno

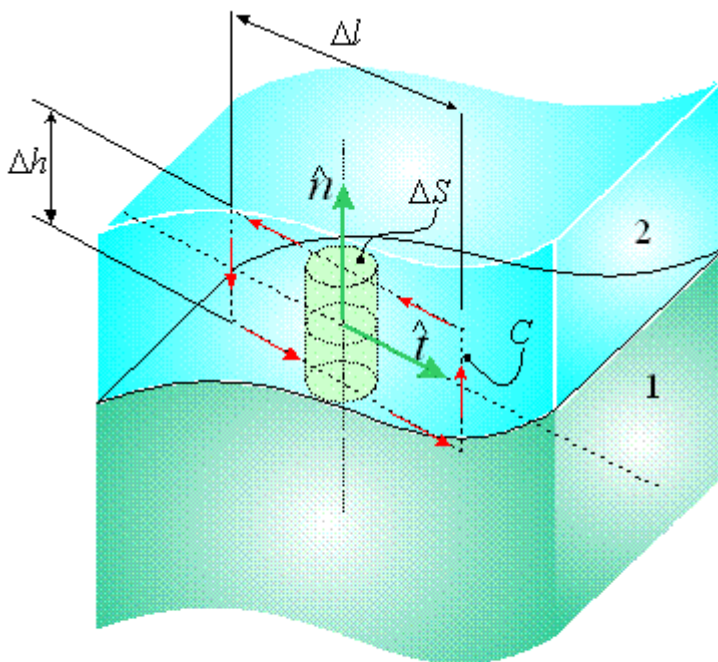


Fig.2.23 Trecho da interface entre dois meios distintos e geometria utilizada para a determinação das condições de contorno.

em cada meio. As grandezas de campo, na região bem próxima à interface, são representadas pelos vetores (\vec{E}_1, \vec{D}_1) e (\vec{E}_2, \vec{D}_2) , nos meios 1 e 2, respectivamente. O vetor unitário tangente à interface é representado pelo parâmetro \hat{t} , com \hat{n} representando o vetor unitário normal à interface, dirigido do meio 1 para o meio 2.

Utilizando-se a lei de Gauss

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

com Σ correspondendo à superfície cilíndrica mostrada na Fig.2.23, no limite em que $\Delta h \rightarrow 0$, obtém-se

As equações de Maxwell, bem como a equação de Poisson, são equações diferenciais cujas soluções requerem o conhecimento do comportamento dos campos nas fronteiras da região de interesse ou mesmo na interface entre materiais exibindo propriedades dielétricas distintas. A forma como é feita a transição de campos entre meios distintos é ditada pelas condições de contorno examinadas a seguir. Para isso, considere-se a interface entre os meios 1 e 2 conforme ilustrado na Fig.2.23. Nessa figura estão desenhados um cilindro imaginário de altura Δh e área de base ΔS , bem como um caminho fechado C com segmentos de dimensões Δl e Δh . Ambas as figuras estão parcialmente contidas

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx (\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n}) \Delta S = \Delta S \lim_{h \rightarrow 0} (\rho \Delta h)$$

No primeiro membro dessa última relação, utilizou-se o fato de a contribuição da superfície lateral para o fluxo total tender a zero, no limite $\Delta h \rightarrow 0$. No segundo membro, admitindo-se a existência de uma densidade superficial de carga ρ_s , então,

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \Delta h) = \rho_s$$

resultando na **condição de contorno para o vetor densidade de fluxo elétrico**,

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \rho_s \quad (2.56)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A Eq.(2.56) indica que **a componente normal do vetor densidade de fluxo elétrico é descontínua se existir densidade superficial de carga na interface de separação dos meios**. Essa situação pode ocorrer, por exemplo, na interface entre meios condutores, ou naquela entre um condutor e um não-condutor. Se ambos os meios são não-condutores, então $\rho_s = 0$, e da Eq.(2.52), conclui-se que a componente normal do vetor \vec{D} é contínua.

Aplicando-se a Eq.(2.24) para o caminho fechado mostrado na Fig.2.23, obtém-se

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t} \Delta l - \vec{E}_2 \cdot \hat{t} \Delta l = 0$$

uma vez que a contribuição para a integral de linha dos segmentos normais à interface tende a zero no limite $\Delta h \rightarrow 0$. Assim,

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{t} = 0$$

Essa última relação indica que **a componente tangencial do vetor campo elétrico é contínua na interface entre dois meios quaisquer**. Indica também que o vetor $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ é perpendicular ao vetor \hat{t} , ou equivalentemente, $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \parallel \hat{n}$, i.e.,

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.57)$$

Um caso particular importante para as condições de contorno dadas pelas Eqs.(2.56) e (2.57) ocorre quando a fronteira de interesse é formada entre um meio condutor e um meio isolante. Como o campo no interior de um condutor é nulo no regime estático, no meio isolante, os campos assumem os seguintes valores na interface de separação,

$$D_n = \rho_s, \quad E_t = 0$$

Se o meio isolante for linear, então $E_n = \rho_s / \epsilon$.

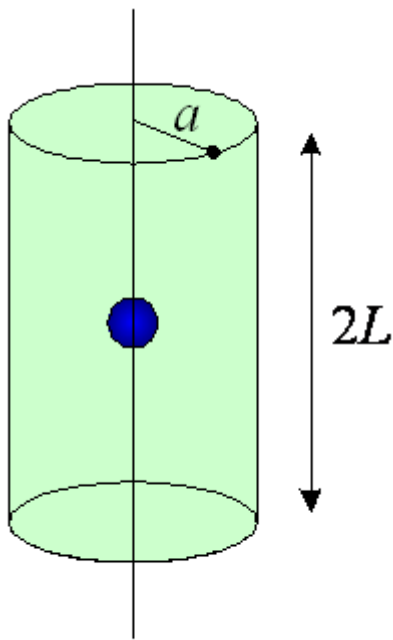
Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Problemas

- 2.1) Um fio retilíneo semi-infinito tem carga uniformemente distribuída com densidade λ (C/m). Defina um sistema de coordenadas apropriado e determine o vetor campo elétrico no plano perpendicular ao fio e que contenha uma de suas extremidades.
- 2.2) Carga é distribuída com densidade $\rho_s = k$ (C/m²), na superfície $R = a$, $\alpha \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Determine:
a) a carga total na superfície
b) o **vetor** campo elétrico na origem.
- 2.3) Carga é distribuída com densidade $\rho_s = k \cos\theta$ (C/m²), na superfície $R = a$. Determine
a) a carga total na superfície.
b) o **vetor** campo elétrico na origem.
- 2.4) Uma carga puntiforme q está localizada na origem de um sistema de coordenadas. Considere o cubo com vértices nos pontos:
(-1,-1,-1); (1,-1,-1); (-1,1,-1); (1,1,-1); (-1,-1,1); (1,-1,1); (-1,1,1); (1,1,1)
Determine o fluxo elétrico através da face do cubo definida por $\{z = 1, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- 2.5) Uma carga q está localizada no ponto (0,0,0) e uma carga $-q$, no ponto (0,2,0). Determine o fluxo elétrico através da superfície definida pelas condições
 $\{y = 1, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$,
admitindo que o vetor área diferencial associado a essa superfície aponte no sentido $+y$.
- 2.6) Um plano infinitamente extenso tem carga uniformemente distribuída com densidade $\rho_s = k$ (C/m²). Uma carga puntiforme q está localizada a uma altura h do plano. Admitindo que a carga puntiforme não distorça a distribuição de cargas no plano, calcule a força exercida pela carga sobre o plano.
- 2.7) Dois fios retilíneos, infinitamente longos e paralelos têm cargas distribuídas e localizações definidas pela tabela seguinte. Determine:
a) o vetor força por unidade de comprimento exercida pelo fio 1 sobre o fio 2.
b) o vetor campo elétrico resultante no plano $y=0$ para os casos $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Fio	Localização	Densidade linear de carga(C/m)
1	$x = 0, y = -a$	λ_1
2	$x = 0, y = a$	λ_2

- 2.8) Carga é distribuída na região $\{r \leq a, -\infty < z < +\infty\}$, com densidade $\rho = k(r/a)$ (C/m³). Determine o vetor campo elétrico dentro e fora da região de carga.
- 2.9) Carga é distribuída na região $a \leq R \leq b$ com densidade $\rho = k(R/b)$ (C/m³). Determine:
a) a carga total na região $a \leq R \leq b$.
b) o vetor campo elétrico nas regiões, $0 \leq R \leq a$, $a \leq R \leq b$ e $R \geq b$.



Prob. 2.10

2.10) Considere a existência de uma carga puntiforme Q imersa no vácuo e localizada no centro de um cilindro imaginário de altura $2L$ e raio a . Determine o fluxo elétrico através da superfície lateral do cilindro.

2.11) Considere a existência de uma distribuição uniforme de cargas ρ_0 no interior da esfera de raio b . Calcule a porção do fluxo elétrico para fora do cilindro imaginário de raio a e altura $2L$ que atravessa suas tampas superior e inferior, admitindo o cilindro imerso no interior da distribuição, conforme ilustrado na figura.

2.12) Considere a existência de um campo elétrico no espaço tridimensional, dado por,

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z, & z > 0 \\ -E_0 \hat{a}_z, & z < 0 \end{cases}$$

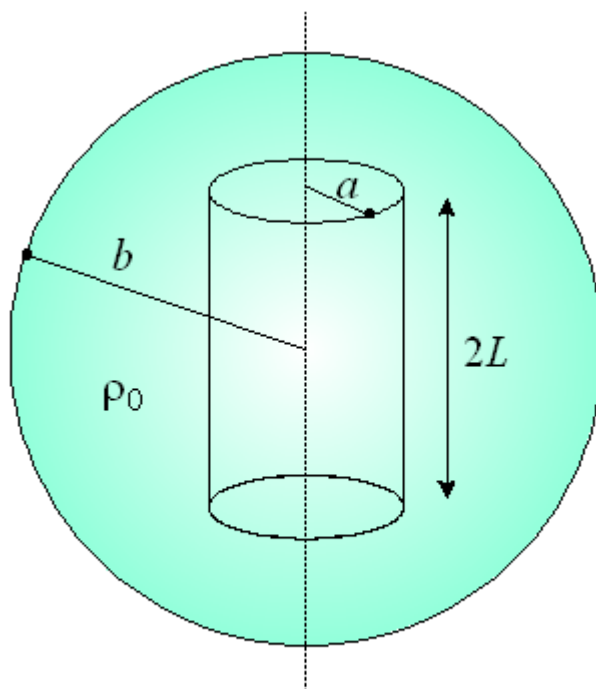
- a) qual a carga total envolvida por um cilindro imaginário de raio a e altura $2L$, com eixo de simetria sobre o eixo z e existente na região $-L < z < L$.
- b) que tipo de distribuição produziria este campo e qual a sua localização no espaço?

por:

2.13) Para a distribuição de carga definida

$$\rho = \begin{cases} 0, & |z| > d/2 \\ \rho_0, & |z| \leq d/2 \end{cases}$$

- a) determine o vetor campo elétrico em todo o espaço.
- b) faça um esboço da dependência em z da(s) componente(s) do vetor campo elétrico.



Prob. 2.11

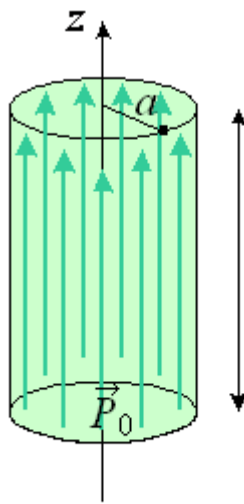
2.14) Carga é distribuída em todo o espaço com densidade volumétrica dada por, $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha R^3)$, onde ρ_0 (C/m^3) e $\alpha(1/m^3)$ são constantes e R mede a distância de um ponto no espaço à origem. Determine o **vetor** campo elétrico em todo o espaço.

2.15) Uma distribuição estática de cargas

está distribuída em todo o espaço com densidade volumétrica dada por, $\rho = \rho_0 \frac{r}{a} \exp(-\alpha r^3)$,

onde ρ_0 (C/m³), α (1/m³) e a (m), são constantes e r mede a distância de um ponto sobre o plano xy à origem. Determine o **vetor** campo elétrico em todo o espaço.

- 2.16)** Considere um fio finito de comprimento l , com densidade linear de carga constante em todo fio. Defina um sistema de coordenadas adequado e determine a função potencial e o vetor campo elétrico produzidos por esta distribuição.
- 2.17)** Carga é distribuída com densidade $\rho_s = k\cos\theta$ (C/m²), na superfície $R = a$. Determine:
- o potencial eletrostático em um ponto sobre o eixo z , interior ou exterior a esfera.
 - o vetor campo elétrico correspondente no eixo z .
- 2.18)** Considere um anel de cargas de raio a , com uma densidade linear uniforme λ . Calcule o trabalho realizado por um agente externo fictício para trazer uma carga q de um ponto infinitamente distante até o centro do anel.
- 2.19)** Oito cargas puntiformes, cada uma com q coulombs, estão dispostas nos vértices de um cubo de lado a . Determine a energia potencial elétrica desse sistema de cargas.
- 2.20)** Para a distribuição de cargas da questão anterior, qual seria o trabalho realizado por um agente externo fictício para trazer uma carga q_0 de um ponto infinitamente distante, até o centro do cubo?
- 2.21)** Carga é distribuída uniformemente com densidade ρ_0 na região definida pelas equações, $R \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, onde R e θ são as coordenadas radial e polar no sistema de coordenadas esféricas. Determine o potencial e o vetor campo elétrico sobre o eixo z . Qual a energia necessária para se trazer uma carga q de um ponto remoto até o ponto de coordenadas, $R=a$, $\theta = 0$?
- 2.22)** Carga é distribuída uniformemente com densidade ρ_0 no interior da região definida pelas equações, $r \leq a$, e $-l/2 \leq z \leq l/2$, onde r e z são as coordenadas radial e axial no sistema de coordenadas cilíndricas. Determine o potencial e o vetor campo elétrico no eixo z .
- 2.23)** Para a distribuição de cargas do problema anterior, qual a energia necessária para se mover uma carga de teste q do centro da distribuição até o ponto de coordenadas, $r = 0$, $z = l/2$?
- 2.24)** Considere uma casca esférica limitada pelas superfícies $R = a$ e $R = b$, com $b > a$. Nessa região, carga é distribuída uniformemente com densidade ρ_0 (C/m³). Admitindo o ponto de vista do campo, onde a energia eletrostática é considerada como distribuída no espaço, determine:
- a densidade de energia eletrostática nas regiões $R \leq a$, $a \leq R \leq b$ e $R \geq b$.
 - as respectivas porções de energia eletrostática contidas nas regiões $R \leq a$, $a \leq R \leq b$ e $R \geq b$
- 2.25)** Considere um cilindro de altura h e raio a , exibindo um vetor polarização permanente dada por $\vec{P} = P_0 \hat{z}$, conforme ilustrado na figura. Determine o potencial eletrostático em um ponto sobre o eixo z , dentro ou fora do cilindro.
- 2.26)** Considere dois dipolos \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , separados por uma distância d , e \hat{n} um vetor unitário dirigido ao longo da linha de separação entre \vec{p}_1 e \vec{p}_2 . Dado que os dipolos estão alinhados sobre retas paralelas, determine os ângulos entre \vec{p}_1 e \hat{n} de forma que a energia de interação seja nula.



Prob. 2.25

2.27) Para o cilindro polarizado do problema 2.25, determine o trabalho que seria realizado por um agente externo fictício para transportar uma carga de teste q_0 de um ponto no centro da tampa inferior até um ponto no centro da tampa superior.

2.28) Uma esfera isolante de raio a , com centro na origem, é polarizada permanentemente com vetor polarização constante \vec{P} . Determine os vetores campo elétrico e densidade de fluxo elétrico na origem.

2.29) O espaço entre duas superfícies condutoras esféricas concêntricas de raios a e b é preenchido com um dielétrico de permissividade ϵ . Admitindo a esfera externa aterrada e a interna submetida a um potencial V , determine as densidades superficiais de carga de polarização nas duas superfícies do dielétrico.

2.30) Calcule os momentos de dipolo elétrico para o cilindro do problema 2.25 e para a esfera do problema 2.28.

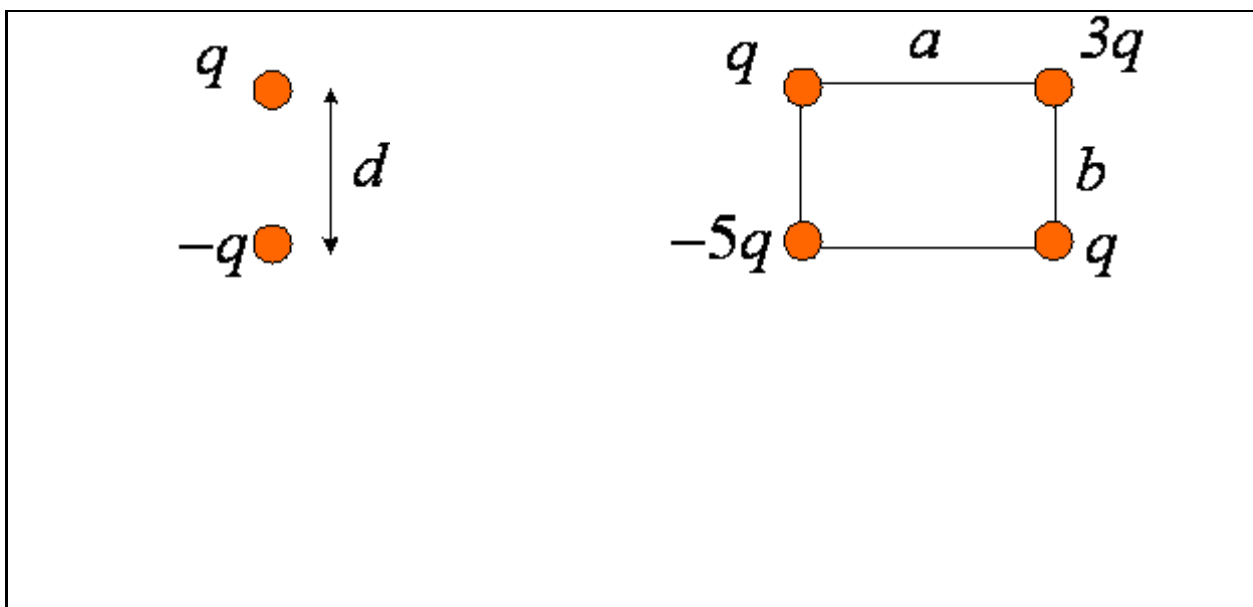
2.31) Para um conjunto de cargas discretas q_i ($i=1,2,3,\dots,N$), localizadas nos pontos \vec{X}_i ($i=1,2,3,\dots,N$), o momento de dipolo pode ser calculado da expressão

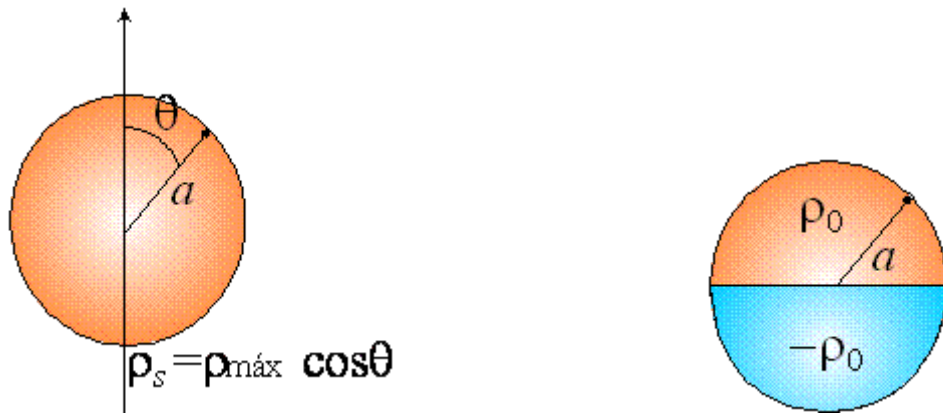
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{X}_i$$

e para uma distribuição contínua de cargas definida pela função densidade $\rho(\vec{X})$ ocupando um volume V , o momento de dipolo pode ser calculado da relação

$$\vec{p} = \int_V dV \vec{X} \rho(\vec{X})$$

Utilizando essas definições determine os momentos de dipolo para os sistemas de cargas mostrados na figura seguinte.





Prob. 2.31

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana
