UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ÉRICK CAETANO ALVES DO NASCIMENTO

Propriedade de controle ótimo tipo Bang-Bang para Equação de Korteweg-de Vries-Burgers

Recife

2024

ÉRICK CAETANO ALVES DO NASCIMENTO

Propriedade de controle ótimo tipo Bang-Bang para Equação de Korteweg-de Vries-Burgers

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Nascimento, Erick Caetano Alves do.
Propriedade de controle ótimo tipo Bang-Bang para Equação de Korteweg-de Vries-Burgers / Erick Caetano Alves do Nascimento. - Recife, 2024.
81f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2024.
Orientação: Roberto de Almeida Capistrano Filho.

1. Equação de Korteweg-de Vries-Burgers; 2. Controlabilidade nula; 3. Controle ótimo; 4. Propriedade Bang-Bang. I. Capistrano Filho, Roberto de Almeida. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central CDD 515

ÉRICK CAETANO ALVES DO NASCIMENTO

Propriedade de controle ótimo tipo Bang-Bang para Equação de Korteweg-de Vries-Burgers

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 26/07/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Victor Hugo Gonzalez Martinez (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rodrigo Adolfo Véjar Asem (Examinador Externo)
Universidad de La Serena/Chile

Dedico a todos os meus amigos e familiares que me apoiaram, me incentivaram e me deram forças durante toda essa trajetória.

AGRADECIMENTOS

À toda minha família pelo apoio e carinho, principalmente aos meus pais, Sandra e Erinaldo, que sempre se esforçaram para me proporcionar uma base para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Prometo retribuir muito mais a vocês.

À minha companheira, Juliana Vital, por todo amor, atenção, suporte emocional e apoio que me proporciona. Certamente, você é peça fundamental nessa minha caminhada.

Aos meus antigos professores, que tenho o prazer de chamar de amigos, Prof. Dr. Thiago Tanaka e Prof. Dr. Gilson Simões. Vocês foram os primeiros a acreditar em mim na graduação, sempre me apoiando e incentivando a seguir em frente. Não tenho palavras para agradecer o tanto que vocês fizeram por mim na vida acadêmica e pessoal.

Aos amigos que carrego no peito desde a graduação: Rafael Souto, Lucas Wanderley, Túlio Santos, Hugo Henrique e Thays Nunes. Parte do que sou hoje se deve à convivência com vocês, agradeço por todos os momentos de descontração durante essa árdua jornada.

Aos meus irmãos de orientação: Jefferson Henriques e Jandeilson Santos, por toda ajuda nos estudos.

Aos amigos fora do ambiente acadêmico: Caroline, Dayanne, Jonathas, Larissa e Paulo, que sempre me alegraram nas conversas e encontros.

Ao Prof. Dr. Roberto Capistrano, pela orientação durante o mestrado. Agradeço pelos ensinamentos, pelo tempo dedicado a mim, pelas palavras de incentivo e conselhos passados durante essa trajetória.

Ao Prof. Dr. Victor Hugo e Prof. Dr. Rodrigo Adolfo, por terem aceitado participar da banca avaliadora. Acredito que seus comentários e correções acrescentarão muito a esta dissertação.

Aos órgãos de fomento CAPES e CNPq, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho é dedicado a obter a propriedade de controle ótimo do tipo Bang-Bang para a equação não linear de Korteweg-de Vries-Burgers (KdV-B) em um domínio limitado cujo controle atua internamente em um subconjunto deste domínio. Inicialmente, utilizamos a teoria de semigrupos para garantir a boa colocação do problema de valor inicial associado à equação KdV-B, tanto para o caso linearizado quanto para o caso não linear. Em seguida, estudamos a controlabilidade nula da equação KdV-B, que dividiremos em dois casos. Para o caso linear, aplicamos o método da dualidade que consiste em provar uma desigualdade de observabilidade, esta obtida com o auxílio de uma desigualdade de Carleman. Com resultado linear em mãos, o caso não linear é estendido utilizando o teorema do ponto fixo de Kakutani. Adicionalmente, provamos a existência de controle ótimo associado à controlabilidade nula para a equação KdV-B e que qualquer controle ótimo satisfaz a propriedade Bang-Bang.

Palavras-chaves: Equação de Korteweg-de Vries-Burgers. Controlabilidade nula. Controle ótimo. Propriedade Bang-Bang.

ABSTRACT

This work is dedicated to obtaining the optimal control property of the Bang-Bang type for the nonlinear Korteweg-de Vries-Burgers equation (KdV-B) in a bounded domain where the control acts internally in a subset of this domain. Initially, we use semigroup theory to ensure the well-posedness of the initial boundary value problem associated with the KdV-B equation, both for the linearized and the nonlinear cases. Next, we study the null controllability of the KdV-B equation, which we will divide into two cases. For the linear case, we apply the duality method, which consists of proving an observability inequality, obtained with the aid of a Carleman inequality. With the linear result in hand, the nonlinear case is extended using Kakutani's fixed point theorem. Additionally, we prove the existence of optimal control associated with the null controllability for the KdV-B equation and that any optimal control satisfies the Bang-Bang property.

Keywords: Korteweg-de Vries-Burgers equation. Null controllability. Optimal control. Bang-Bang property.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sabe-se que muitos problemas físicos podem ser descritos pela equação de Korteweg-de Vries (KdV),

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0.$$

A equação foi formulada pela primeira vez por (BOUSSINESQ, 1877) e (KORTEWEG; VRIES, 1895) como modelo para a propagação de ondas de água rasas ao longo de um canal, e também é aceita como um modelo matemático para a propagação unidirecional de ondas de pequenas e longas amplitudes em sistemas dispersivos não lineares. No entanto muitos problemas envolvem não apenas dispersão, mas também dissipação, e esses não são governados pela equação KdV.

Um exemplo típico desses problemas mais complexos é o fluxo de líquidos contendo bolhas de gás (WIJNGAARDEN, 1972) e a propagação de ondas em um tubo elástico preenchido com um fluido viscoso (JOHNSON, 1971). Nesses e em outros casos, pode-se demonstrar que a equação que governa a evolução é a chamada equação de Korteweg-de Vries-Burgers (KdV-B) que pode ser escrita como

$$y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = 0.$$

Esta equação é a equação KdV com o termo de dissipação, a saber y_{xx}, adicionado. Este termo é motivado pela equação de Burgers, que por sua vez pode ser escrita como

$$y_t - y_{xx} + yy_x = 0.$$

A equação de Burgers é usada como modelo matemático para analisar fenômenos relacionados à turbulência, formação de choques, entre outros. Tal equação, estabelecida por Burgers em 1940 (BURGERS, 1940), é uma equação diferencial parcial simplificada das equações de Navier-Stokes, do tipo convecção-difusão, aplicável em situações onde o gradiente da pressão pode ser ignorado.

Existem diversos trabalhos sobre a equação KdV-B, muitos deles se concentram na boa colocação e no comportamento assintótico, como feito em (JEFFREY; MOHAMAD, 1991) e (KARCH, 1999). Outro tópico importante que vem sendo estudado são os problemas de controlabilidade envolvendo a equação KdV-B. Problemas de controle na fronteira e estabilidade são investigados em (BALOGH; KRSTIC, 2000), para a equação KdV-B, e em (SMAOUI; AL-JAMAL, 2008) para equação KdV-B generalizada (GKdV-B).

Um problema de controlabilidade pode ser entendido como a busca de um controle adequado (que pode atuar internamente ou na fronteira) para um sistema de evolução (governado por uma equação diferencial ordinária ou uma equação diferencial parcial) que satisfaça a seguinte propriedade: escolhido um intervalo de tempo $(0, T)$ e dados iniciais e finais, a solução do sistema associada ao controle escolhido corresponda tanto ao dado inicial no tempo $t = 0$ quanto ao dado final no tempo $t = T$. Entende-se por controlabilidade nula, quando o dado final é igual a zero.

Seja $I = (0, L)$, com $L > 0$, e ω um subconjunto aberto de I. Considere o problema de valor inicial e de contorno da equação KdV-B em I com um termo fonte v,

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = v\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (0, +\infty), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0, +\infty), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{1}$$

em que y_0 é o dado inicial e χ_ω denota a função característica de ω. Neste caso, o problema de controlabilidade nula consiste em encontrar uma função v tal que a solução y de (1) satisfaça $y(x, T) = 0$ para algum tempo $T > 0$.

Mais especificamente, nosso trabalho se dedica a estudar a seguinte questão proposta por (CHEN, 2017), referência principal do nosso estudo: para quaisquer $y_0 \in L^2(I)\backslash\{0\}$ e $M > 0$, pode-se encontrar $T > 0$ e uma função $v \in L^2(I \times (0, +\infty))$ tal que $||v||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M$ e a solução y de (1) satisfaça $y(\cdot, T) = 0$ em I?

Consideremos o seguinte espaço dos controles admissíveis

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_M := \Big\{ & v \in L^2(I \times (0, +\infty));\ ||v||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M \text{ e a solução} \\ & y \text{ de (1) satisfaz } y(\cdot, T) = 0 \text{ em } I \text{ para algum } T > 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Dentre todas as funções $v \in \mathcal{V}_M$, escolhemos o menor de todos os tempos, isto é,

$$T^* = \inf\{T; v \in \mathcal{V}_M\}.$$

Um controle v^* tal que a solução correspondente y satisfaça $y(\cdot, T^*) = 0$ em I é chamado um controle ótimo.

Neste contexto, (CHEN, 2017) prova que: ***para quaisquer*** $\mathbf{y_0} \in \mathbf{L^2}\backslash\{\mathbf{0}\}$ ***e*** $M > 0$***, o controle ótimo*** $\mathbf{v}^*$ ***satisfaz a propriedade bang-bang:*** $||\mathbf{v}^*||_{\mathbf{L^2(I\times(0,T^*))}} = \mathbf{M}$***, onde*** $\mathbf{T}^*$ ***é o tempo ótimo correspondente.***

Como mencionado em (WANG et al., 2018), a propriedade Bang-Bang é de grande importância para a teoria do controle ótimo não apenas nas aplicações, mas também do ponto de vista matemático. A propriedade bang-bang para problemas de controle ótimo governados por equações de evolução linear foi estabelecida pela primeira vez em (FATTORINI, 1964). Desde então, muitos trabalhos relacionados a propriedade bang-bang para problemas de controle governados por diversos tipos de equações diferenciais parciais foram publicados. (WANG; WANG, 2007) e (KUNISCH; WANG, 2012), por exemplo, estabeleceram a propriedade bang-bang dos controles ótimos através do princípio do máximo de Pontryagin. Nossa abordagem consiste em obter a propriedade bang-bang dos controles ótimos seguindo uma estratégia baseada na controlabilidade nula, como feito em (MIZEL; SEIDMAN, 1997), (LÜ, 2010) e (PHUNG; WANG; ZHANG, 2014).

Este trabalho foi divido em quatro capítulos:

O Capítulo 1, é dedicado a estabelecer as bases teóricas e os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do estudo, tais como espaços de Sobolev e suas propriedades e a Teoria de Semigrupos. Nossas principais referências foram (ADAMS; FOURNIER, 2003), (MEDEIROS; MIRANDA, 2019), (PAZY, 2012) e (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).

No Capítulo 2, exploramos a boa colocação da equação KdV-B em diferentes contextos. Aqui veremos a boa colocação da equação KdV-B linear homogênea e não homogênea, em que os passos para se obter a boa colocação foram inspirados por (ROSIER, 1997). A boa colocação para o caso não linear seguiu os passos feitos por (CAPISTRANO-FILHO; GONZALEZ-MARTINEZ, 2024). Já a boa colocação para a equação KdV-B modificada foi inspirada em (CHEN, 2017).

O Capítulo 3 é focado na análise da controlabilidade nula da equação KdV-B, tanto no caso linearizado quanto para o caso não linear. Para o caso linearizado, aplicamos o método da dualidade visto em (MICU; ZUAZUA, 2004) e (LIONS, 1988), que consiste em obter uma desigualdade de observabilidade para o problema adjunto associado a equação KdV-B, tal desigualdade foi obtida com o auxilio de uma desigualdade de Carleman formulada por (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015). Para a boa colocação para a equação não linear, seguimos os passos vistos em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015), em que é feita uma extensão do caso linear através do teorema do ponto fixo de Kakutani.

Por fim, no Capítulo 4, abordamos a existência de controle ótimo para a equação KdV-B, bem como a propriedade bang-bang desse controle, estes resultados foram provados por (CHEN, 2017).

Cada capítulo da dissertação foi cuidadosamente estruturado para abordar aspectos específicos da equação de Korteweg-de Vries-Burgers, proporcionando uma visão completa e detalhada sobre o tema. A sequência dos capítulos permite uma progressão lógica e consistente do estudo, desde os conceitos fundamentais até a análise de controle ótimo, garantindo uma compreensão profunda e abrangente do tópico.

1 RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Durante todo o trabalho, denotaremos por C uma constante positiva que pode mudar de valor de uma linha para outra. Quando for necessário especificar a dependência de C em algum parâmetro, digamos "$\cdot$", denotaremos por $C(\cdot)$.

Dado um número natural n, denotamos por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ as n-uplas constituídas por números inteiros não negativos. Estas n-uplas são denominadas multi-índices. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Além disso, denotamos por D^α o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

e para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ temos, por definição, $D^0 u = u$, para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, representa-se a derivação parcial $\partial / \partial x_i$.

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, define-se suporte de u, que será denotado por supp(u), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Sendo assim, supp$(u)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Representa-se por $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções u definidas em Ω, mensuráveis, cuja potência p é integrável à Lebesgue em Ω, isto é, $|u|^p$ tem integral de Lebesgue finita em Ω. Equipamos o espaço $L^p(\Omega)$ com a norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \overline{v}(x) dx, \quad \overline{v} \text{ complexo conjugado de } v.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço das (classe de) funções u, mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, equipado com a norma

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess |u(x)|.$$

Observação 1.1 *Os espaços definidos acima, munido com suas respectivas normas, são espaços de Banach (ver (ADAMS; FOURNIER, 2003)).*

Definição 1.1 *Uma função u definida em Ω é dita localmente integrável em Ω, quando*

$$\int_K |u|dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis em Ω é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Proposição 1.1 $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *para* $1 \leq p \leq \infty$ *e qualquer domínio* Ω.

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003). □

Por $C_0^\infty(\Omega)$ representa-se o espaço vetorial das funções definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes de Ω.

Exemplo 1.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/(1 - ||x||^2)\right), & \textit{se} \quad ||x|| < 1, \\ 0, & \textit{se} \quad ||x|| \geq 1, \end{cases}$$

onde $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Daí f pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e supp$(f) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$.

Proposição 1.2 $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2019). □

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

a) Os suportes de todas as funções testes φ_n, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K.

b) Para cada multi-índice α, a sequência $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em K.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero pela definição dada acima.

Observação 1.2 *Como pode ser visto em (SCHWARTZ, 2002), é possível dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia a fim de que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.2. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.3 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$ *para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

ii) T *é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.*

Isto é, uma distribuição sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

Usualmente, denota-se por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor da distribuição T em φ. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Um exemplo de excepcional importância na teoria das distribuições é o seguinte:

Exemplo 1.2 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é uma distribuição sobre Ω.

Proposição 1.3 ***(Lema de Du Bois-Reymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2019). □

Do lema de Du Bois-Reymond vê-se que T_u, como definida acima, é determinada de modo unívoco por u. Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Porém existem distribuições que não são definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no seguinte exemplo:

Exemplo 1.3 ***(Delta de Dirac)*** *Considere $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

Em (MEDEIROS; MIRANDA, 2019), vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω, mas que δ_0 não é definida por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.4 *Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

O espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a noção de convergência acima é chamado espaço das distribuições sobre Ω. É visto em (MEDEIROS; MIRANDA, 2019) que vale a seguinte cadeia, para $1 \leq p < \infty$,

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Definição 1.5 *Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada de T, no sentido das distribuições, $D^\alpha T$, de ordem $|\alpha|$ é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas (no sentido das distribuições) de todas as ordens.

Observação 1.3 *$D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, no qual $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, considere $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Dessa forma,*

$$|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Observação 1.4 *Vê-se em (MEDEIROS; MIRANDA, 2019) que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da Definição 1.4.*

Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m,\ D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. A norma de u no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é definida como:

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$||u||_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^\alpha u(x)| \, .$$

Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ munidos com as normas definidas acima são denominados espaços de Sobolev.

Observação 1.5 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach (ver (ADAMS; FOURNIER, 2003)).*

Um caso particular importante é quando consideramos $p = 2$, neste caso o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \, .$$

Proposição 1.4 *$W^{m,p}(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$, e é uniformemente convexo e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003). □

Definição 1.6 *Uma álgebra de Banach X é um espaço de Banach e uma álgebra associativa sobre um corpo em que o produto $(\cdot)$ é associativo e a norma satisfaz:*

$$||u \cdot v||_X \leq ||u||_X ||v||_X, \quad \textit{para todos} \;\; u, v \in X.$$

Dizemos que a álgebra é comutativa se a operação $(\cdot)$ for comutativa

Proposição 1.5 *Se $p > n$. Então o espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach comutativa. O mesmo vale para $W^{m,p}(\Omega)$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 com fronteira limitada e $m > (n/p)$.*

Demonstração: Ver (KESAVAN, 2003). □

Note que para $m = 0$ temos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e pela Proposição 1.2 sabe-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, mas não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, como será visto posteriormente. Por esta razão, define-se o espaço $W_0^{m,p}$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ denotamos por $H_0^m(\Omega)$ ao invés de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Proposição 1.6 *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2019). □

No que segue, considere $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, neste caso dizemos que q é o expoente conjugado de p. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Já o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será denotado por $H^{-m}(\Omega)$. Como pode ser visto em (MEDEIROS; MIRANDA, 2019), podemos identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$ quando T, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua é ainda representada por T. Caracteriza-se tais distribuições como segue.

Teorema 1.1 *Seja T uma distribuição sobre Ω. Então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, com $|\alpha| \leq m$, tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2019). □

Além disso (EVANS, 2022),

$$||T||_{W^{-m,q}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||g_\alpha||^q_{L^q(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}} ; g_\alpha \text{ satisfaz } (1.1) \right\}. \tag{1.2}$$

Observação 1.6 *Em particular, caracterizamos uma distribuição T em $H^{-2}(\Omega)$ como segue: Existem $g_0, g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$T = g_0 + g_{1x} + g_{2xx} \tag{1.3}$$

e

$$||T||_{H^{-2}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{2} ||g_i||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} ; g_i \textit{ satisfaz } (1.3) \right\}. \tag{1.4}$$

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $||u(t)||^p_X$ é integrável a Lebesgue em $(0,T)$, com a norma

$$||u(t)||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||^p_X dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $||u(t)||_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$||u(t)||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess ||u(t)||_X.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0,T;X), 1 < p < \infty$, com X sendo um espaço de Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde q é o expoente conjugado de p. Já quando $p=1$ temos a seguinte identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T;X').$$

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.7 *Seja $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Consideremos o seguinte espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X); u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j=1,\ldots,m \right\},$$

no qual $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições. O espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ com a norma

$$||u||_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} ||u^{(j)}||^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach. Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, e munido com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert (ver (ADAMS; FOURNIER, 2003)).

Lema 1.1 ***(Imersões de Sobolev)*** *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver (BREZIS, 2011). □

Lema 1.2 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right)$.

ii) Se $m = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

iii) Se $2m > n$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

No qual o símbolo $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.

Demonstração: Ver (BREZIS, 2011). □

Teorema 1.2 ***(Lema de Aubin-Lions)*** *Considere X, Y e Z espaços de Banach tal que*

$$X \subset Y \subset Z \quad \text{com} \quad X \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

1. Se F é limitado em $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}; f \in F\right\}$ é limitado em $L^1(0,T;Z)$, então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;Y)$.

2. Se F é limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ é limitado em $L^r(0,T;Z)$ $(r > 1)$, então F é relativamente compacto em $C(0,T;Y)$.

Demonstração: Ver (SIMON, 1987). □

1.2 INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção faremos um breve resumo sobre a teoria de interpolação de espaços de Sobolev. Este conceito será bastante útil durante todo o trabalho. As provas para os resultados seguintes podem ser encontradas em (LIONS; MAGENES, 1968). Também recomendamos (BERGH; LÖFSTRÖM, 2012) para um melhor entendimento da teoria. Sabemos que para os espaços das funções mensuráveis vale o seguinte resultado:

Proposição 1.7 ***(Desigualdade de interpolação)*** *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003). □

Vamos então investigar as propriedades de interpolação para espaços mais gerais. Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, cuja imersão $X \hookrightarrow Y$ é contínua e densa. Sejam $(\cdot,\cdot)_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$ os produtos internos de X e Y, respectivamente.

Considere $D(S)$ o conjunto de todas as funções u's definidas em X, tais que a aplicação $v \mapsto (u,v)_X$, $v \in X$ seja contínua na topologia induzida por Y. Então $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define S, como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y. S definido desta forma é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir $S^\theta, \theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{1/2}$.

O operador A, é auto-adjunto, positivo definido em Y, com domínio X e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y, \text{ para todo } u, v \in X.$$

Definição 1.8 *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D\left(A^{1-\theta}\right),\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

coma a norma

$$||u||_{[X,Y]_\theta} = \left(||u||_Y^2 + \left|\left|A^{1-\theta}u\right|\right|_Y^2\right)^{1/2}.$$

Sobre o espaço intermediário é possível provar que:

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $||u||_{[X,Y]_\theta} \leq ||u||_X^{1-\theta}||u||_Y^\theta$.
3. Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$.
4. $[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Teorema 1.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $s > \dfrac{1}{2}$. Então, as duas condições abaixo são equivalentes*

i) $u \in H_0^s(\Omega)$;

ii) $\left\{u \in H^s(\Omega); \dfrac{\partial^j u}{\partial \eta_j} = 0, \quad 0 \leq j < s - \dfrac{1}{2}\right\}$.

Isto significa dizer que: $H_0^s = \left\{u; u \in H^s(\Omega) \text{ com } \dfrac{\partial^j u}{\partial \eta_j} = 0,\ 0 \leq j < s - \dfrac{1}{2}\right\}$.

Demonstração: Ver (LIONS; MAGENES, 1968). □

Teorema 1.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s_1 \geq s_2 \geq 0$ *com* s_1 *e* s_2 *diferentes de* $k + \frac{1}{2}$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$. *Se* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, *então*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

e

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega), \text{ com } s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

com as normas equivalentes.

Demonstração: Ver (LIONS; MAGENES, 1968). □

1.3 DESIGUALDADES IMPORTANTES

Aqui listaremos algumas desigualdades que serão usadas ao longo do trabalho, também deixamos as referências onde encontram-se suas respectivas provas.

Lema 1.3 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Seja* $z(t)$ *uma função real absolutamente contínua em* $[0,a)$ *tem-se*

$$z(t) = C + \int_0^t z(s)ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t$ *para todo* $t \in [0,a)$.

Demonstração: Ver (CODDINGTON; LEVINSON, 1955). □

Lema 1.4 ***(Desigualdade diferencial de Gronwall)*** *Seja* $u(t)$ *uma função não negativa e diferenciável em* $[0,T]$, *satisfazendo*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t)$$

onde $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções integráveis em* $[0,T]$. *Então*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau}ds\right], \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções não negativas, então a expressão torna-se*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)ds\right], \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver (CODDINGTON; LEVINSON, 1955). □

Lema 1.5 ***(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs)*** *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003). □

Lema 1.6 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver (BREZIS, 2011). □

Lema 1.7 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$||fg||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver (BREZIS, 2011). □

Lema 1.8 ***(Desigualdade de Gagliardo-Niremberg)*** *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ então existe $c > 0$ tal que*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq c||u||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||u_x||^{1/2}_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003). □

1.4 TEORIA DE SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Um ponto importante do nosso estudo é garantir a boa colocação dos problemas de valor inicial e de fronteira que são considerados ao longo do trabalho. Neste sentido, vamos precisar do auxílio da teoria dos semigrupos que nos fornece ferramentas úteis para este propósito. Os resultados que aqui enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).

Definição 1.9 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ um operador linear e limitado de X. Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

1. *$S(0) = I$, no qual I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

2. *$S(t + s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$ (Propriedade dos Semigrupos).*

   Além disso, se S satisfaz

3. *$\lim_{t\to 0^+} ||(S(t) - I)x|| = 0$ para todo $x \in X$,*

   dizemos que S é um semigrupo de classe C^0.

Proposição 1.8 *Se S é um semigrupo de classe C^0, então $||S(t)||_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$. Além disso, existem constantes reais M e ω tais que*

$$||S(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega T}, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Definição 1.10 *Quando $||S(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $t \leq 0$ dizemos que S é um semigrupo uniformemente limitado de classe C_0. Se, além disso, $M = 1$, S é dito um semigrupo de contrações de C^0.*

Proposição 1.9 *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{t\to s} S(t)x = S(s)x, \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Definição 1.11 *Dado um semigrupo S. Considere o operador $A : D(A) \to X$ no qual*

$$D(A) := \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e A é definido por

$$A(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.10 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 é um operador linear fechado e seu domínio é um espaço vetorial denso em X.*

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Proposição 1.11 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Definição 1.12 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal. Colocando $A_0 = I, A_1 = A$ e estando A_{k-1} definido, vamos definir A_k por*

$$A_k x = A(A_{k-1}x), \text{ para todo } x \in D(A_k)$$

onde

$$D(A_k) = \{x \in D(A_{k-1}); A_{k-1}x \in D(A)\}.$$

Proposição 1.12 *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o seu gerador infinitesimal. Então*

1. *$D(A_k)$ é um subespaço de X e A_k é um operador linear de X;*

2. *Se $x \in D(A_k)$, então $S(t)x \in D(A_k)$ para todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = A_k S(t)x = S(t)A_k x, \text{ para todo } k \in \mathbb{N};$$

3. *$\bigcap_k D(A_k)$ é denso em X.*

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Definição 1.13 *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2 \right\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, temos que $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 1.14 *Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, para todo $x \in X$, além disso*

$$||j(x)||_{X^*} = ||x||_X.$$

Definição 1.15 *Dizemos que o operador linear $A : X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j, vale Re$\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0$, para todo $x \in D(A)$.*

No caso em que X é um espaço de Hilbert, temos que $j(x) = x$.

Teorema 1.5 ***(Lumer-Phillips)*** *Se A é um operador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C^0, então:*

1. *A é dissipativo;*

2. *$Im(\lambda I - A) = X$, $\lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

1. *$D(A)$ é denso em X;*

2. *A é dissipativo;*

3. *$Im(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C^0.

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Corolário 1.1 *Seja A um operador linear fechado, densamente definido tal que $D(A)$ e $Im(A)$ estão ambos num espaço de Banach X. Se A e seu operador adjunto A^* são dissipativos, então A gera um semigrupo de contrações de classe C^0.*

Demonstração: Ver (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016).
□

Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear de X e consideremos para cada $u_0 \in X$ o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t),\ t > t_0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Definição 1.16 *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$ é:*

a) uma solução clássica (ou forte) de (1.5) se:

i) u é contínua para todo $t \geq 0$;

ii) u é continuamente diferenciável para $t > 0$;

iii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$;

iv) u satisfaz (1.5).

b) uma solução mild (ou generalizada) de (1.5) se:

i) u é contínua para todo $t \geq 0$;

ii) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ para todo $t \geq 0$;

iii) $u(t) = u(0) + A\int_0^t u(s)ds$.

Vale ressaltar que a solução mild é uma generalização do conceito clássico de solução para equações diferenciais, pois ela não exige que a função $u(t)$ seja diferenciável no sentido clássico. Em vez disso, ela satisfaz a equação de forma integral:

$$u(t) = u(0) + A\int_0^t u(s)ds$$

Em muitos casos, $u(t)$ pode não ser diferenciável no sentido clássico, mas ainda pode ser considerada uma solução válida da equação diferencial no sentido fraco (distribucional).

Teorema 1.6 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C^0. Então:*

a) para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única função

$$u \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X),$$

dita solução clássica do problema de valor inicial dado em (1.5)*. Além disso, se* S *for um semigrupo de contrações temos que*

$$||u(t)|| \leq ||u_0|| \quad e \quad \left|\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|\right| = ||Au(t)|| \leq ||Au_0|| \text{ para todo } t \geq 0.$$

b) Se $u_0 \in X$*, existe uma única solução mild* u *do problema de valor inicial* (1.5)*. Tal que* $u \in C([0, +\infty); X)$ *e podemos escrever* $u = S(t)u_0$*.*

Demonstração: Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016). □

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C^0, $f : \mathbb{R}^+ \to X$ uma função contínua com valores em um espaço de Banach X e consideremos o seguinte problema de valor inicial não homogêneo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \ t > 0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Definição 1.17 *Uma função* $u : \mathbb{R}^+ \to X$ *é dita solução clássica de* (1.6) *se:*

i) u *for contínua para todo* $t \geq 0$*;*

ii) u *for continuamente diferenciável para todo* $t > 0$*;*

iii) $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \geq 0$*;*

iv) u *satisfaz* (1.6)*.*

Definição 1.18 *Seja* A *o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C^0*, consideremos* $u_0 \in X$ *e* $f \in L^1(0, T; X)$*. A função* $u \in C([0, T]; X)$ *dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad 0 \leq t \leq T,$$

é dita solução mild do problema (1.6) *sobre* $[0, T]$*.*

Definição 1.19 *Uma solução mild sobre* $[0, T]$ *para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $F : X \to X$ *é uma função contínua e* A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C^0*, é uma função* $u \in C([0, T], X)$ *dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Teorema 1.7 *Seja $F : X \to X$ uma função Lipschitziana. Então para todo $u_0 \in X$, existe uma única solução mild para o problema* (1.7).

Demonstração: Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016). □

Teorema 1.8 *Seja $F : X \to X$ uma função localmente Lipschitz, ou seja, para todo $R > 0$, existe $L_R \geq 0$ tal que $||u||_X \leq R$ e $||v||_X \leq R$ implica $||Fu - Fv||_X \leq L_R||u - v||_X$. Então, para todo $u_0 \in X$ existe uma função $u \in C([0, +\infty), X)$, solução mild sobre $[0, T]$, a qual pode ser estendida a uma solução maximal sobre $[0, T_{max}]$, com $T_{max} = +\infty$ ou $T_{max} < +\infty$ e $\lim_{t \to T_{max}^-} ||u(t)|| = +\infty$.*

Demonstração: Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016). □

2 BOA COLOCAÇÃO

Neste capítulo abordamos a boa colocação do problema de valor inicial e de fronteira associado à equação de KdV-B. Nas seções 2.1 e 2.2 obtemos, respectivamente, a boa colocação para a equação linear homogênea e não homogênea, no qual utilizamos a teoria de semigrupos e o método dos multiplicadores para atingir nosso objetivo. Já nas seções 2.3 e 2.4 estudamos a boa colocação da equação não linear e da equação modificada, respectivamente. Para estes problemas, além das ferramentas já citadas, também utilizamos o teorema do ponto fixo de Banach.

2.1 EQUAÇÃO KDV-B LINEAR

Considere $I = (0, L)$, com $L > 0$ e $T > 0$. Vamos analisar a boa colocação do seguinte problema de valor inicial e de fronteira homogêneo:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} = 0, & \text{em} \quad I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $y_0 \in L^2(I)$. Defina o operador $A : D(A) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ por

$$Au = u'' - u'''$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ u \in H^3(I); u(0) = u(L) = u'(L) = 0 \right\}.$$

Note que A é densamente definido. De fato, da cadeia

$$C_0^\infty(I) \subset D(A) \subset L^2(I),$$

e sabendo que $\overline{C_0^\infty}^{||\cdot||_{L^2(I)}} = L^2(I)$, obtemos

$$L^2(I) = \overline{C_0^\infty}^{||\cdot||_{L^2(I)}} \subset \overline{D(A)}^{||\cdot||_{L^2(I)}} \subset \overline{L^2(I)}^{||\cdot||_{L^2(I)}} = L^2(I).$$

Portanto $\overline{D(A)}^{||\cdot||_{L^2(I)}} = L^2(I)$, isto é, A é densamente definido. Da teoria de semigrupos obtemos o seguinte resultado para A.

Proposição 2.1 *A é o gerador infinitesimal de um C^0 semigrupo de contrações em $L^2(I)$.*

Demonstração: De acordo com o Corolário 1.1, devemos mostrar que o operador A é fechado, e que A e seu adjunto A^* são dissipativos.

Para que A seja um operador fechado basta provar que $A = A^{**}$. Primeiramente vamos encontrar o operador adjunto de A, isto é, o operador A^* tal que

$$(Au, v)_{L^2(I)} = (u, A^*v)_{L^2(I)},$$

onde

$$(u, v)_{L^2(I)} = \int_0^L uvdx,$$

para todo $u \in D(A)$ e para todo $v \in D(A^*)$ (a ser definido).

Por integração por partes, para todo $u \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned}
(Au, v)_{L^2(I)} &= \int_0^L (u'' - u''')vdx \\
&= \int_0^L u''vdx - \int_0^L u'''vdx \\
&= -u'(0)v(0) - \int_0^L u'v'dx - u''(L)v(L) + u''(0)v(0) + \int_0^L u''v'dx \\
&= -u'(0)v(0) + \int_0^L uv''dx - u''(L)v(L) + u''(0)v(0) - u'(0)v'(0) - \int_0^L u'v''dx \\
&= -u'(0)(v(0) + v'(0)) + \int_0^L uv''dx - u''(L)v(L) + u''(0)v(0) + \int_0^L uv'''dx \\
&= \int_0^L u(v'' + v''')dx - u'(0)(v(0) + v'(0)) + u''(0)v(0) - u''(L)v(L)
\end{aligned}$$

Dessa forma o operador $A^* : D(A^*) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ é definido por

$$A^*v = v'' + v'''$$

com domínio

$$D(A^*) = \left\{ v \in H^3(I); v(0) = v(L) = v'(0) = 0 \right\}.$$

De modo similar, vamos encontrar o operador adjunto de A^*. Tomando $v \in D(A^*)$, novamente por integração por partes temos

$$\begin{aligned}
(A^*v, w)_{L^2(I)} &= \int_0^L (v'' + v''')wdx \\
&= \int_0^L v''wdx + \int_0^L v'''wdx \\
&= v'(L)w(L) - \int_0^L v'w'dx + v''(L)w(L) - v''(0)w(0) - \int_0^L v''w'dx \\
&= v'(L)w(L) + \int_0^L vw''dx + v''(L)w(L) - v''(0)w(0) - v'(L)w'(L) + \int_0^L v'w''dx
\end{aligned}$$

$$= v'(L)(w(L) - w'(L)) + \int_0^L vw''dx + v''(L)w(L) - v''(0)w(0) - \int_0^L vw'''dx$$
$$= \int_0^L v(w'' - w''')dx + v'(L)(w(L) - w'(L)) + v''(L)w(L) - v''(0)w(0)$$

Logo, o operador $A^{**} : D(A^{**}) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ é definido como

$$A^{**}w = w'' - w'''$$

com domínio

$$D(A^{**}) = \left\{ w \in H^3(I); w(0) = w(L) = w'(L) = 0 \right\}.$$

Evidentemente $A = A^{**}$, logo podemos concluir que A é um operador fechado.

Mostremos agora que A e A^* são dissipativos. Para $u \in D(A)$ vale

$$\begin{aligned}
(Au, u)_{L^2(I)} &= \int_0^L (u'' - u''')udx \\
&= \int_0^L u''udx - \int_0^L u'''udx \\
&= -\int_0^L (u')^2dx + \int_0^L u'u''dx \\
&= -\int_0^L (u')^2dx + \int_0^L \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(u')^2dx
\end{aligned}$$

Então,

$$(Au, u)_{L^2(I)} = -\int_0^L (u')^2dx - \frac{u'(0)^2}{2} \leq 0.$$

Analogamente, temos que $\langle A^*v, v\rangle_{L^2(I)} \leq 0$. Portanto, A é o gerador infinitesimal de um C^0 semigrupo de contrações. $\square$

De agora em diante, denotaremos por $(S(t)_{t\geq 0})$ o semigrupo de contrações associado a A.

Observação 2.1 *De modo análogo resulta que A^* também gera um C^0 semigrupo de contrações em $L^2(I)$.*

Para quaisquer $0 < T_1 < T_2 < +\infty$, introduzimos o espaço de Banach

$$B_{(T_1,T_2)} = C\left([T_1, T_2]; L^2(I)\right) \cap L^2\left(T_1, T_2; H_0^1(I)\right)$$

munido com usa norma usual

$$||y(x,t)||_{B_{(T_1,T_2)}} = \max_{t\in[T_1,T_2]} ||y(\cdot,t)||_{L^2(I)} + \int_{T_1}^{T_2} ||y(\cdot,t)||^2_{H_0^1(I)}dt.$$

Para simplificar, denotemos $B_{(0,T)}$ por B_T quando $(T_1, T_2) = (0, T)$.

Nosso primeiro resultado de boa colocação garante a existência de soluções do sistema (2.1).

Proposição 2.2 *Sejam $T > 0$ e $y_0 \in L^2(I)$. Então existe $y \in B_T$, solução mild do sistema* (2.1)*, tal que*

$$||y||_{B_T} \leq C(L)||y_0||_{L^2(I)}.$$

Demonstração: Para $y_0 \in L^2(I)$, de acordo com o Teorema 1.6 e pela Proposição 2.1, escrevemos a solução mild como $y(\cdot,t) = S(t)y_0$, dessa forma $y \in C([0,T]; L^2(I))$ e

$$||y||_{y\in C([0,T];L^2(I))} \leq ||y_0||_{L^2(I)}. \tag{2.2}$$

Para provar que $y \in L^2(0,T; H_0^1(I))$, vamos assumir primeiramente que $y_0 \in D(A)$, isso será necessário para justificar os cálculos a seguir.

A partir de agora, por questão de simplicidade, escreveremos $\int\int u$ ao invés de $\int_0^T \int_0^L u(x,t)dxdt$ e $\int u|_0^L$ (resp. $\int u|_0^T$) ao invés de $\int_0^T u(x,t)|_0^L dt$ (resp. $\int_0^L u(x,t)|_0^T dx$).

Seja $q \in C^\infty([0,L] \times [0,T])$, multiplicando a primeira equação de (2.1) por yq e integrando em $I \times (0,T)$ obtemos

$$\int_0^L \int_0^T qy(y_t - y_{xx} + y_{xxx})dxdt = 0.$$

Utilizando as condições de fronteira do sistema (2.1) e integrando por partes temos

$$\int_0^L q\frac{y^2}{2}\bigg|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L q_t\frac{y^2}{2}dxdt + \int_0^T \int_0^L q_x\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right)dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^L qy_x^2 dxdt - \int_0^T \int_0^L q_x y y_{xx} dxdt - \int_0^T \int_0^L q\frac{d}{dx}\left(\frac{y_x^2}{2}\right)dxdt = 0.$$

Novamente por integração por partes, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^L qy^2\bigg|_0^T dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_t y^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_{xx}y^2 dxdt + \int_0^T \int_0^L qy_x^2 dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^L q_{xx}\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right)dxdt + \int_0^T \int_0^L q_x y_x^2 dxdt$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^T (qy_x^2)(0,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_x y_x^2 dxdt = 0,$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\int_0^L qy^2\bigg|_0^T dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_t y^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_{xx}y^2 dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^L qy_x^2 dxdt + \int_0^T q_{xx}\,\frac{y^2}{2}\bigg|_0^L dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_{xxx}y^2 dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^L q_x y_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T (qy_x^2)(0,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L q_x y_x^2 dxdt = 0.$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^L (qy^2)(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_0^L (qy^2)(x,0)dx - \int_0^T\int_0^L (q_t + q_{xx} + q_{xxx})\frac{y^2}{2}dxdt\\ &+\int_0^T\int_0^L \left(q+\frac{3}{2}q_x\right)y_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T (qy_x^2)(0,t)dt = 0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Considere $q(x,t) = -e^{-\frac{2}{3}x} + 1$. Temos então que q satisfaz

$$\begin{cases} q + \dfrac{3}{2}q_x = 1, \\ q_t + q_{xx} + q_{xxx} = -\dfrac{4}{27}e^{-\frac{2}{3}x}, \\ q(0,t) = 0. \end{cases}$$

Além disso, $q(x,t) > 0$ para $x > 0$ e $\sup_{0\leq x\leq L} q(x,t) = -e^{-\frac{2}{3}L} + 1 = M(L)$. Substituindo $q = -e^{-\frac{2}{3}x} + 1$ em (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt =& \frac{1}{2}\int_0^L \left(-e^{-\frac{2}{3}x}+1\right)y_0^2(x)dx - \frac{4}{54}\int_0^T\int_0^L \left(-e^{-\frac{2}{3}x}+1\right)y^2 dxdt\\ &- \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(-e^{-\frac{2}{3}x}+1\right)y^2\right](x,T)dxdt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $y \in C([0,T];L^2(I))$, temos que $y(x,T) \in L^2(I)$. Assim

$$0 \leq \int_0^L \left[\left(-e^{-\frac{2}{3}x}+1\right)y^2\right](x,T)dxdt \leq M(L)||y(\cdot,T)||_{L^2(I)}.$$

Além disso,

$$\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt \leq ||y||^2_{C([0,T];L^2(I))}\int_0^T dt \leq T||y_0||^2_{L^2(I)},$$

dessa forma

$$0 \leq \int_0^T\int_0^L \left(-e^{-\frac{2}{3}x}+1\right)y^2 dxdt \leq M(L)T||y_0||^2_{L^2(I)}.$$

A partir das limitações acima podemos estimar (2.4) como

$$\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt \leq \frac{1}{2}M(L)||y_0||^2_{L^2(I)} \leq M(L)||y_0||^2_{L^2(I)}. \tag{2.5}$$

Então concluímos que $y \in L^2(0,T;H^1(I))$ e vale

$$||y||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq C(L)||y_0||_{L^2(I)}. \tag{2.6}$$

Portanto,

$$||y||_{B_T} = ||y||_{C([0,T];L^2(I))} + ||y||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq C(L)||y_0||_{L^2(I)}. \tag{2.7}$$

Provando assim a dependência contínua da solução para $y_0 \in D(A)$. Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(I)$ o resultado se estende para todo $y_0 \in L^2(I)$. $\square$

Usando o método dos multiplicadores obtemos estimativas úteis para a solução mild do sistema (2.1).

Proposição 2.3 *Para $y_0 \in L^2(I)$, temos que $y_x(0,\cdot) \in L^2(0,T)$ e as seguintes estimativas seguem*

$$||y_x(0,\cdot)||_{L^2(0,T)} \leq ||y_0||_{L^2(I)} \tag{2.8}$$

e

$$||y_0||^2_{L^2(I)} \leq C(L)\left(\frac{1}{T}||S(\cdot)y_0||^2_{L^2(I\times(0,T))} + ||y_x(0,\cdot)||^2_{L^2(0,T)}\right). \tag{2.9}$$

Demonstração: Novamente considere $y_0 \in D(A)$. Tomando $q = 1$ em (2.3), sabendo que $y(x,T) \in L^2(I)$ e que vale (2.6), obtemos

$$\int_0^T y_x^2(0,t)dt = \int_0^L y^2(x,0)dx - \int_0^L y^2(x,T)dx - 2\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt \leq \int_0^L y^2(x,0)dx. \tag{2.10}$$

Por outro lado, $q = T - t$ em (2.3) nos dá

$$\frac{T}{2}\int_0^L y_0^2 dx = \int_0^T\int_0^L (T-t)y_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T (T-t)y_x^2(0,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt.$$

Notando que $T - t < T$ para $t \in (0,T)$ segue que

$$\frac{T}{2}\int_0^L y_0^2 dx \leq T\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt + \frac{T}{2}\int_0^T y_x^2(0,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt,$$

o que implica

$$\int_0^L y_0^2 dx \leq 2\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt + \int_0^T y_x^2(0,t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt.$$

Por (2.5) temos que

$$\int_0^L y_0^2 dx \leq M(L)\int_0^L y_0^2 dx + \int_0^T y_x^2(0,t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt.$$

Como $1 - M(L) = e^{-\frac{2}{3}L} > 0$, obtemos que

$$\int_0^L y_0^2 dx \leq C(L)\left(\int_0^T y_x^2(0,t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L y^2 dxdt\right). \tag{2.11}$$

Graças a (2.10) podemos estender continuamente a aplicação $y_0 \in D(A) \mapsto y_x(0,\cdot) \in L^2(0,T)$ para a aplicação $y_0 \in L^2(I) \mapsto y_x(0,\cdot) \in L^2(0,T)$. No que segue, denotaremos por $y_x(0,\cdot)$ o valor desta aplicação para qualquer $y_0 \in L^2(I)$. Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(I)$ e por (2.10) e (2.11) segue que (2.8) e (2.9) são válidos para todo $y_0 \in L^2(I)$. $\square$

2.2 EQUAÇÃO KDV-B NÃO HOMOGÊNEA

Agora vamos considerar um termo fonte $f \in L^2(I \times (0,T))$ na equação linear, a saber:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} = f, & \text{em} \quad I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.12}$$

com dado inicial $y_0 \in L^2(I)$. Segue da imersão $L^2(0,T;L^2(I)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(I))$ que $f \in L^1(0,T;L^2(I))$. Além disso, temos

$$||f||_{L^1(0,T;L^2(I))} \leq \sqrt{T}||f||_{L^2(0,T;L^2(I))}.$$

Portanto, da teoria de semigrupos, o sistema (2.12) admite solução mild dada por

$$y(\cdot,t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(\cdot,s)ds. \tag{2.13}$$

O próximo resultado garante que a solução mild para o sistema (2.12) está na classe B_T.

Proposição 2.4 *Sejam $T > 0, y_0 \in L^2(I)$ e $f \in L^2(I \times (0,T))$. Então existe $y \in B_T$ solução mild do sistema* (2.12), *tal que*

$$||y||_{B_T} \leq C(L,T)(||y_0||_{L^2(I)} + ||f||_{L^2(I\times(0,T))}).$$

Demonstração: Por (2.13) segue que

$$\begin{aligned} ||y||_{C([0,T];L^2(I))} &= \sup_{0\leq t\leq T} ||y(\cdot,t)||_{L^2(I)} \\ &= \sup_{0\leq t\leq T} \left|\left| S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(\cdot,s)ds \right|\right|_{L^2(I)} \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq T} ||S(t)y_0||_{L^2(I)} + \left|\left| \int_0^t S(t-s)f(\cdot,s)ds \right|\right|_{L^2(I)} \\ &\leq ||y_0||_{L^2(I)} + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t ||S(t-s)||_{L^2(I)}||f(\cdot,s)||_{L^2(I)}ds \\ &\leq ||y_0||_{L^2(I)} + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t ||f(\cdot,s)||_{L^2(I)}ds \\ &\leq ||y_0||_{L^2(I)} + \int_0^T ||f(\cdot,s)||_{L^2(I)}ds \\ &\leq ||y_0||_{L^2(I)} + ||f||_{L^1(0,T;L^2(I))} \\ &\leq ||y_0||_{L^2(I)} + \sqrt{T}||f||_{L^2(I\times(0,T))}, \end{aligned}$$

provando que $y \in C([0,T];L^2(I))$.

Para mostrar que $y \in L^2(0,T;H_0^1(I))$, assuma $y_0 \in D(A)$ e tome $q \in C^\infty((I \times (0,T)))$. Multiplicando a primeira equação em (2.12) por qy, integrando em $I \times (0,T)$ e procedendo da mesma maneira que na Proposição 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^L (qy^2)(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_0^L (qy^2)(x,0)dx - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (q_t + q_{xx} + q_{xxx})y^2 dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L \left(q + \frac{3}{2}q_x\right) y_x^2 dxdt + \int_0^T (qy_x^2)(0,t)dt = \int_0^T\int_0^L qyf dxdt.
\end{aligned}$$

Escolhendo $q(x,t) = -e^{\frac{2}{3}x} + 1$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt =& \frac{1}{2}\int_0^L \left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) y_0^2 dx - \frac{4}{54}\int_0^T\int_0^L \left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) y^2 dxdt \\
&- \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) y^2\right](x,T)dx + \int_0^T\int_0^L \left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) yf dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_0^L \left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) yf dxdt\right| &\leq M(L)\int_0^T\int_0^L |yf| dxdt \\
&\leq M(L)\left(\int_0^T\int_0^L |y|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_{L^2(I\times(0,T))} \\
&\leq M(L)||y||_{C([0,T];L^2(I))}\sqrt{T}||f||_{L^2(I\times(0,T))} \\
&\leq M(L)\sqrt{T}\left(||y_0||_{L^2(I)} + \sqrt{T}||f||_{L^2(I\times(0,T))}\right)||f||_{L^2(I\times(0,T))},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_0^L \left(-e^{\frac{2}{3}x} + 1\right) yf dxdt\right| \leq& M(L)\sqrt{T}||y_0||_{L^2(I)}||f||_{L^2(I\times(0,T))} \\
&+ M(L)T||f||^2_{L^2(I\times(0,T))}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Graças as estimativas (2.5) e (2.14) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L y_x^2 dxdt &\leq M(L)||y_0||^2_{L^2(I)} + M(L)\sqrt{T}||y_0||_{L^2(I)}||f||_{L^2(I\times(0,T))} + M(L)T||f||^2_{L^2(I\times(0,T))} \\
&\leq M(L)||y_0||^2_{L^2(I)} + 2M(L)\sqrt{T}||y_0||_{L^2(I)}||f||_{L^2(I\times(0,T))} + M(L)T||f||^2_{L^2(I\times(0,T))} \\
&\leq M(L)\left(||y_0||_{L^2(I)} + \sqrt{T}||f||_{L^2(I\times(0,T))}\right)^2.
\end{aligned}$$

Concluindo que

$$||y||_{L^2(0,T;H_0^1(I))} \leq C(L,T)\left(||y_0||_{L^2(I)} + ||f||_{L^2(I\times(0,T))}\right),$$

e assim

$$||y||_{B_T} \leq C(L,T)\left(||y_0||_{L^2(I)} + ||f||_{L^2(I\times(0,T))}\right). \tag{2.15}$$

Novamente, o resultado quando $y_0 \in L^2(I)$ segue da densidade de $D(A)$ em $L^2(I)$. $\square$

2.3 EQUAÇÃO KDV-B NÃO-LINEAR

Nesta seção abordamos a boa colocação do sistema não linear, a saber,

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = 0, & \text{em} \quad I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ y(x,0) = y_0, & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.16}$$

com dado inicial $y_0 \in L^2(I)$. O primeiro passo é mostrar que o termo não linear pode ser visto como um termo fonte da equação linear. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1 *Seja $u \in B_T$. Então $uu_x \in L^1(0,T;L^2(I))$ e a aplicação*

$$u \in B_T \mapsto uu_x \in L^1(0,T;L^2(I))$$

é contínuo. Mais precisamente, para $K = \sqrt{2}$ tal que para qualquer $u, v \in B_T$ vale a seguinte estimativa

$$\int_0^T ||uu_x - vv_x||_{L^2(I)} dt \leq KT^{\frac{1}{4}} \left(||u||_{B_T} + ||v||_{B_T}\right) ||u-v||_{B_T}.$$

Demonstração: Primeiramente, para $z \in H_0^1(I)$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} |z(x)|^2 &= \left| \int_0^x \frac{d}{ds} z^2(s) ds \right| \\ &= 2 \left| \int_0^x z(s) z'(s) ds \right| \\ &\leq 2 \int_0^x |z(s) z'(s)| \, ds \\ &\leq 2 \int_0^L |z(s) z'(s)| \, ds \\ &\leq 2 ||z||_{L^2(I)} ||z'||_{L^2(I)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$||z||^2_{L^\infty(I)} \leq 2||z||_{L^2(I)}||z'||_{L^2(I)}.$$

Sendo $u \in B_T$, a desigualdade garante que

$$\begin{aligned} ||u||^2_{L^2(0,T;L^\infty(I))} &= \int_0^T ||u(\cdot,t)||^2_{L^\infty(I)} dt \\ &\leq 2 \int_0^T ||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} ||u_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\ &\leq 2||u||_{L^\infty(0,T;L^2(I))} \int_0^T ||u_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\ &\leq 2||u||_{L^\infty(0,T;L^2(I))} T^{\frac{1}{2}} ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}. \end{aligned}$$

O que implica

$$||u||_{L^2(0,T;L^\infty(I))} \leq \sqrt{2}T^{\frac{1}{4}}||u||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^2(I))}||u||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;H_0^1(I))}.$$

Dessa forma, para $u, v \in B_T$ temos

$$\begin{aligned}
||uu_x - vv_x||_{L^1(0,T;L^2(I))} =& ||uu_x - vu_x + vu_x - vv_x||_{L^1(0,T;L^2(I))} \\
\leq& \int_0^T ||(u-v)u_x||_{L^2(I)}dt + \int_0^T ||v(u_x - v_x)||_{L^2(I)}dt \\
\leq& \int_0^T ||u-v||_{L^\infty(I)}||u_x||_{L^2(I)}dt + \int_0^T ||v||_{L^\infty(I)}||u_x - v_x||_{L^2(I)}dt \\
\leq& ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}||u-v||_{L^2(0,T;L^\infty(I))} \\
&+ ||u-v||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}||v||_{L^2(0,T;L^\infty(I))} \\
\leq& \sqrt{2}T^{\frac{1}{4}}||u||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}||u-v||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^2(I))}||u-v||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;H_0^1(I))} \\
&+ \sqrt{2}T^{\frac{1}{4}}||u-v||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}||v||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^2(I))}||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;H_0^1(I))} \\
\leq& \frac{\sqrt{2}}{2}T^{\frac{1}{4}}||u||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}\left(||u-v||_{L^\infty(0,T;L^2(I))} + ||u-v||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}\right) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2}T^{\frac{1}{4}}||u-v||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}\left(||v||_{L^\infty(0,T;L^2(I))} + ||v||_{L^2(0,T;H_0^1(I))}\right) \\
\leq& \sqrt{2}T^{\frac{1}{4}}\left(||u||_{B_T} + ||v||_{B_T}\right)||u-v||_{B_T}.
\end{aligned}$$

Portanto, se considerarmos que $v = 0$, obtemos que uu_x pertence a classe $L^1(0,T;L^2(I))$. Além disso, se fizermos v tender a u em B_T, isso resulta na continuidade da aplicação $u \mapsto uu_x$.

□

Agora, temos condições de provar o seguinte resultado de boa colocação.

Proposição 2.5 *Para quaisquer $T > 0$ e $y_0 \in L^2(I)$, o sistema* (2.16) *admite uma única solução $y \in B_T$, que também satisfaz*

$$||y||_{B_T} \leq C\left(||y_0||_{L^2(I)}\right).$$

Demonstração: Inicialmente percebemos que se y é solução do problema (2.16), então y satisfaz

$$y_t - y_{xx} + y_{xxx} = -yy_x.$$

Por esta razão, consideramos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases}
z_t - z_{xx} + z_{xxx} = -yy_x, & \text{em} \quad I \times (0,\alpha), \\
z(0,t) = z(L,t) = z_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,\alpha), \\
z(x,0) = y_0, & \text{em} \quad I,
\end{cases} \tag{2.17}$$

com $0 < \alpha < T$, a ser escolhido posteriormente, $y_0 \in L^2(I)$ e $y \in B_\alpha$. Graças ao Lema 2.1 e à Proposição 2.4 garantimos a existência de solução mild $z \in B_\alpha$ para o problema (2.17) tal que

$$||z||_{B_\alpha} \leq C\left(||y_0||_{L^2(I)} + ||yy_x||_{L^1(0,\alpha;L^2(I))}\right).$$

Consideremos a aplicação $\Phi : B_\alpha \to B_\alpha$ definida por $\Phi(y) = z$, no qual z é solução de (2.17) correspondente a y. Note que $y \in B_\alpha$ é uma solução de (2.17) em $I \times (0, \alpha)$ se, e somente se, y é um ponto fixo da aplicação Φ. Então, vamos mostrar que Φ é uma contração.

De fato, note que

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)||_{B_\alpha} &\leq C\left(||y_0||_{L^2(I)}\right) + C||uu_x||_{L^1(0,\alpha,L^2(I))} \\ &\leq \underbrace{C\left(||y_0||_{L^2(I)}\right)}_{A} + CK\alpha^{\frac{1}{4}}||u||^2_{B_\alpha} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ||\Phi(u) - \Phi(v)||_{B_\alpha} &\leq C||uu_x - vv_x||_{L^1(0,\alpha,L^2(I))} \\ &\leq CK\alpha^{\frac{1}{4}}\left(||u||_{B_\alpha} + ||v||_{B_\alpha}\right)||u - v||_{B_\alpha}. \end{aligned}$$

Agora, consideramos Φ restrito a bola fechada $\mathcal{B} = \{u \in B_\alpha; ||u||_{B_\alpha} \leq R\}$ com $R > 0$ a ser escolhido. Dessa forma, para $u, v \in \mathcal{B}$, temos

$$||\Phi(u)||_{B_\alpha} \leq A + CK\alpha^{\frac{1}{4}}R^2$$

e

$$||\Phi(u) - \Phi(v)||_{B_\alpha} \leq 2CK\alpha^{\frac{1}{4}}R||u - v||_{B_\alpha}.$$

Considerando $R = 2A$ obtemos

$$||\Phi||_{B_\alpha} \leq \frac{R}{2} + CK\alpha^{\frac{1}{4}}RR.$$

Escolhendo α suficientemente pequeno tal que $CKR\alpha^{\frac{1}{4}} = \gamma < \dfrac{1}{2}$ resulta

$$||\Phi||_{B_\alpha} < R \quad \text{e} \quad ||\Phi(u) - \Phi(v)||_{B_\alpha} < \gamma||u - v||_{B_\alpha},$$

provando que Φ é uma contração. Consequentemente, podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Banach para garantir que $y = \Phi(y)$ é a única solução do sistema (2.7).

Pelo argumento de extensão descrito no Teorema 1.8, cuja demonstração pode ser vista em (PAZY, 2012) ou (PALOMINO; CAVALCANTI; DOMINGOS-CAVALCANTI, 2016), podemos estender α para T, obtendo uma solução $y \in B_T$ que satisfaz

$$||y||_{B_T} \leq C\left(||y_0||_{L^2(I)}\right).$$

$\square$

O próximo resultado será fundamental para garantirmos a existência de controles admissíveis. Ele garante uma estabilidade exponencial da solução do sistema (2.16). Os métodos utilizados para demonstrar este resultado foram inspirados em (SMAOUI; AL-JAMAL, 2008).

Proposição 2.6 *Seja y solução de* (2.16). *Então y satisfaz*

$$||y(\cdot,t)||_{L^2(I)} \leq ||y_0||_{L^2(I)} e^{-t}.$$

Demonstração: Multiplicando por $2y$ a primeira equação do sistema (2.17) e integrando em I obtemos

$$\int_0^L 2yy_t - \int_0^L 2yy_{xx}dx + \int_0^L 2yy_{xxx}dx + \int_0^L 2yyy_x dx = 0.$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira de (2.17), segue que

$$\frac{d}{dt}||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + 2||y_x(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + y_x^2(0,t) = 0,$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq -2||y_x(\cdot,t)||^2_{L^2(I)}.$$

Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$||y||_{L^2(I)} \leq ||y_x||_{L^2(I)},$$

dessa forma

$$\frac{d}{dt}||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq -2||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)}.$$

Integrando em $(0,t)$ obtemos

$$||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} - ||y(\cdot,0)||^2_{L^2(I)} \leq -2\int_0^t ||y(\cdot,s)||^2_{L^2(I)}ds$$

o que implica

$$||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq \int_0^t -2||y(\cdot,s)||^2_{L^2(I)}ds + ||y_0||^2_{L^2(I)}.$$

Pelo desigualdade de Gronwall segue que

$$||y(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq ||y_0||^2_{L^2(I)} e^{\int_0^t -2ds},$$

ou equivalentemente

$$||y(\cdot,t)||_{L^2(I)} \leq ||y_0||_{L^2(I)} e^{-t}.$$

$\square$

De modo similar às Proposições 2.4 e 2.5 obtemos a boa colocação para o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = f, & \text{em} \quad I \times (0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T), \\ y(x,0) = y_0, & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.18}$$

com $y_0 \in L^2(I)$ e $f \in L^2(I \times (0,T))$. O resultado de boa colocação segue através da seguinte proposição.

Proposição 2.7 *Para quaisquer* $T > 0, y_0 \in L^2(I)$ *e* $f \in L^2(I \times (0,T))$, *o sistema* (2.18) *admite uma única solução* $y \in B_T$, *satisfazendo*

$$||y||_{B_T} \leq C\left(||y_0||_{L^2(I)} + ||f||_{L^2(I\times(0,T))}\right).$$

2.4 EQUAÇÃO KDV-B MODIFICADA

Agora vamos considerar a boa colocação da seguinte equação KdV-B modificada

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x + (\xi y)_x = 0, & \text{em} \quad I \times (\delta,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta,T), \\ y(x,\delta) = y_\delta(x) & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{2.19}$$

A boa colocação para o sistema (2.19) é garantida pela proposição a seguir.

Proposição 2.8 *Para quaisquer* $0 < \delta < T < +\infty$ *e* $\xi \in B_T$, *podemos encontrar uma constante positiva* ϵ *tal que para qualquer* $y_\delta \in L^2(I)$, *satisfazendo* $||y_\delta||_{L^2(I)} \leq \epsilon$, *o sistema* (2.19) *admite uma única solução* $y \in B_{(\delta,T)}$ *com*

$$||y||_{B(\delta,T)} \leq C||y_\delta||_{L^2(I)},$$

onde $C = C(T, ||\xi||_{B_T}) > 0$ *não depende de* δ.

Demonstração: Primeiramente consideramos o sistema linearizado

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + \left(\dfrac{z}{2}y\right)_x + (\xi y)_x = 0, & \text{em} \quad I \times (\delta,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta,T), \\ y(x,\delta) = y_\delta(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.20}$$

com $z \in B_{(\delta,T)}$ e $\xi \in B_T$. Note que se $y \in B_{(\delta,T)}$ é solução de (2.20), então y satisfaz

$$y_t - y_{xx} + y_{xxx} = -(\psi y)_x,$$

onde $\psi = \dfrac{z}{2} + \xi \in B_{(\delta,T)}$. Dessa forma, para $\alpha > 0$ a ser escolhido e $\psi, y \in B_{(\delta,T)}$, considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \tilde{y}_t - \tilde{y}_{xx} + \tilde{y}_{xxx} = f, & \text{em} \quad I \times (\delta, \delta+\alpha), \\ \tilde{y}(0,t) = \tilde{y}(L,t) = \tilde{y}_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta, \delta+\alpha), \\ \tilde{y}(x,\delta) = y_\delta(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.21}$$

com $f = -(\psi y)_x$. Por um argumento semelhante ao do Lema 2.1 temos que

$$||(\psi y)_x||_{L^1(\delta,\delta+\alpha;L^2(I))} \leq \sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{4}}||\psi||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}||y||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Seja $||z||_{B_{(\delta,T)}} < r_1$, com $r_1 > 0$ independente de δ. Pela teoria de semigrupos, temos que (2.21) admite solução $\tilde{y} \in B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ tal que

$$\begin{aligned} ||\tilde{y}||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} &\leq C(L)||y_\delta||_{L^2(I)} + C(L)||f||_{L^1(\delta,\delta+\alpha;L^2(I))} \\ &\leq C(L)||y_\delta||_{L^2(I)} + \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_1, ||\xi||_{B_T})||y||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}. \end{aligned}$$

Considere $\Lambda : B_{(\delta,\delta+\alpha)} \to B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ que associa y a $\Lambda(y)$ solução de (2.21). Seja $\mathcal{B}_S = \left\{ y \in B_{(\delta,\delta+\alpha)}; ||y||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq S \right\}$. Daí, para $y_1, y_2 \in \mathcal{B}_S$ temos

$$||\Lambda(y_1)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq C(L)||y_\delta||_{L^2(I)} + \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_1, ||\xi||_{B_T})S$$

e

$$||\Lambda(y_1) - \Lambda(y_2)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_1, ||\xi||_{B_T})||y_1 - y_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Tome $S = 2C(L)||y_\delta||_{L^2(I)}$ e α suficientemente pequeno tal que

$$\alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_1, ||\xi||_{B_T}) \leq \frac{1}{2}.$$

Dessa forma

$$||\Lambda(y_1)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq S \quad \text{e} \quad ||\Lambda(y_1) - \Lambda(y_2)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq \frac{1}{2}||y_1 - y_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Logo Λ é uma contração e então (2.21) admite um único ponto fixo $\Lambda(y) = y$ em $B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ satisfazendo

$$||y||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq C(L, r_1, ||\xi||_{B_T})||y_\delta||_{L^2(I)}.$$

Pelo Teorema 1.8, obtemos y solução de (2.21) tal que

$$||y||_{B_{(\delta,T)}} \leq C(L, r_1, ||\xi||_{B_T})||y_\delta||_{L^2(I)}. \tag{2.22}$$

Defina agora $\Gamma : B_{(\delta,T)} \to B_{(\delta,T)}$ dado por $\Gamma(z) = y$, no qual y é a solução de (2.20) correspondente a z. Para quaisquer $z_1, z_2 \in B_{(\delta,T)}$, sejam, $y_1 = \Gamma(z_1)$ e $y_2 = \Gamma(z_2)$. Considere então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + w_{xxx} = g, & \text{em} \quad I \times (\delta, \delta+\alpha), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta, \delta+\alpha), \\ w(x,\delta) = 0, & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.23}$$

no qual $g = -\left(\frac{z_2}{2}h\right)_x - (\xi h)_x - \left(\frac{z_1 - z_2}{2}y_1\right)_x$, com $h \in B_{(\delta,T)}$. Novamente por um argumento semelhante ao do Lema 2.1 temos que

$$\begin{aligned} ||g||_{L^1(\delta,\delta+\alpha;L^2(I))} \leq \sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{4}} \Bigg[\left|\left|\frac{z_2}{2}\right|\right|_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} ||h||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} + ||\xi||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}||h||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \\ + \frac{1}{2}||z_1 - z_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}||y_1||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \Bigg], \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} ||g||_{L^1(\delta,\delta+\alpha;L^2(I))} \leq \sqrt{2}\alpha^{\frac{1}{4}} \left(\left|\left|\frac{z_2}{2}\right|\right|_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} + ||\xi||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \right) ||h||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \\ + \frac{\sqrt{2}}{2}T^{\frac{1}{4}}||z_1 - z_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}||y_1||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}. \end{aligned}$$

Usando novamente a teoria de semigrupos e do resultado anterior, existe $r_2 > 0$, independente de δ, tal que para $||z_2||_{B_{(\delta,T)}} \leq r_2$, o sistema (2.23) admite solução $w \in B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ tal que

$$||w||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq C(L,T)||z_1 - z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_1||_{B_{(\delta,T)}} + \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_2, ||\xi||_{B_T})||h||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Considere $\mathcal{B}_M = \left\{ h \in B_{(\delta,\delta+\alpha)}; ||h||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq M \right\}$ e defina $\Phi : B_{(\delta,\delta+\alpha)} \to B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ tal que $\Phi(h) = w$ com w solução de (2.23). Logo para $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_M$ temos

$$||\Phi(h_1)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq C(L,T)||z_1 - z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_1||_{B_{(\delta,T)}} + \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_2, ||\xi||_{B_T})M$$

e

$$||\Phi(h_1) - \Phi(h_2)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq \alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_2, ||\xi||_{B_T})||h_1 - h_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Escolha $M = 2C(L,T)||z_1 - z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_1||_{B_{(\delta,T)}}$ e α suficientemente pequeno tal que

$$\alpha^{\frac{1}{4}}C(L, r_2, ||\xi||_{B_T}) \leq \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, temos

$$||\Phi(h_1)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq M \quad \text{e} \quad ||\Phi(h_1)-\Phi(h_2)||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}} \leq \frac{1}{2}||h_1-h_2||_{B_{(\delta,\delta+\alpha)}}.$$

Portanto Φ é uma contração, consequentemente, pelo teorema do ponto fixo de Banach existe uma única $h \in B_{(\delta,\delta+\alpha)}$ que, pelo Teorema 1.8, podemos estender a uma única $h \in B_{(\delta,T)}$ solução de

$$\begin{cases} h_t - h_{xx} + h_{xxx} + \left(\dfrac{z_2}{2}h\right)_x + (\xi h)_x + \left(\dfrac{z_1-z_2}{2}y_1\right)_x = 0, & \text{em} \quad I \times (\delta,T), \\ h(0,t) = h(L,t) = h_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta,T), \\ h(x,\delta) = 0, & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{2.24}$$

tal que

$$||h||_{B_{(\delta,T)}} \leq C(T,r_2,||\xi||_{B_T})||z_1-z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_z||_{B_{(\delta,T)}}.$$

Defina $\mathcal{B}_R = \Big\{z \in B_{(\delta,T)}; ||z||_{B_{(\delta,T)}} \leq R\Big\}$, com $R = \min\{r_1,r_2\}$. Daí para quaisquer $z_1,z_2 \in \mathcal{B}_R$, considere $\tilde{h} = \Gamma(z_1)-\Gamma(z_2) = y_1-y_2$. Verifica-se que

$$\tilde{h}_t - \tilde{h}_{xx} + \tilde{h}_{xxx} + \left(\frac{z_2}{2}\tilde{h}\right)_x + (\xi\tilde{h})_x + \left(\frac{z_1-z_2}{2}y_1\right)_x = 0.$$

Além disso,

$$\tilde{h}(0,t) = \tilde{h}(L,t) = \tilde{h}_x(L,t) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{h}(x,\delta) = y_1(x,\delta) - y_2(x,\delta) = y_\delta - y_\delta = 0.$$

Logo, $\tilde{h}$ satisfaz (2.24). Consequentemente, por unicidade de solução, segue que $\tilde{h} = h$. Dessa forma

$$||\Gamma(z_1)-\Gamma(z_2)||_{B_{(\delta,T)}} = ||h||_{B_{(\delta,T)}} \leq C(T,r_2,||\xi||_{B_{(\delta,T)}})||z_1-z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_1||_{B_{(\delta,T)}}.$$

Pela estimativa (2.22) concluímos que

$$||\Gamma(z_1)-\Gamma(z_2)||_{B_{(\delta,T)}} \leq C(T,r_2,||\xi||_{B_T})||z_1-z_2||_{B_{(\delta,T)}}||y_\delta||_{L^2(I)}.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que se $||y_\delta||_{L^2(I)} \leq \epsilon$ implique em $C(T,r_2,||\xi||_{B_T})||y_\delta||_{L^2(I)} \leq \dfrac{1}{2}$ temos que

$$||\Gamma(z_1)||_{B_{(\delta,T)}} \leq R \quad \text{e} \quad ||\Gamma(z_1)-\Gamma(z_2)||_{B_{(\delta,T)}} \leq \frac{1}{2}||z_1-z_2||_{B_{(\delta,T)}}.$$

Portanto Γ é uma contração, consequentemente, Γ admite um único ponto fixo $\Gamma(y) = y$ solução de (2.20) tal que $||y||_{B_{(\delta,T)}} \leq C||y_\delta||_{L^2(I)}$. $\square$

3 CONTROLABILIDADE NULA

Neste capítulo, discutiremos a controlabilidade nula da equação KdV-B, tanto no caso linearizado quanto no caso não linear.

3.1 EQUAÇÃO KDV-B LINEARIZADA

Primeiramente consideramos o sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + (\zeta y)_x = f\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ y(x, T_1) = y_{T_1}(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\zeta = \zeta(x,t)$ é uma função dada em $B_{(T_1,T_2)}$, $\omega = (l_1, l_2) \subset I$ e $y_{T_1} \in L^2(I)$. Nosso objetivo é provar a controlabilidade nula para o sistema acima. Para isso, iremos estabelecer uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto correspondente

$$\begin{cases} v_t + v_{xx} + v_{xxx} + \zeta v_x = 0, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(0,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ v(x, T_2) = v_{T_2}(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $v_{T_2} \in L^2(I)$. Agora, vamos obter algumas estimativas para a equação adjunta que serão úteis posteriormente.

3.1.1 Estimativas de energia

Considere o seguinte sistema adjunto com dado final nulo

$$\begin{cases} v_t + v_{xx} + v_{xxx} = f, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(0,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ v(x, T_2) = 0, & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{3.3}$$

Aplicando o método dos multiplicadores juntamente com o auxilio da teoria de semigrupos segue que, para $f \in L^2(T_1, T_2; H^{-1}(I)) \cup L^1(T_1, T_2; L^2(I))$, a solução v do sistema (3.3) pertence a $C([T_1, T_2]; L^2(I)) \cap L^2(T_1, T_2; H^1(I))$. Além disso, vale

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C||f||_{L^2(T_1,T_2;H^{-1}(I))}, \tag{3.4}$$

para $f \in L^2(T_1, T_2; H^{-1}(I))$ e

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C||f||_{L^1(T_1,T_2;L^2(I))}, \tag{3.5}$$

para $f \in L^1(T_1, T_2; L^2(I))$.

Agora, vamos mostrar que a solução está na classe $C([T_1, T_2]; H^3(I)) \cap L^2(T_1, T_2; H^4(I))$ quando $f \in L^2(T_1, T_2; H_0^2(I)) \cup L^1(T_1, T_2; (H^3 \cap H_0^2)(I))$. Considere o operador $P = \partial_{xx} + \partial_{xxx}$, então a primeira equação em (3.3) pode ser escrita como

$$v_t + Pv = f \quad \text{em} \quad I \times (T_1, T_2). \tag{3.6}$$

Das condições de contorno em (3.3) temos que

$$Pv(0,t) = Pv(L,t) = (Pv)_x(0,t) = 0 \quad \text{em} \quad (T_1, T_2).$$

Aplicando o operador P em (3.6) obtemos

$$(Pv)_t + (Pv)_{xx} + (Pv)_{xxx} = Pf \quad \text{em} \quad I \times (T_1, T_2).$$

Como $f \in L^2(T_1, T_2; H_0^2(I)) \cup L^1(T_1, T_2; (H^3 \cap H_0^2)(I))$ segue que $Pf \in L^2(T_1, T_2; H^{-1}(I)) \cup L^1(T_1, T_2; (L^2(I))$. Logo das duas últimas equações, e também por (3.4) e (3.5) concluímos que

$$||Pv||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C||Pf||_{L^2(T_1,T_2;H^{-1}(I))}, \tag{3.7}$$

para $f \in L^2(T_1, T_2; H_0^2(I))$ e

$$||Pv||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C||Pf||_{L^1(T_1,T_2;L^2(I))}, \tag{3.8}$$

para $f \in L^1(T_1, T_2; (H^3 \cap H_0^2)(I))$. Segue, por interpolação, que

$$\begin{aligned}
||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^3(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))} &\leq C\Big(||v_{xxx}||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \\
&\qquad +||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\Big) \\
&\leq C\Big(||Pv - v_{xx}||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \\
&\qquad +||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\Big),
\end{aligned}$$

e para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
||v_{xx}||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} &\leq \varepsilon||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^3(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))} \\
&\qquad + C(\varepsilon)||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))}.
\end{aligned}$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno obtemos que

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^3(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))} \leq C\Big(||Pv||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))} + ||v||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\Big).$$

Combinando (3.4), (3.7), (3.8) e do fato que

$$||Pf||_{L^2(T_1,T_2;H^{-1}(I))} \leq C||f||_{L^2(T_1,T_2;H^2(I))} \quad \text{e} \quad ||Pf||_{L^1(T_1,T_2;L^2(I))} \leq C||f||_{L^1(T_1,T_2;H^3(I))},$$

obtemos que

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^3(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))} \leq C||f||_{L^2(T_1,T_2;H^2_0(I))}, \tag{3.9}$$

para $f \in L^2(T_1,T_2;H^2_0(I))$ e

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^3(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))} \leq C||f||_{L^1(T_1,T_2;(H^3\cap H^2_0)(I))}, \tag{3.10}$$

para $f \in L^1(T_1,T_2;(H^3 \cap H^2_0)(I))$. Interpolando entre (3.4), (3.5), (3.9) e (3.10), obtemos que para $f \in L^2(T_1,T_2;L^2(I)) \cup L^1(T_1,T_2;(H^3 \cap H^1_0)(I))$ a solução v do sistema (3.3) pertence a $C([T_1,T_2];H^1(I)) \cap L^2(T_1,T_2;H^2(I))$ e valem as seguintes estimativas:

$$||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^1(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^2(I))} \leq C||f||_{L^2(T_1,T_2;L^2(I))}, \tag{3.11}$$

para $f \in L^2(T_1,T_2;L^2(I))$ e

$$|||v||_{L^\infty(T_1,T_2;H^1(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^2(I))} \leq C||f||_{L^1(T_1,T_2;(H^3\cap H^1_0)(I)}, \tag{3.12}$$

para $f \in L^1(T_1,T_2;(H^3 \cap H^1_0)(I))$.

3.1.2 Desigualdade de Carleman

A desigualdade de observabilidade associada a solução do sistema (3.2) será construída através de uma estimativa de Carleman obtida em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015). Para tal, considere $\omega = (l_1,l_2)$ tal que $0 < l_1 < l_2 < L$. Tome $\psi \in C^3([0,L])$ satisfazendo

$$\psi > 0, \quad \text{em} \quad [0,L]; \tag{3.13}$$

$$|\psi'| > 0, \psi'' < 0 \quad \text{e} \quad \psi'\psi''' < 0, \quad \text{em} \quad [0,L]\backslash\omega; \tag{3.14}$$

$$\psi'(0) < 0 \quad \text{e} \quad \psi'(L) > 0; \tag{3.15}$$

$$\min_{x\in[l_1,l_2]} \psi(x) = \psi(l_3) < \max_{x\in[l_1,l_2]} \psi(x) = \psi(l_1) = \psi(l_2), \quad \max_{x\in[0,L]} \psi(x) = \psi(0) = \psi(L) \tag{3.16}$$

$$\psi(0) < \frac{4}{3}\psi(l_3), \tag{3.17}$$

para algum $l_3 \in (l_1, l_2)$.

Podemos provar a existência de uma ψ definida em $[0, L] \backslash \omega$ como segue:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varepsilon x^3 - x^2 - x + c_1, & \text{se} \quad x \in [0, l_1], \\ -\varepsilon x^3 + ax + c_2, & \text{se} \quad x \in [l_2, L], \end{cases}$$

onde $\varepsilon, a, c_1, c_2 > 0$ são escolhidos convenientemente. Para que $\psi(0) = \psi(L)$ devemos ter $c_1 = c_2 - \varepsilon L^3 + aL$. Dessa forma $\psi(l_1) = \psi(l_2)$ é equivalente a

$$\varepsilon l_1^3 - l_1^2 - l_1 - \varepsilon L^3 + aL = -\varepsilon l_2^3 + al_2,$$

ou seja,

$$a = (L - l_2)^{-1} \left(l_1^2 + l_1 - \varepsilon l_2^3 - \varepsilon l_1^3 + \varepsilon L^3 \right).$$

Logo, $\psi(l_1) = \psi(l_2)$ e $\psi(0) = \psi(L)$ se, e somente se,

$$c_1 = c_2 - \varepsilon L^3 + aL, \quad a = (L - l_2)^{-1} \left(l_1^2 + l_1 - \varepsilon l_2^3 - \varepsilon l_1^3 + \varepsilon L^3 \right).$$

Da forma como ψ foi definida, temos que

$$\psi'(x) = \begin{cases} 3\varepsilon x^2 - 2x - 1, & \text{se} \quad x \in [0, l_1], \\ -3\varepsilon x^2 + a, & \text{se} \quad x \in [l_2, L], \end{cases}$$

$$\psi''(x) = \begin{cases} 6\varepsilon x - 2, & \text{se} \quad x \in [0, l_1], \\ -6\varepsilon x, & \text{se} \quad x \in [l_2, L], \end{cases}$$

$$\psi'''(x) = \begin{cases} 6\varepsilon, & \text{se} \quad x \in [0, l_1], \\ -6\varepsilon, & \text{se} \quad x \in [l_2, L], \end{cases}$$

e

$$(\psi' \psi''')(x) = \begin{cases} 18\varepsilon^2 x^2 - 12\varepsilon x - 6\varepsilon, & \text{se} \quad x \in [0, l_1], \\ -18\varepsilon^2 x^2 - 6\varepsilon a, & \text{se} \quad x \in [l_2, L]. \end{cases}$$

Então podemos ver que $a > 0, c_1 - c_2 > 0$ e as condições (3.14) e (3.15) são válidas quando tomamos $0 < \varepsilon \ll 1$. Já as condições (3.13) e (3.17) são satisfeitas para $c_2 \gg 1$. Por fim, a condição (3.16) é fácil de verificar.

Defina

$$\varphi(x, t) = \frac{\psi(L - x)}{(t - T_1)(T_2 - t)}. \tag{3.18}$$

Para $f \in L^2(I \times (T_1, T_2))$ e $q_{T_2} \in L^2(I)$, denote por q a solução do sistema:

$$\begin{cases} q_t + q_{xxx} = f, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ q(0,t) = q(L,t) = q_x(0,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ q(x, T_2) = q_{T_2}(x), & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{3.19}$$

Nossa primeira estimativa de Carleman está relacionada a solução do sistema (3.19) e é obtida através do seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Dados* $0 < T_1 < T_2 < +\infty$. *Existem duas constantes* $C > 0$ *e* $s_0 > 0$ *tais que para quaisquer* $f \in L^2(I \times (T_1, T_2)), q_{T_2} \in L^2(I)$ *e* $s > s_0$, *a solução* q *de* (3.19) *satisfaz*

$$\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2} \int_0^L \left[s\varphi |q_{xx}|^2 + (s\varphi)^3 |q_x|^2 + (s\varphi)^5 |q|^2 \right] e^{-2s\varphi} dxdt \\ &\leq C \left(\int_{T_1}^{T_2} \int_0^L |f|^2 e^{-2s\varphi} dxdt + \int_{T_1}^{T_2} \int_{l_1}^{l^2} \left[s\varphi |q_{xx}|^2 + (s\varphi)^3 |q_x|^2 + (s\varphi)^5 |q|^2 \right] e^{-2s\varphi} dxdt \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Demonstração: Primeiramente, assuma que $q_{T_2} \in D(A)$ e que $f \in (C[T_1, T_2]; D(A))$, então $q \in C([T_1, T_2]; D(A)) \cap C^1([0, T]; L^2(I))$. Isto será necessário para legitimar os próximos cálculos. O caso geral, isto é, consideramos $q_{T_2} \in L^2(I)$ e $f \in L^2(I \times (T_1, T_2))$, segue por densidade. Definindo a função

$$p(x,t) := \sqrt{\varphi(l_3, t)} e^{-s\varphi(l_3, t)} q(x,t),$$

temos que p resolve (3.19) com 0 no lugar de q_{T_2} e f trocado por

$$\tilde{f} = \sqrt{\varphi} e^{-s\varphi} f + \left(\frac{1}{2} \varphi_t \varphi^{-\frac{1}{2}} e^{-s\varphi} - s\varphi_t \sqrt{\varphi} e^{-s\varphi} \right) q.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \int_0^L \varphi |q_{xx}|^2 e^{-2s\varphi} dxdt &\leq C ||p||^2_{L^2(0,T,H^2(I))} \\ &\leq C ||\tilde{f}||^2_{L^2(0,T,L^2(I))} \\ &\leq C \left(||f||^2_{L^2(I \times (T_1, T_2))} + ||q_{T_2}||^2_{L^2(I)} \right). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$||q||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq C \left(||f||_{L^2(I \times (T_1,T_2))} + ||q_{T_2}||^2_{L^2(I)} \right)$$

obtemos

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^L \varphi^5 |q|^2 e^{-2s\varphi} dxdt \leq C \left(||f||_{L^2(I \times (T_1,T_2))} + ||q_{T_2}||^2_{L^2(I)} \right).$$

Portanto, podemos garantir a dependência contínua de cada termo em (3.20). Isso nos permite tomar o limite ao considerarmos uma sequência $\left\{(q_{T_2}^n, f^n)\right\}_{n\geq 0}$ em $D(A)\times C([T_1,T_2],D(A))$, tal que $q_{T_2}^n \to q_{T_2}$ em $L^2(I)$ e $f^n \to f$ em $L^2(I\times(T_1,T_2))$.

Considerando $q_{T_2}\in D(A)$ e $f\in C([T_1,T_2];D(A))$. Denote por q a solução de (3.19) e seja

$$u = e^{-s\varphi}q \quad \text{e} \quad Pu = e^{-s\varphi}L(e^{s\varphi}u),$$

onde $L=\partial_t+\partial_x^3$. Por (3.18), e das condições de contorno de q, obtemos que

$$u_{|x=0} = u_{|x=L} = u_{x|x=0} = 0. \tag{3.21}$$

Além disso, pela forma que u foi definida e levando (3.13) em consideração, concluimos que

$$u_{|t=T_1} = u_{|t=T_2} = 0. \tag{3.22}$$

Note que

$$Pu = u_t + u_{xxx} + 3s\varphi_x u_{xx} + (3s^2\varphi_x^2 + 3s\varphi_{xx})u_x + (s^3\varphi_x^3 + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx} + s(\varphi_t+\varphi_{xxx}))u.$$

Inspirados em (YAMAMOTO, 2009), buscamos estimar inferiormente o termo

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L e^{-2s\varphi}f^2dxdt = \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L |Pu|^2dxdt = ||Pu||^2_{L^2(I\times(T_1.T_2))},$$

Uma forma de se obter tal estimativa é considerando

$$||Pu||^2_{L^2(I\times(T_1,T_2))} = ||P_+u||^2_{L^2(I\times(T_1,T_2))} + ||P_-u||^2_{L^2(I\times(T_1,T_2))} + 2(P_+u,P_-u),$$

de modo que

$$||Pu||^2_{L^2(I\times(T_1,T_2))} \geq 2(P_+u,P_-u), \tag{3.23}$$

onde P_+ e P_- são as partes simétrica e antissimétrica do operador P, respectivamente.

Considerando P^* como operador adjunto de P, isto é,

$$(Pu,v)_{L^2(I\times(T_1,T_2))} = (u,P^*v)_{L^2(I\times(T_1,T_2))},$$

temos que

$$P_+ = \frac{1}{2}(P+P^*) \quad \text{e} \quad P_- = \frac{1}{2}(P-P^*).$$

Calculando o produto interno de Pu com v em $L^2(I\times(T_1,T_2))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L Pu\,vdxdt =& \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L u_{xxx}vdxdt + 3s\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_x u_{xx}dxdt + 3s^2\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_x^2 u_x vdxdt\\
=& -\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L uv_tdxdt - \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L uv_{xxx}dxdt + 3s\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L (2\varphi_{xx}v_x + \varphi_x v_{xx})udxdt\\
&- 3s^2\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_x^2 v_x udxdt - 3s^2\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_x\varphi_{xx}uvdxdt - 3s\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_{xx}v_x udxdt\\
&+ s^3\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \varphi_x^3 uvdxdt + s\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L (\varphi_x + \varphi_{xxx})uvdxdt.
\end{aligned}$$

Dessa forma

$$P^*u = -u_t - u_{xxx} + 3s\varphi_x u_{xx} + (3s\varphi_{xx} - 3s^2\varphi_x^2)u_x + \left(-3s\ 2\varphi_x\varphi_{xx} + s^3\varphi_x^3 + s(\varphi_t + \varphi_{xxx})\right) u.$$

Logo

$$P_+u = 3s(\varphi_x u_{xx} + \varphi_{xx}u_x) + \left[s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^3\varphi_x^3\right] u$$

e

$$P_-u = u_t + u_{xxx} + 3s^2(\varphi_x^2 u_x + \varphi_x\varphi_{xx}u).$$

Como visto em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015), a prova de desigualdade de Carleman será obtida em dois passos. No primeiro passo será obtido uma expressão exata para o produto interno em (3.23) e no segundo passo obtemos estimativas usando as condições (3.13)-(3.17).

A partir de agora, por questão de simplicidade, escreveremos $\int\int u$ ao invés de $\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L u dx dt$ e $\int u|_0^L$ (respectivamente $\int u|_{T_1}^{T_2}$) ao invés de $\int_{T_1}^{T_2} u|_0^L dt$ (respectivamente $\int_0^L u|_{T_1}^{T_2}$).

Passo 1: Obtendo a expressão para $2(P_+u, P_-u)$.

Podemos escrever

$$2(P_+u, P_-u) = 2\int\int \left[s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^3\varphi_x^3\right] uP_-u + 2\int\int 3s(\varphi_x u_{xx} + \varphi_{xx}u_x)P_-u := I_1 + I_2.$$

Considere

$$\alpha := s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^3\varphi_x^3. \tag{3.24}$$

Da expressão de P_-u podemos decompor I_1 como

$$I_1 = \int\int 2\alpha u u_t + \int\int 2\alpha u u_{xxx} + 3s^2\int\int 2\alpha u(\varphi_x^2 u_x + \varphi_x\varphi_{xx}u).$$

Integrando por partes e utilizando (3.21) obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int\int \alpha_t u^2 + 3\int\int \alpha_x u_x^2 - \int\int \alpha_{xxx}u^2 - \int \alpha u_x^2\Big|_0^L - 3s^2\int\int \varphi_x^2\alpha_x u^2 \\ &= -\int\int \left(\alpha_t + \alpha_{xxx} + 3s^2\varphi_x^2\alpha_x\right) u^2 + 3\int\int \alpha_x u_x^2 - \int \alpha u_x^2\Big|_0^L. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Em seguida vamos analisar

$$I_2 = 2\int\int 3s(\varphi_x u_{xx} + \varphi_{xx}u_x)(u_t + u_{xxx} + 3s^2(\varphi_x^2 u_x + \varphi_x\varphi_{xx}u)).$$

Utilizando integração por partes sucessivas vezes, segue que

$$\begin{aligned} 2\int\int(\varphi_x u_{xx} + \varphi_{xx}u_x)u_t &= \int\int \varphi_{xt}u_x^2, \\ 2\int\int(\varphi_x u_{xx} + \varphi_{xx}u_x)u_{xxx} &= -3\int\int \varphi_{xx}u_{xx}^2 + \int\int \varphi_{4x}u_x^2 \\ &\quad + \int \left(\varphi_x u_{xx}^2 - \varphi_{xxx}u_x^2 + 2\varphi_{xx}u_{xxx}u_x\right)\Big|_0^L, \end{aligned}$$

e

$$2\int\int(\varphi_x u_{xx}+\varphi_{xx}u_x)(\varphi_x^2 u_x+\varphi_x\varphi_{xx}u) = -3\int\int\varphi_x^2\varphi_{xx}u_x^2 + \int\int\left[\left(\varphi_x^2\varphi_{xx}\right)_{xx}-\left(\varphi_x\varphi_{xx}^2\right)_x\right]u^2+\int\varphi_x^3u_x^2\Big|_0^L.$$

Então

$$\begin{aligned} I_2 =& -9s\int\int\varphi_{xx}u_{xx}^2+\int\int\left[-27s^3\varphi_x^2\varphi_{xx}+3s(\varphi_{xt}+\varphi_{4x})\right]u_x^2 \\ &+\int\int 9s^3\left[(\varphi_x^2\varphi_{xx})_{xx}-(\varphi_x\varphi_{xx}^2)_x\right]u^2 \\ &+\int\left[3s\left(\varphi_x u_{xx}^2-\varphi_{xxx}u_x^2+2\varphi_{xx}u_xu_{xx}\right)+9s^3\varphi_x^3u_x^2\right]_0^L. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Somando (3.25) e (3.26), concluímos que

$$\begin{aligned} 2(P_+u,P_-u) =& \int\int\left[-(\alpha_t+\alpha_{xxx}+3s^2\varphi_x^2\alpha_x)+9s^3\left((\varphi_x^2\varphi_{xx})_{xx}-(\varphi_x\varphi_{xx}^2)_x\right)\right]u^2 \\ &+\int\int\left[3\alpha_x-27s^3\varphi_x^2\varphi_{xx}+3s(\varphi_{xt}+\varphi_{4x})\right]u_x^2-9s\int\int\varphi_{xx}u_{xx}^2 \\ &+\int\int\left[3s\varphi_xu_{xx}^2+(9s^3\varphi_x^3-3s\varphi_{xxx}-\alpha)u_x^2+2\varphi_{xx}u_xu_{xx}\right]_0^L. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Passo 2: Agora vamos estimar cada termo em (3.27) através de uma série de afirmações.

Afirmação 3.1 *Existem constantes $s_1>0$ e $C_1>1$ tal que para todo $s>s_1$, temos*

$$\int\int\left[-(\alpha_t+\alpha_{xxx}+3s^2\varphi_x^2\alpha_x)+9s^3\left((\varphi_x^2\varphi_{xx})_{xx}-(\varphi_x\varphi_{xx}^2)_x\right)\right]u^2 \geq C_1^{-1}\int\int(s\varphi)^5u^2-C_1\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega(s\varphi)^5u^2.$$

De fato, da forma como α foi definido em (3.24) vemos que o termo com a maior potência de s é

$$-3s^5\varphi_x^2(\varphi_x^3)_x=-9s^5\varphi_x^4\varphi_{xx}=-9s^5\frac{(\psi')^4\psi''}{(t-T_1)^5(T_2-t)^5}=-9s^5\frac{(\psi')^4\psi''}{(t-T_1)^5(T_2-t)^5}\cdot\frac{\psi^5}{\psi^5}.$$

Por (3.14) concluímos, para algum $\kappa_1>0$ e para todo $s>0$, que

$$-3s^5\varphi_x^2(\varphi_x^3)_x\geq\kappa_1(s\varphi)^5,\ \text{com } (x,t)\in([0,L]\backslash\omega)\times(T_1,T_2).$$

Por outro lado, temos para alguma constante $\kappa_2>0$ e todo $s>0$, que vale

$$|\alpha_t|+|\alpha_{xxx}|+|9s^3((\varphi_x^2\varphi_{xx})_{xx}-(\varphi_x\varphi_{xx}^2)_x)|\leq\kappa_2s^3\varphi^4,\ \text{com } (x,t)\in I\times(T_1,T_2),$$

e

$$|3s^2\varphi_x^2\alpha_x|\leq\kappa_2(s\varphi)^5,\ \text{com } (x,t)\in\omega\times(T_1,T_2).$$

Então, para s_1 suficientemente grande, a afirmação 3.1 segue.

Afirmação 3.2 *Existem constantes $s_2 > 0$ e $C_2 > 1$ tal que para todo $s > s_2$, temos*

$$\int\int \left[3\alpha_x - 27s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3s(\varphi_{xt} + \varphi_{4x})\right] u_x^2 \;\geq\; C_2^{-1}\int\int (s\varphi)^3 u_x^2 \;-\; C_2\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega (s\varphi)^3 u_x^2.$$

Novamente por (3.24) e (3.14) podemos estimar o termo com a maior potência de s como

$$\begin{aligned} 3\alpha_x - 27s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} = -18s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} &= -18s^3\frac{(\psi')^2\psi''}{(t-T_1)^3(T_2-t)^3} \\ &\geq \kappa_3(s\varphi)^3, \text{ com } (x,t) \in ([0,L]\backslash\omega) \times (T_1,T_2), \end{aligned}$$

para algum $\kappa_3 > 0$ e todo $s > 0$. Por outro lado, para algum $\kappa_4 > 0$ e todo $s > 0$ se verifica

$$|6s(\varphi_{tx} + \varphi_{4x})| \leq \kappa_4(s\varphi)^2, \text{ com } (x,t) \in I \times (T_1,T_2),$$

e

$$18s^3\varphi_x^2\varphi_{xx}| \leq \kappa_4(s\varphi)^3, \text{ com } (x,t) \in \omega \times (T_1,T_2).$$

Então, para s_2 suficientemente grande, a afirmação 3.2 segue.

Afirmação 3.3 *Existem constantes $s_3 > 0$ e $C_3 > 1$ tal que para todo $s > s_3$, temos*

$$-9s\int\int \varphi_{xx}u_{xx}^2 \geq C_3^{-1}\int\int s\varphi u_{xx}^2 - C_3\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega s\varphi u_{xx}^2.$$

Basta notar que $\psi'' < 0$ em $[0,L]\backslash\omega$, logo para algum $C_3 > 1$ e $s_3 > 0$ suficientemente grande, segue para todo $s > s_3$, que

$$-9s\varphi_{xx} \geq C_3^{-1}s\varphi, \text{ com } (x,t) \in ([0,L]\backslash\omega) \times (T_1,T_2),$$

e

$$|9s\varphi_{xx}| \leq C_3 s\varphi, \text{ com } (x,t) \in \omega \times (T_1,T_2),$$

mostrando a afirmação.

Afirmação 3.4 *Exitem constantes $s_4 > 0$ e $C_4 > 1$ tal que para todo $s > s_4$, temos*

$$\begin{aligned} &\int \left[3s\varphi_x u_{xx}^2 + (9s^3\varphi_x^3 - 3s\varphi_{xxx} - \alpha)u_x^2 + 2\varphi_{xx}u_x u_{xx}\right]\Big|_0^L \\ &\qquad \geq C_4^{-1}\int_{T_1}^{T_2}\left[(s\varphi u_{xx}^2)_{|x=0} + (s\varphi u_{xx}^2)_{|x=L} + (s^3\varphi^3 u_x^2)_{|x=L}\right] dt. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada termo da integral separadamente. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} 3s\varphi_x u_{xx}^2\Big|_0^L &= 3s\varphi_x u_{xx}^2\Big|_{x=L} - 3s\varphi_x u_{xx}^2\Big|_{x=0} \\ &= 3s\frac{-\psi'(L-x)}{(t-T_1)(T_2-t)} \cdot \frac{\psi(L-x)}{\psi(L-x)}u_{xx}^2\Bigg|_{x=L} \\ &\quad + 3s\frac{\psi'(L-x)}{(t-T_1)(T_2-t)} \cdot \frac{\psi(L-x)}{\psi(L-x)}u_{xx}^2\Bigg|_{x=0}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.15), para alguma constante $\kappa_5 > 0$ e para todo $s > s_4$ com s_4 suficientemente grande, temos

$$3s\varphi_x u_{xx}^2\Big|_0^L \geq \kappa_5 \left(\left[s\varphi u_{xx}^2 \right]_{|x=L} + \left[s\varphi u_{xx}^2 \right]_{|x=0} \right).$$

Como $u_{x|x=0} = 0$ e, por (3.24), vale

$$\left(9s^3\varphi_x^3 - 3s\varphi_{xxx} - \alpha\right) u_x^2 = \left(8s^3\varphi_x^3 - s(\varphi_t + 4\varphi_{xxx})\right) u_x^2.$$

Então, novamente utilizando (3.15), para alguma constante $\kappa_6 > 0$ e para todo $s > s_5$ com s_5 suficientemente grande, se verifica que

$$\left[\left(9s^3\varphi_x^3 - 3s\varphi_{xxx} - \alpha\right) u_x^2\right]\Big|_0^L \geq \kappa_6 \left[(s\varphi)^3 u_x^2\right]_{|x=L}.$$

Finalmente, pela desigualdade de Young, obtemos

$$|\left[2s\varphi_{xx} u_x u_{xx}\right]_{|x=L}| \leq \frac{\kappa_6}{2} \left[s\varphi u_{xx}^2 \right]_{|x=L} + \kappa_7 \left[s\varphi u_x^2 \right]_{|x=L},$$

para alguma constante $\kappa_7 > 0$. Uma vez que $s\varphi(L,t) \ll (s\varphi)^3(L,t)$, para $s \gg 1$, segue a afirmação 3.4.

Portanto, concluímos, das afirmações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, para algumas constantes positivas s_0, C e para todo $s > s_0$, que

$$\begin{aligned}
&\iint \left[(s\varphi)^5|u|^2 + (s\varphi)^3|u_x|^2 + s\varphi|u_{xx}|^2\right] \\
&+ \int_{T_1}^{T_2} \left[\left(s\varphi u_{xx}^2\right)_{|x=0} + \left(s\varphi u_{xx}^2\right)_{|x=L} + \left(s^3\varphi^3 u_x^2\right)_{|x=L} \right] dt \\
\leq& C \left(\iint |Pu|^2 + \int_{T_1}^{T_2} \int_\omega \left[(s\varphi)^5|u|^2 + (s\varphi)^3|u_x|^2 + s\varphi|u_{xx}|^2\right] \right).
\end{aligned}$$

Notando que

$$\left(s\varphi u_{xx}^2\right)_{|x=0} + \left(s\varphi u_{xx}^2\right)_{|x=L} + \left(s^3\varphi^3 u_x^2\right)_{|x=L} \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
\iint &\left[(s\varphi)^5|u|^2 + (s\varphi)^3|u_x|^2 + s\varphi|u_{xx}|^2\right] \\
&\leq C \left(\iint |Pu|^2 + \int_{T_1}^{T_2} \int_\omega \left[(s\varphi)^5|u|^2 + (s\varphi)^3|u_x|^2 + s\varphi|u_{xx}|^2\right] \right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Substituindo u por $e^{-s\varphi}q$ em (3.28) obtemos exatamente a desigualdade (3.20), como queríamos mostrar. $\square$

Agora, vamos buscar por uma estimativa de Carleman para a solução do sistema (3.2). Deste modo, como consequência da Proposição 3.1, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1 *Seja* $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$. *Então existem constantes positivas* $\tilde{s}_0 = \tilde{s}_0\left(|T_2 - T_1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}\right)$ *e* $C = C\left(|T_2 - T_1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}\right)$ *tal que para todos* $s > \tilde{s}_0$ *e* $v_{T_2} \in L^2(I)$, *a solução* v *de* (3.2) *satisfaz*

$$\begin{aligned}\iint \left[(s\varphi)^5|v|^2 + (s\varphi)^3|v_x|^2 + s\varphi|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\varphi} \\ \leq C\left(\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega \left[(s\varphi)^5|v|^2 + (s\varphi)^3|v_x|^2 + s\varphi|v_{xx}|^2\right]\right) e^{-2s\varphi}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Demonstração: É fácil ver que a solução v de (3.2) satisfaz (3.19) com $q_{T_2} = v_{T_2}$ e $f = -v_{xx} - \zeta v_x$. Então segue que $u = e^{-s\varphi}v$, daí

$$e^{-s\varphi}f = -e^{-s\varphi}(v_{xx} + \zeta v_x) = -(u_{xx} + 2s\varphi_x u_x + s^2\varphi_x^2 u + s\varphi_{xx}u) - \zeta(u_x + s\varphi_x u).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}f^2e^{-2s\varphi} = u_{xx}^2 &+ (4s\varphi_x + 2\zeta)u_x u_{xx} + 2(s^2\varphi_x^2 + s\varphi_{xx} + \zeta s\varphi_x)uu_{xx} + (4s^2\varphi_x^2 + 4s\zeta\varphi_x + \zeta^2)u_x^2 \\ &+ (4s^3\varphi_x^3 + 4s^2\varphi_x\varphi_{xx} + 6s^2\zeta\varphi_x^2 + 2s\zeta\varphi_{xx} + 2s\zeta^2\varphi_x)uu_x \\ &+ (s^4\varphi_x^4 + 2s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 2\zeta s^3\varphi_x^3 + 2\zeta s^2\varphi_{xx}\varphi_x + \zeta^2 s^2\varphi_x^2)u^2.\end{aligned}$$

Analisando os termos $u_x u_{xx},\ uu_{xx}$ e uu_x com a maior potência de s segue, da desigualdade de Young, que

i)

$$\begin{aligned}4\int\int s\varphi_x u_x u_{xx} &= 4\int\int (s\varphi_x u_x)(u_{xx}) \\ &\leq 2\int\int s^2\varphi_x^2 u_x^2 + 2\int\int u_{xx}^2;\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}2\int\int s^2\varphi_x^2 uu_{xx} &= 2\int\int (s^2\varphi_x^2 u)(u_{xx}) \\ &\leq \int\int s^4\varphi_x^2 u^2 + \int\int u_{xx}^2;\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}4\int\int s^3\varphi_x^3 uu_x &= 4\int\int \left(s^{\frac{4}{2}}\varphi_x^{\frac{4}{2}}u\right)\left(s^{\frac{2}{2}}\varphi_x^{\frac{2}{2}}u_x\right) \\ &\leq 2\int\int s^4\varphi_x^4 u^2 + 2\int\int s^2\varphi_x^2 u_x^2.\end{aligned}$$

Logo, para s suficientemente grande, obtemos que

$$\int\int f^2 e^{-2s\varphi} \le C(|T_2 - T_1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}) \int\int \left(s^4\varphi_x^4 u^2 + s^2\varphi_x^2 u_x^2 + u_{xx}^2\right).$$

Das propriedades de ψ podemos escrever

$$s^4\varphi_x^4 = s^4 \cdot \frac{\psi'^4(L-x)}{(t-T_1)^4(T_2-t)^4} = s^4 \cdot \frac{\psi'(L-x)}{(t-T_1^4)(T_2-t)^4} \cdot \frac{\psi^4(L-x)}{\psi^4(L-x)} = Cs^4\varphi^4$$

e

$$s^2\varphi_x^2 = Cs^2\varphi^2,$$

para diferentes constantes $C > 0$. Então

$$\int\int f^2 e^{-2s\varphi} \le C(|T_2 - T - 1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}) \int\int \left((s\varphi)^4 u^2 + (s\varphi)^2 u_x^2 + u_{xx}^2\right).$$

Tomando $s \ge \dfrac{2C(|T_2 - T - 1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}) \cdot C}{\varphi}$, onde $C > 0$ é a constante em (3.28), temos

$$C(|T_2 - T - 1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}})(s\varphi)^4 u^2 \le \frac{1}{2C}(s\varphi)^5 u^2.$$

Fazendo a mesma análise para os outros termos podemos encontrar $\tilde{s}_0 > 0$ tal que para $s > \tilde{s}_0$ temos

$$\int\int f^2 e^{-2s\varphi} \le \frac{1}{2C}\int\int \left((s\varphi)^5 u^2 + (s\varphi)^3 u_x^2 + s\varphi u_{xx}^2\right).$$

Combinando esta desigualdade com (3.28) e trocando u por $e^{-s\varphi}v$, obtemos (3.29), como queríamos. □

Com relação a função peso $\varphi(x,t) = \dfrac{\psi(L-x)}{(t-T_1)(T_2-t)}$, introduzimos as funções

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{(t-T_1)(T_2-t)} \max_{x\in[0,L]} \psi(x) = \frac{\psi(0)}{(t-T_1)(T_2-t)} \tag{3.30}$$

e

$$\check{\varphi}(t) = \frac{1}{(t-T_1)(T_2-t)} \min_{x\in[0,L]} \psi(x) = \frac{\psi(l_3)}{(t-T_1)(T_2-t)}. \tag{3.31}$$

Por (3.17) sabemos que

$$\hat{\varphi}(t) < \frac{4}{3}\check{\varphi}(t), \quad t \in (T_1, T_2). \tag{3.32}$$

Nosso próximo objetivo é remover os termos com v_x e v_{xx} do lado direito de (3.29), para tal iremos provar o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Sejam* $0 < l_1 < l_2 < L$, $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$ *e* $\tilde{s}_0$ *como em* (3.29). *Então existe uma constante* $C = C\left(|T_2 - T_1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}\right) > 0$ *tal que para quaisquer* $s > \tilde{s}_0$ *e* $v_{T_2} \in L^2(I)$, *a solução* v *do sistema* (3.2) *satisfaz*

$$\int_Q \left[(s\check{\varphi})^5|v|^2 + (s\check{\varphi})^3|v_x|^2 + s\check{\varphi}|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\hat{\varphi}} dxdt \le Cs^{10}\int_{T_1}^{T_2} e^{s(6\hat{\varphi}-8\check{\varphi})}\check{\varphi}^{31}||v(\cdot,t)||_{L^2(\omega)}^2 dt,$$

onde $Q = I \times (T_1, T_2)$ *e* $\omega = (l_1, l_2) \subset I$.

Demonstração: De (3.29) e (3.30)-(3.32), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_Q \left[(s\check{\varphi})^5|v|^2 + (s\check{\varphi})^3|v_x|^2 + s\check{\varphi}|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\hat{\varphi}}dxdt\\ &\leq C\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega \left[s^5\check{\varphi}^5|v|^2 + s^3\check{\varphi}^3|v_x|^2 + s\check{\varphi}|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\check{\varphi}}dxdt \\ &= C(I_0 + I_2 + I_2).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como $\hat{\varphi}$ e $\check{\varphi}$ não dependem de x, temos que

$$I_1 \leq s^3\int_{T_1}^{T_2} \check{\varphi}^3 e^{-2s\check{\varphi}}||v(\cdot,t)||^2_{H^1(\omega)}dt \tag{3.34}$$

e

$$I_2 \leq s\int_{T_1}^{T_2} \check{\varphi} e^{-2s\check{\varphi}}||v(\cdot,t)||^2_{H^2(\omega)}dt. \tag{3.35}$$

Usando interpolação entre espaços de Sobolev $H^s(\omega)$, com $s \geq 0$ (Teorema 1.4), obtemos constantes positivas K_1, K_2 tais que

$$||v(\cdot,t)||_{H^1(\omega)} \leq K_1||v(\cdot,t)||^{3/8}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{5/8}_{L^2(\omega)} \tag{3.36}$$

e

$$||v(\cdot,t)||_{H^2(\omega)} \leq K_2||v(\cdot,t)||^{3/4}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{1/4}_{L^2(\omega)}. \tag{3.37}$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.34) e (3.35), respectivamente, segue que

$$I_1 \leq Cs^3\int_{T_1}^{T_2} \check{\varphi}^3 e^{-2s\check{\varphi}}||v(\cdot,t)||^{3/4}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{5/4}_{L^2(\omega)}dt \tag{3.38}$$

e

$$I_2 \leq Cs^3\int_{T_1}^{T_2} \check{\varphi} e^{-2s\check{\varphi}}||v(\cdot,t)||^{3/2}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\omega)}dt \tag{3.39}$$

Aplicando a desigualdade de Young, com $p = \frac{8}{5}$ e $q = \frac{8}{3}$, em (3.38) temos, para qualquer $\epsilon > 0$, que

$$\begin{aligned}I_1 &\leq Cs^3\int_{T_1}^{T_2} \check{\varphi}^3 e^{-2s\check{\varphi}}e^{-\frac{3}{4}s\hat{\varphi}}e^{\frac{3}{4}s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-\frac{27}{8}}\check{\varphi}^{\frac{27}{8}}||v(\cdot,t)||^{3/4}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{5/4}_{L^2(\omega)}dt\\ &\leq C\int_{T_1}^{T_2}\left[\check{\varphi}^3 e^{-2s\check{\varphi}}e^{\frac{3}{4}s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{\frac{27}{8}}||v(\cdot,t)||^{5/4}_{L^2(\omega)}\epsilon^{-\frac{3}{8}}s^{\frac{30}{8}}\right]\cdot\left[e^{-\frac{3}{4}s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-\frac{27}{8}}||v(\cdot,t)||^{3/4}_{H^{8/3}(\omega)}\epsilon^{\frac{3}{8}}s^{-\frac{6}{8}}\right]dt\\ &\leq C_\epsilon s^6\int_{T_1}^{T_2} e^{s\left(\frac{6}{5}\check{\varphi}-\frac{16}{5}\hat{\varphi}\right)}\check{\varphi}^{\frac{51}{5}}||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)}dt + \epsilon s^{-2}\int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-9}||v(\cdot,t)||^2_{H^{8/3}(\omega)}dt.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora aplicando a desigualdade de Young, com $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$, em (3.39) temos, para qualquer $\epsilon > 0$, que

$$\begin{aligned}I_2 &\leq Cs\int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\check{\varphi}}e^{-\frac{3}{2}s\hat{\varphi}}e^{\frac{3}{2}s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-\frac{27}{4}}\check{\varphi}^{\frac{31}{4}}||v(\cdot,t)||^{3/2}_{H^{8/3}(\omega)}||v(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\omega)}dt\\ &\leq C\int_{T_1}^{T_2}\left[e^{-2s\check{\varphi}}e^{\frac{3}{2}s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{\frac{31}{4}}||v(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\omega)}\epsilon^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{5}{2}}\right]\cdot\left[e^{-\frac{3}{2}s\check{\varphi}}\check{\varphi}^{-\frac{27}{4}}||v(\cdot,t)||_{H^{8/3}(\omega)}\epsilon^{\frac{3}{4}}s^{-\frac{3}{2}}\right]dt\\ &\leq C_\epsilon s^{10}\int_{T_1}^{T_2} e^{s(6\hat{\varphi}-8\check{\varphi})}\check{\varphi}^{31}||v(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\omega)}dt + \epsilon s^{-2}\int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-9}||v(\cdot,t)||^2_{H^{8/3}(\omega)}dt.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Note que

$$I_0 + s^6 \int_{T_1}^{T_2} e^{s\left(\frac{6}{5}\hat{\varphi} - \frac{16}{5}\check{\varphi}\right)} \check{\varphi}^{\frac{51}{5}} ||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)} dt \leq C s^{10} \int_{T_1}^{T_2} e^{s(6\hat{\varphi} - 8\check{\varphi})} \check{\varphi}^{31} ||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)} dt. \quad (3.42)$$

Por (3.33) e (3.40)-(3.42), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_Q \left[(s\check{\varphi})^5 |v|^2 + (s\check{\varphi})^3 |v_x|^2 + s\check{\varphi} |v_{xx}|^2 \right] e^{-2s\hat{\varphi}} dxdt \qquad (3.43) \\ \leq & C s^{10} \int_{T_1}^{T_2} e^{s(6\hat{\varphi} - 8\check{\varphi})} \check{\varphi}^{31} ||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)} dt + 2\epsilon s^{-2} \int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}} \check{\varphi}^{-9} ||v(\cdot,t)||^2_{H^{8/3}(\omega)} dt. \end{aligned}$$

Resta estimar o termo integral

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}} \check{\varphi}^{-9} ||v(\cdot,t)||_{H^{8/3}(\omega)} dt.$$

Isto é feito por um argumento de recorrência baseado no efeito suavizante da equação KdV.

Com efeito, seja $v_1(x,t) := \theta_1(t) v(x,t)$ com

$$\theta_1(t) = \exp(-s\hat{\varphi}) \check{\varphi}^{-\frac{1}{2}}.$$

Então v_1 satisfaz o sistema

$$\begin{cases} v_{1t} + v_{1xx} + v_{1xxx} = f_1 := -\zeta\theta_1 v_x + \theta_{1t} v, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ v_1(0,t) = v_1(L,t) = v_{1x}(0,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ v_1(x, T_2) = 0, & \text{em} \quad I. \end{cases} \qquad (3.44)$$

Uma vez que $v_x(0,t) = 0, \zeta \in L^\infty(T_1, T_2; L^2(I))$ e $|\theta_{1t}| \leq C s \check{\varphi}^{\frac{3}{2}} \exp(-s\hat{\varphi})$, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos

$$\begin{aligned} ||f_1||^2_{L^2(I \times (T_1,T_2))} &\leq C ||\zeta||^2_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))} \int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}} ||v_x||^2_{L^\infty(I)} dt \\ &\quad + C \int_Q e^{-2s\hat{\varphi}} s^2 \check{\varphi}^3 |v|^2 dxdt \qquad (3.45) \\ &\leq C \int_Q \left[s^2 \check{\varphi}^3 |v|^2 + s|v_x|^2 + s^{-1} |v_{xx}|^2 \right] e^{-2s\hat{\varphi}} dxdt, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ e todo $s > \tilde{s}_0$. Por (3.12) temos que $v_1 \in C([T_1, T_2]; H^1(I)) \cap L^2(T_1, T_2; H^2(I))$. Por interpolação podemos concluir que v_1 pertence a classe

$$\left[L^q(T_1, T_2; H^1(I)); L^2(T_1, T_2; H^2(I)) \right]_\theta = L^p \left(T_1, T_2; \left[H^1(I); H^2(I) \right]_\theta \right),$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}$ e $0 < \theta < 1$. Então escolhendo $p = 4, q = \infty$ e $\theta = \frac{1}{2}$, garantimos que $s = \frac{1}{2}$, isto é,

$$\left[H^1(I); H^2(I) \right]_\theta = H^{\frac{3}{2}}(I).$$

Logo $v_1 \in L^4(T_1,T_2;H^{3/2}(I))$ e

$$||v_1||_{L^4(T_1,T_2;H^{3/2}(I))} \leq C||f_1||_{L^2(I\times(T_1,T_2))}. \tag{3.46}$$

Seja $v_2(x,t) := \theta_2(t)v(x,t)$ com

$$\theta_2(t) = \exp(-s\hat{\varphi})\check{\varphi}^{-\frac{5}{2}}.$$

Então v_2 satisfaz o sistema (3.44) com f_1 substituído por

$$f_2 := \zeta\theta_2\theta_1^{-1}v_{1x} - \theta_{2t}\theta_1^{-1}v_1.$$

Daí, note que

$$\left|\theta_2\theta_1^{-1}\right| + \left|\theta_{2t}\theta_1^{-1}\right| \leq Cs.$$

Como $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$, por interpolação entre $C([T_1,T_2];L^2(I))$ e $L^2(T_1,T_2;H^1(I))$, temos que $\zeta \in L^4(T_1,T_2;H^{1/2}(I))$. E por (3.46) segue que $v_{1x} \in L^4(T_1,T_2;H^{1/2}(I))$. Logo, podemos concluir que $\zeta v_{1x} \in L^2(T_1,T_2;H^{1/3}(I))$. De fato, o produto de duas funções em $H^{1/2}(I)$ pertence a $H^s(I)$ para qualquer $s < 1/2$, em particular para $H^{1/3}(I)$. Dessa forma, obtemos

$$||f_2||_{L^2(T_1,T_2;H^{1/3}(I))} \leq Cs||v_1||_{L^4(T_1,T_2;H^{3/2}(I))}. \tag{3.47}$$

Como $f_2 \in L^2(T_1,T_2,H^{1/3}(I)) = L^2\left(T_1,T_2;[L^2(I);H_0^2(I)]_{\frac{1}{6}}\right)$ sendo assim $f_2 \in L^2(I\times(T_1,T_2)) \cap L^2(T_1,T_2;H_0^2(I))$. Dessa forma, por (3.9) e (3.11), temos que $v_2 \in (C[T_1,T_2];H^3(I)\cap L^2(T_1,T_2;H^4(I))) \cap (C([T_1,T_2];H^1(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^2(I)))$. Interpolando $[H^1(I);H^3(I)]_{\frac{1}{6}}$ e $[H^2(I);H^4(I)]_{\frac{1}{6}}$ concluímos que $v_2 \in C([T_1,T_2];H^{4/3}(I)) \cap L^2(T_1,T_2;H^{7/3}(I))$ e

$$||v_2||_{L^\infty(T_1,T_2;H^{4/3}(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^{7/3}(I))} \leq C||f_2||_{L^2(T_1,T_2;H^{1/3}(I))}. \tag{3.48}$$

Por fim, considere $v_3 := \theta_3(t)v(x,t)$ com

$$\theta_3(t) = \exp(-s\hat{\varphi})\check{\varphi}^{-\frac{9}{2}}. \tag{3.49}$$

Então v_3 satisfaz o sistema (3.44) com f_3 no lugar de f_1 onde

$$f_3 = \zeta\theta_3\theta_2^{-1}v_{2x} - \theta_{3t}\theta_2^{-1}v_2.$$

Temos que

$$|\theta_3\theta_2^{-1}| + |\theta_3\theta_2^{-1}| \leq Cs.$$

Procedendo de maneira semelhante ao passo anterior, sabendo que $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$, interpolando entre $C([T_1,T_2];L^2(I))$ e $L^2(T_1,T_2;H^1(I))$ temos que $\zeta \in L^3(T_1,T_2;H^{2/3}(I))$. Por outro lado, por (3.48),

$$v_{2x} \in C([T_1,T_2];H^{1/3}) \cap L^2(T_1,T_2;H^{4/3}(I)).$$

Daí, segue que $v_{2x} \in L^6(T_1,T_2;H^{2/3}(I))$. Pela Proposição 1.5 temos que $H^{2/3}(I)$ é uma álgebra, dessa forma $\zeta v_{2x} \in L^2(T_1,T_2;H^{2/3}(I))$. Logo

$$||f_3||_{L^2(T_1,T_2;H^{2/3}(I))} \leq Cs||v_2||_{L^\infty(T_1,T_2;H^{4/3}(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^{7/3}(I))}. \tag{3.50}$$

Novamente, interpolando entre (3.9) e (3.11), podemos garantir que

$$||v_3||_{L^\infty(T_1,T_2;H^{5/3}(I))\cap L^2(T_1,T_2;H^{8/3}(I))} \leq C||f_3||_{L^2(T_1,T_2;H^{2/3}(I))}. \tag{3.51}$$

Então, por (3.45)-(3.51) existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} ||v_3||^2_{L^2(T_1,T_2;H^{8/3}(I))} &\leq C_1 s^4 ||f_1||^2_{L^2(I\times(T_1,T_2))} \\ &\leq C_2 \int_Q \left[s^6 \check{\varphi}^3|v|^2 + s^5|v_x|^2 + s^3|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\hat{\varphi}} dxdt, \end{aligned} \tag{3.52}$$

para todo $s > \tilde{s}_0$. Agora, substituindo $v_3 = \exp(-s\hat{\varphi})\check{\varphi}^{-\frac{9}{2}}v$ em (3.52) obtemos, para alguma constante $C_3 > 0$, que

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-2s\hat{\varphi}}\check{\varphi}^{-9}||v(\cdot,t)||^2_{H^{8/3}(\omega)}dt \leq C_3 s^2 \int_Q \left[(s\check{\varphi})^5|v|^2 + (s\check{\varphi})^3|v_x|^2 + s\check{\varphi}|v_{xx}|^2\right] e^{-2s\hat{\varphi}}dxdt.$$

Portanto, escolhendo $\epsilon = \dfrac{1}{4C_3}$ em (3.43) temos, para todo $s > \tilde{s}_0$ e para alguma constante positiva $C_4 = C_4\left(|T_2 - T_1|, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}\right)$, que

$$\int_Q e^{-2s\hat{\varphi}}\left[(s\check{\varphi})^5|v|^2 + (s\check{\varphi})^3|v_x|^2 + s\check{\varphi}|v_{xx}|^2\right] dxdt \leq C_4 s^{10}\int_{T_1}^{T_2} e^{s(6\hat{\varphi}-8\check{\varphi})}\check{\varphi}^{31}||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)}dt,$$

provando o resultado. □

3.1.3 Desigualdade de observabilidade

A seguir, vamos estabelecer uma desigualdade de observabilidade para a solução do sistema (3.2). Para isso, será fundamental a aplicação do Lema 3.1, que é derivado a partir da desigualdade de Carleman (3.29).

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.2) por $-v$ e integrando em I, obtemos, através da integração por partes, que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v^2dx + \int_0^L v_x^2dx + \frac{1}{2}v_x^2(L,t) = \int_0^L \zeta v v_x dx \tag{3.53}$$

Das desigualdades de Hölder e Young, podemos estimar o lado direito de (3.53) como

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^L \zeta v v_x dx\right| &\leq \int_0^L |\zeta v v_x| dx \\
&\leq ||\zeta||_{L^\infty(I)} \int_0^L |v v_x| dx \\
&\leq ||\zeta||_{L^\infty(I)} ||v||_{L^2(I)} ||v_x||_{L^2(I)} \\
&\leq \frac{1}{2}||v_x||^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}||\zeta||^2_{L^\infty(I)}||v||^2_{L^2(I)} \\
&\leq \frac{1}{2}||v_x||^2_{L^2(I)} + C(L)||\zeta||^2_{H^1(I)}||v||^2_{L^2(I)} \\
&\leq \frac{1}{2}||v_x||^2_{L^2(I)} + C(L)||\zeta||^2_{H^1(I)}||v_{T_2}||^2_{L^2(I)}.
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Combinando (3.53) e (3.54) temos que

$$
-\frac{1}{2}\int_0^L v^2 dx + \frac{1}{2}||v_x||^2_{L^2(I)} \leq C(L)||\zeta||^2_{H^1(I)}||v_{T_2}||^2_{L^2(I)}.
$$

Integrando a igualdade acima sobre (T_1, T_2) segue que

$$
-||v(\cdot,T_2)||^2_{L^2(I)} + ||v(\cdot,T_1)||^2_{L^2(I)} + ||v||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C\left(L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right)||v_{T_2}||^2_{L^2(I)}.
$$

Somando $2||v(\cdot,T_2)||^2_{L^2(I)}$ na desigualdade acima obtemos

$$
||v(\cdot,T_2)||^2_{L^2(I)} + ||v(\cdot,T_1)||^2_{L^2(I)} + ||v||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C\left(L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right)||v_{T_2}||^2_{L^2(I)},
$$

dessa forma

$$
\max_{t\in[T_1,T_2]} ||v(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + ||v||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq C\left(L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right)||v_{T_2}||^2_{L^2(I)}. \tag{3.55}
$$

Definindo $T_1' = \dfrac{2T_1+T_2}{3}$ e $T_2' = \dfrac{T_1+2T_2}{3}$. Então trocando $v(\cdot,t)$ por $v(\cdot,T_1)$ e v_{T_2} por $v(\cdot,\tau)$ para, $T_1' < \tau < T_2'$, e integrando (3.55) em $\tau \in (T_1', T_2')$, segue que

$$
||v(\cdot,T_1)||^2_{L^2(I)} \leq C\left(|T_2-T_1|, L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right)\int_{T_1'}^{T_2'} ||v(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} d\tau, \tag{3.56}
$$

para alguma constante $C\left(|T_2-T_1|, L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right) > 0$. Combinando (3.56) com o Lema 3.1 e utilizando as propriedades de φ, para um valor fixo de $s > \tilde{s}_0$, obtemos que

$$
||v(\cdot,T_1)||^2_{L^2(I)} \leq C_* \int_{T_1}^{T_2} ||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\omega)} dt, \tag{3.57}
$$

onde $C_* = C_*\left(|T_2-T_1|, L, ||\zeta||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))}\right) > 0$.

3.1.4 Método da dualidade

A seguir, estabelecemos a controlabilidade nula para o sistema (3.1). Para isso, utilizaremos o método da dualidade, que permite relacionar a solução do sistema original (3.1), cuja controlabilidade desejamos alcançar, com a solução do sistema adjunto associado (3.2). Em particular, aplicamos o Método da Unicidade de Hilbert (HUM), conforme introduzido por (LIONS, 1988). Esse método reformula o problema de controle como um problema de minimização de um funcional, que está intimamente ligado à solução do sistema adjunto (3.2). A etapa crucial para garantir a minimização deste funcional consiste em demonstrar sua coercividade, o que é alcançado por meio da aplicação da desigualdade de observabilidade (3.57).

Primeiramente, vamos relembrar um resultado fundamental do cálculo de variações, cuja demonstração pode ser encontrada em (BREZIS, 2011).

Teorema 3.1 *Seja H um espaço de Banach reflexivo, K um subconjunto convexo e fechado de H e $\varphi : K \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1. *φ é convexa;*
2. *φ é semi-contínua inferiormente;*
3. *Se K é ilimitado, então φ é coerciva, isto é,*

$$\lim_{||x|| \to +\infty} \varphi(x) = \infty.$$

Então φ atinge seu mínimo em K, isto é, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in K} \varphi(x).$$

Além disso, a unicidade do mínimo é garantida se φ for estritamente convexa.

O próximo resultado garante a controlabilidade nula para o sistema (3.1), inspirados por (LIONS, 1988), (MICU; ZUAZUA, 2004) e (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015).

Teorema 3.2 *Sejam $0 < T_1 < T_2 < +\infty$. Então para quaisquer $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$ e $y_{T_1} \in L^2(I)$, pode-se encontrar um controle $f \in L^2(\omega, (T_1, T_2))$ tal que a solução y do sistema* (3.1) *satisfaz $y(\cdot, T_2) = 0$.*

Demonstração: A partir de (3.57) podemos deduzir a existência de uma $f \in (\omega, (T_1, T_2))$, como no Teorema 3.2. Os argumentos abaixo são inspirados por (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015) e (MICU; ZUAZUA, 2004).

Em $L^2(I)$, definimos a norma

$$||v_{T_2}||_M := ||v||_{L^2(\omega,T_1,T_2)},$$

onde v é a solução de (3.2) associado a v_{T_2}. Denote por M o complemento de $L^2(I)$ com respeito a norma acima. Considere então um funcional J em M definido por

$$J(v_{T_2}) := \frac{1}{2}||v_{T_2}||_M^2 + \int_0^L v(x,T_1)y_{T_1}(x)dx.$$

Por (3.57) podemos concluir que J está bem definido e é contínuo em M. De fato,

$$\begin{aligned}|J(v_{T_2})| &\leq \frac{1}{2}||v_{T_2}||_M^2 + \int_0^L |v(x,T_1)||y_{T_1(x)}|dx \\ &\leq \frac{1}{2}||v_{T_2}||_M^2 + ||v(x,T_1)||_{L^2(I)}||y_{T_1}||_{L^2(I)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}||v_{T_2}||_M^2 + C_*^{\frac{1}{2}}||y_{T_1}||_{L^2(I)}\right)||v_{T_2}||_M.\end{aligned}$$

Visto que $\lim_{||v_{T_2}||_M\to+\infty} J(v_{T_2}) = +\infty$ temos que J é coercivo.

De acordo com o Teorema 3.1, para garantir a existência de um único mínimo para J, resta mostrar que J é estritamente convexo. Com efeito, considere $0 < \lambda < 1$. Para $v_{T_2}, w_{T_2} \in L^2(I)$ sejam v e w as soluções de (3.2) com respeito a v_{T_2} e w_{T_2}, respectivamente. Dessa forma,

$$\begin{aligned}J(\lambda v_{T_2} + (1-\lambda)w_{T_2}) &= \frac{1}{2}||\lambda v_{T_2} + (1-\lambda)w_{T_2}||_M^2 \\ &\quad + \int_0^L (\lambda v(x,T_1) + (1-\lambda)w(x,T_1))\, y_{T_1}(x)dx \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2}||v_{T_2}||_M^2 + \lambda(1-\lambda)\int_0^L v_{T_2}w_{T_2}dx + \frac{(1-\lambda)^2}{2}||w_{T_2}||_M^2 \\ &\quad + \lambda\int_0^L v(x,T_1)y_{T_1}(x)dx + (1-\lambda)\int_0^L w(x,T_1)y_{T_1}(x)dx \\ &\leq \lambda^2||v_{T_2}||_M^2 + (1-\lambda)^2||w_{T_2}||_M^2 \\ &\quad + \lambda\int_0^L v(x,T_1)y_{T_1}(x)dx + (1-\lambda)\int_0^L w(x,T_1)y_{T_1}(x)dx\end{aligned}$$

Como $0 < \lambda < 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}J(\lambda v_{T_2} + (1-\lambda)w_{T_2}) &< \lambda||v_{T_2}||_M^2 + \lambda\int_0^L v(x,T_1)y_{T_1}(x)dx \\ &\quad + (1-\lambda)||w_{T_2}||_M^2 + (1-\lambda)\int_0^L w(x,T_1)y_{T_1}(x)dx.\end{aligned}$$

Portanto J admite um único mínimo $v_{T_2}^*$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[J(v_{T_2}^*+hw_{T_2})-J(v_{T_2^*})\right] \\ &= \int_{T_1}^{T_2}\int_\omega v^* w dxdt + \int_0^L w(x,T_1)y_{T_1}(x)dx, \quad \forall w_{T_2}\in M, \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde w (resp. v^*) denota a solução de (3.2) associado a $w_{T_2}\in M$ (resp. $v^*\in M$). Defina $f\in L^2(\omega\times(T_1,T_2))$ dada por

$$f := \chi_\omega v^*, \tag{3.59}$$

e denote por y a solução de (3.1) associado a y_{T_2} e f. Multiplicando (3.1) por w e integrando por partes, obtemos para todo $w_{T_2}\in L^2(I)$ que

$$\int_0^L y(x,T_2)w_{T_2}dx = \int_0^L y_{T_1}(x)w(x,T_2)dx + \int_{T_1}^{T_2}\int_\omega v^* w dxdt = 0, \tag{3.60}$$

no qual a segunda equação segue de (3.58). Portanto $y(\cdot,T_2)=0$. Por fim, considerando $w_{T_2}=v_{T_2}^*$ em (3.58) e usando (3.57) concluímos que

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_\omega |f|^2 dxdt \le C_*\int_0^L |y_{T_1}(x)|^2dx, \tag{3.61}$$

mostrando o resultado. □

3.2 EQUAÇÃO KDV-B NÃO LINEAR

Nesta seção, iremos estabelecer a controlabilidade nula para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x + (\xi y)_x = f\chi_\omega, & \text{em} \quad I\times(T_1,T_2), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1,T_2), \\ y(x,T_1) = y_{T_1}(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{3.62}$$

onde $0<T_1<T_2<+\infty, y_{T_1}$ é o dado inicial e f é a função controle. Isto será obtido através do teorema a seguir e sua prova é inspirada por (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2015), que consiste em utilizar uma versão do teorema do ponto fixo de Kakutani.

Teorema 3.3 *Seja $\xi\in B_{(T_1,T_2)}$, então existe $\rho>0$ tal que para todo $y_{T_1}\in L^2(I)$ satisfazendo $||y_{T_1}||_{L^2(I)}\le\rho$, podemos encontrar uma função $f\in L^2(T_1,T_2;L^2(I))$ tal que a solução y de* (3.62) *satisfaz $y(\cdot,T_2)=0$ em I. Além disso, existe uma constante $C=C(|T_2-T_1|,||\xi||_{(B_{(T_1,T_2)})})$ tal que*

$$||f||_{L^2(T_1,T_2;L^2(I))}\le C||y_{T_1}||_{L^2(I)}.$$

Demonstração: Primeiramente, note que y solução de (3.62) satisfaz

$$y_t - y_{xx} + y_{xxx} + \left(\frac{y^2}{2} + \xi y\right)_x = f\chi_\omega.$$

Dessa forma, dado $\zeta \in B_{(T_1,T_2)}$ e $y_{T_1} \in L^2(I)$, consideremos o problema de controle

$$\begin{cases} q_t - q_{xx} + q_{xxx} + (\zeta q)_x = f\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ q(0,t) = q(L,t) = q_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ q(x, T_1) = y_{T_1}, & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{3.63}$$

Procedendo como na Seção 2.7, podemos obter a seguinte estimativa

$$||q||^2_{B_{(T_1,T_2)}} \leq C\left(|T_2 - T_1|, L, ||\zeta||_{B_{(T_1,T_2)}}\right)\left(||y_{T_1}||^2_{L^2(I)} + ||f||^2_{L^2(\omega\times(T_1,T_2))}\right). \tag{3.64}$$

Aqui, nos limitaremos aos controles que cumpram a seguinte condição

$$||f||^2_{L^2(\omega\times(T_1,T_2))} \leq C_*||y_{T_1}||^2_{L^2(I)}, \tag{3.65}$$

onde $C_* := C_*(|T_2 - T_1|, L, ||\xi||_{B_{(T_1,T_2)}})$. Como $f \in L^2(\omega \times (T_1, T_2)$ e $(\zeta q)_x \in L^1(T_1, T_2; L^2(I))$ segue que

$$\begin{aligned} ||q_t||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} &= ||f\chi_\omega + q_{xx} - q_{xxx} - (\zeta q)_x||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} \\ &\leq ||f\chi_\omega||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(\omega))} + ||q_{xx} - q_{xxxx}||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} \\ &\quad + ||(\zeta q)_x||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))}. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada parcela desta soma.

i) Como $f\chi_\omega \in L^2(T_1, T_2; L^2(\omega))$ e $L^2(\omega) \hookrightarrow H^{-2}(\omega)$ segue que

$$||f\chi_\omega||^2_{H^{-2}(\omega)} \leq C||f\chi_\omega||^2_{L^2(\omega)}. \tag{3.66}$$

Integrando (3.69) em (T_1, T_2) concluímos que

$$||f\chi_\omega||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(\omega))} \leq C||f\chi_\omega||_{L^2(T_1,T_2;L^2(\omega))}. \tag{3.67}$$

ii) Como $q \in L^2(T_1, T_2; H^1(I))$, temos que $q_x(\cdot, t) \in L^2(I)$, daí pela caracterização de distribuições em $H^{-2}(I)$, escolhendo $g_0 = 0,\ g_1 = q_x(\cdot, t)$ e $g_2 = -q_x(\cdot, t)$, temos que $g_0, g_1, g_2 \in L^2(I)$ e

$$q_{xx}(\cdot, t) - q_{xxx}(\cdot, t) = g_0 + g_{1x} + g_{2xx}.$$

Concluímos que $q_{xx}(\cdot,t) - q_{xxx}(\cdot,t) \in H^{-2}(I)$, além disso por (1.4) segue que

$$||q_{xx}(\cdot,t) - q_{xxx}(\cdot,t)||^2_{H^{-2}(I)} \leq 2||q_x(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq 2||q(\cdot,t)||^2_{H^1(I)}.$$

Integrando em (T_1,T_2) obtemos

$$||q_{xx} - q_{xxx}||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} \leq C||q||_{L^2(T_1,T_2;H^1(I))} \leq ||q||_{B_{(T_1,T_2)}}. \tag{3.68}$$

iii) Como $q,\zeta \in L^2(T_1,T_2;H^1(I))$ temos que $q(\cdot,t),\zeta(\cdot,t) \in H^1(I)$ e sabendo que $H^1(I)$ é uma álgebra (Proposição 1.5) obtemos $q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t) \in H^1(I)$ o que implica $q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t) \in L^2(I)$. Novamente pela caracterização de distribuições em $H^{-2}(I)$, tomando $g_0 = g_2 = 0$ e $g_1 = q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)$ temos que $g_0, g_1, g_2 \in L^2(I)$ e

$$\left(q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)\right)_x = g_0 + g_{1x} + g_2,$$

ou seja, $\left(q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)\right)_x \in H^{-2}(I)$. Além disso,

$$||\left(q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)\right)_x||^2_{H^{-2}(I)} \leq ||q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)||^2_{L^2(I)}.$$

Como $\zeta, q \in C([T_1,T_2];L^2(I))$ e $\zeta(\cdot,t)q(\cdot,t) \in L^2(I)$, segue que $\zeta(\cdot,t)q(\cdot,t) \in C([T_1,T_2];L^2(I))$, isto é, existe $M > 0$ tal que $||q(\cdot,t)\zeta(\cdot,t)||_{L^2(I)} \leq M$, para todo $t \in (T_1,T_2)$. Deste modo, integrando em (T_1,T_2) temos que

$$||(q\zeta)_x||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} \leq C(|T_2 - T_1|). \tag{3.69}$$

Graças a (3.67)-(3.69) concluímos que

$$||q_t||_{L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))} \leq C\left(|T_2 - T_1, ||f||_{L^2(\omega\times(T_1,T_2))}, ||q||_{B_{(T_1,T_2)}}\right), \tag{3.70}$$

isto é, $q \in H^1(T_1,T_2;H^{-2}(I))$.

Introduzimos então o espaço

$$E := C([T_1,T_2];L^2(I)) \cap L^2(T_1,T_2;H^1(I)) \cap H^1(T_1,T_2;H^{-2}(I))$$

munido com sua norma natural

$$||y||_E = ||y||_{B_{(T_1,T_2)}} + ||y||_{H^1(T_1,T_2;H^{-2}(I))}.$$

Consideramos agora em $L^2(I \times (T_1,T_2))$ o seguinte conjunto

$$B := \{y \in E; ||y||_E \leq 1\}.$$

Afirmamos que B é compacto em $L^2(I\times(T_1,T_2))$. De fato, uma vez que $\dfrac{\partial B}{\partial t} \in L^2(T_1,T_2;H^{-2}(I))$ podemos aplicar o Lema de Aubin-Lions (Teorema 1.2) considerando $X = H^1(I)$, $Y = L^2(I)$ e $Z = H^{-2}(I)$ concluindo que B é relativamente compacto em $L^2(T_1,T_2;L^2(I))$, mas como B é fechado segue que é compacto em $L^2(T_1,T_2;L^2(I))$.

Para qualquer $y \in B$, consideremos o conjunto

$$P(y) := \Big\{ q \in B;\ \exists f \in L^2(\omega \times (T_1,T_2)) \text{ tal que } f \text{ satisfaz (3.65) e } q \text{ resolve (3.63) com } \zeta = \frac{y}{2} + \xi \text{ e } q(\cdot,T) = 0 \Big\}.$$

Pelo Teorema 3.2, (3.61) e (3.64), podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que, para qualquer $||y_{T_1}||_{L^2(I)} < \rho$, $P(y)$ é não-vazio para todo $y \in B$. A demonstração será finalizada com o auxilio do seguinte teorema (ver (ZEIDLER, 1986)).

Teorema 3.4 ***(Teorema do ponto fixo de Kakutani)*** *Sejam F um espaço localmente convexo, $B \subset F$ e $P : B \to 2^B$. Assuma que:*

(1) B é um conjunto não-vazio, compacto e convexo;

(2) $P(y)$ é um conjunto não-vazio, fechado e convexo para todo $y \in B$;

(3) A aplicação $P : B \to 2^B$ é semicontínua superiormente, isto é, para todo subconjunto A de F, $P^{-1}(A) = \{y \in B; P(y) \cap A \neq\}$ é fechado.

Então P tem um ponto fixo, isto é, existe $y \in B$ tal que $y = P(y)$.

Note que se existe tal ponto fixo, então $y = P(y)$ é solução de (3.62) e satisfaz $y(\cdot,T_2) = 0$, provando assim a controlabilidade nula do sistema. Devemos então verificar que o Teorema 3.4 pode ser aplicado para P e $F = L^2(I \times (T_1,T_2))$.

A convexidade de B é clara, já a convexidade de $P(y)$ segue da linearidade das soluções. Dessa forma, temos que a condição (1) é satisfeita. Para a condição (2), resta mostrar que $P(y)$ é fechado em F, para todo $y \in B$. Tome qualquer $y \in B$ e uma sequência $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $P(y)$ que converge em F para alguma função $q \in B$. Para cada k, podemos escolher alguma função controle $f^k \in L^2(\omega\times(T_1,T_2))$ satisfazendo (3.65) tal que o sistema (3.63) é satisfeito com $\zeta = \frac{y}{2}+\xi$ e $q^k(\cdot,T) = 0$. Pela reflexividade dos espaços, passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$f^k \rightharpoonup f \text{ em } L^2(\omega \times (T_1,T_2)), \tag{3.71}$$

$$q^k \rightharpoonup q \text{ em } L^2(T_1,T_2;H^1(I)) \cap H^1(T_1,T_2;H^{-2}(I)), \tag{3.72}$$

quando $k \to +\infty$. Segue imediatamente de (3.71) que

$$f^k \to f \text{ em } D'(\omega \times (T_1, T_2)), \tag{3.73}$$

quando $k \to +\infty$. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(I \times (T_1, T_2))$ considere $T_\varphi : L^2(T_1, T_2; H^1(I)) \to \mathbb{R}$ definido por

$$T_\varphi(v) = \int_{T_1}^{T_2} \int_0^L \varphi v dx dt.$$

É fácil ver que T_φ define um funcional linear $L^2(T_1, T_2; H^1(I))$. Como $q^k \rightharpoonup q$ em $L^2(T_1, T_2; H^1(I))$ segue que

$$\int_{T_1} \int_0^L \varphi q^k \to \int_{T_1} \int_0^L \varphi q$$

o que implica

$$\langle q^k, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \to \langle q, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

isto é, $q^k \to q$ em $\mathcal{D}'(I \times (T_1, T_2))$. Pela observação 1.4 segue que

$$q^k_{xx} \to q_{xx} \text{ em } \mathcal{D}'(I \times (T_1, T_2)) \tag{3.74}$$

e

$$q^k_{xxx} \to q_{xxx} \text{ em } \mathcal{D}'(I \times (T_1 . T_2)). \tag{3.75}$$

Como $q^k \rightharpoonup q$ em $H^1(T_1, T_2; H^{-2}(I))$ temos que $q^k_t \to q_t$ em $L^2(T_1, T_2; H^{-2}(I))$, segue de um argumento semelhante ao anterior que

$$q^k_t \to q_t \text{ em } \mathcal{D}'(I \times (T_1, T_2)). \tag{3.76}$$

Por outro lado, segue de (3.72) a seguinte convergência

$$\zeta q^k \rightharpoonup \zeta q \text{ em } L^2(I \times (T_1, T_2)),$$

consequentemente,

$$(\zeta q^k)_x \to (\zeta q)_x \text{ em } \mathcal{D}'(I \times (T_1, T_2)). \tag{3.77}$$

Denote $L(q) := -q_{xx} + q_{xxx} + (\zeta q)_x$, daí, para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(I \times (T_1, T_2))$, temos que

$$\begin{aligned} \langle q_t + L(q) - f\chi_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} =& \langle q_t - q^k_t + L(q) - L(q^k) - f\chi_\omega + f^k \chi_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &+ \langle q^k_t + L(q^k) - f^k \chi_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Como $q^k \in P(z)$, temos que a última parcela da equação acima é igual a zero. Daí, considerando (3.73)-(3.77), segue

$$\begin{aligned} \langle q_t + L(q) - f\chi_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle q_t - q^k_t \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle L(q) - L(q^k), \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle f^k \chi_\omega - f\chi_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &\to 0, \text{ com, } k \to +\infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle q_t + L(q) - f\chi_\omega, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$, isto é,

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L (q_t + L(q) - f\chi_\omega)\varphi = 0, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(I \times (T_1, T_2)).$$

Pelo Lema de Du Bois-Reymond (Proposição 1.3), concluímos que

$$q_t - q_{xx} + q_{xxx} + (\zeta q)_x = f\chi_\omega \text{ q.s em } I \times (T_1, T_2).$$

Uma vez que $q \in B$, concluímos que q satisfaz a primeira equação em (3.63) com $\zeta = \frac{y}{2} + \xi$ e $q(\cdot, T_2) = 0$. Por (3.72), da limitação de $||q^k||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))}$ e do Lema de Aubin-Lions com $X = L^2(I),\ Y = H^{-2}(I)$ e $Z = H^{-1}(I)$, segue que $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto em $C([T_1, T_2]; H^{-1}(I))$. Extraindo uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$$q^k \to q \text{ em } C([T_1, T_2]; H^{-1}(I)).$$

Em particular, $q(x, T_1) = y_{T_1}(x)$ e $q(x, T_2) = 0$. Por fim, pela continuidade da norma obtemos

$$||f||^2_{L^2(\omega,(T_1,T_2))} \leq C_*||y_{T_1}||^2_{L^2(I)}.$$

Dessa forma $q \in P(y)$, concluindo que $P(y)$ é fechado.

Agora vamos verificar (3). Para provar que P semicontínuo superiormente, vamos considerar qualquer subconjunto fechado A de F e qualquer sequência $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em B tal que

$$y^k \in P^{-1}(A), \quad \forall k \geq 0, \tag{3.78}$$

e

$$y^k \to y \text{ em } F, \tag{3.79}$$

para algum $y \in B$. Nosso objetivo é mostrar que $y \in P^{-1}(A)$. Por (3.78), podemos tomar uma sequência $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em B com $q^k \in P(y^k) \cap A$ para todo k e uma sequência $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ tal que

$$\begin{cases} q^k_t - q^k_{xx} + q^k_{xxx} + \left(\left(\frac{y^k}{2} + \xi\right) q_x\right) = f^k\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (T_1, T_2), \\ q^k(0,t) = q^k(L,t) = q^k_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T_1, T_2), \\ q^k(x, T_1) = y_{T_1}(x) \text{ e } q^k(x, T_2) = 0, & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{3.80}$$

e

$$||f||^2_{L^2(\omega\times(T_1,T_2))} \leq C_*||y_{T_1}||^2_{L^2(I)}. \tag{3.81}$$

Por (3.81) e do fato que $y^k, q^k \in B$, dos mesmos argumentos de convergência feitos para provar que $P(y)$ é fechado, podemos assumir que para $k \to +\infty$ seguem as estimativas

$$\begin{aligned}
&f^k \rightharpoonup f \text{ em } L^2(\omega \times (T_1, T_2)),\\
&q^k \rightharpoonup q \text{ em } L^2(T_1, T_2; H^1(I)) \cap H^1(T_1, T_2; H^{-2}(I)),\\
&q^k \to q \text{ em } C([T_1, T_2]; H^{-1}(I)),\\
&q^k \to q \text{ em } F,\\
&y^k \to y \text{ em } F,
\end{aligned}$$

onde $f \in L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ e $q \in B$. Novamente temos que $q(x, T_1) = y_{T_1}(x)$ e $q(x, T_2) = 0$. Além disso, (3.65) e as condições de fronteira em (3.63) são satisfeitas. Resta mostrar que

$$q_t - q_{xx} + q_{xxx} + \left(\left(\frac{y}{2} + \xi\right) q\right)_x = f\chi_\omega. \tag{3.82}$$

Seguindo os mesmos passos do item anterior, a única convergência não trivial em (3.80) é a do termo não linear $(y^k q^k)_x$. Como $y^k, q^k \in B$, vemos que

$$||y^k q^k||_{L^2(T_1,T_2;L^2(I))} \le ||y^k||_{L^\infty(T_1,T_2;L^2(I))} ||q^k||_{L^2(T_1,T_2;L^\infty(I))} \le C.$$

Logo, extraindo uma subsequência, podemos assumir que $y^k q^k \rightharpoonup g$ em $L^2(I \times (T_1, T_2))$. Para provar que $g = yq$, é suficiente observar que para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(I \times (T_1, T_2))$, vale

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^L y^k q^k \varphi dx dt \to \int_{T_1}^{T_2} \int_0^L yq\varphi dx dt,$$

para $y^k \to y$ e $q^k\varphi \to q\varphi$ em F. Dessa forma

$$y^k q^k \rightharpoonup yq \text{ em } L^2(I \times (T_1, T_2)).$$

Consequentemente, $(y^k q^k)_x \to (yq)_x$ em $\mathcal{D}'(I \times (T_1, T_2))$. Logo, (3.82) acontece e então $q \in P(y)$. Por outro lado, $q \in A$, pois $q^k \to q$ em F e A é fechado. Concluindo que $y \in P^{-1}(A)$ e, consequentemente, $P^{-1}(A)$ é fechado. Portanto, segue do Teorema 3.4 que existe $y \in B$ tal que $y = P(y)$, isto é, encontramos um controle $f \in L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ tal que a solução de (3.62) satisfaz $y(\cdot, T_2) = 0$ em I.

□

4 PROPRIEDADE BANG-BANG DO CONTROLE ÓTIMO

4.1 EXISTÊNCIA DO CONTROLE ÓTIMO

Nesta seção, iremos demonstrar a existência de um controle ótimo para o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = v\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (0,+\infty), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,+\infty), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $y_0 \in L^2(I)$. Lembrando que o conjunto dos controles admissíveis é o conjunto tal que, dado $M > 0$ temos

$$\mathcal{V}_M := \Big\{ v \in L^2(I \times (0,+\infty));\ ||v||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M \text{ e a solução} \\ y \text{ de (4.1) satisfaz } y(\cdot,T) = 0 \text{ em } I \text{ para algum } T > 0 \Big\}.$$

O tempo ótimo é então definido como $T^* = \inf\{T; v \in \mathcal{V}_M\}$, e um controle v^* tal que a solução associada y satisfaz $y(\cdot,T^*) = 0$, em I, é chamado um controle ótimo.

O próximo resultado garante a existência do controle ótimo para o sistema (4.1), a prova deste resultado foi vista em (CHEN, 2017).

Teorema 4.1 *Para qualquer $y_0 \in L^2(I)\backslash\{0\}$ e qualquer $M > 0$, existe um controle ótimo v^* tal que a solução y de* (4.1) *correspondente a v^* satisfaz $y(\cdot,T^*) = 0$ em I.*

Demonstração: Primeiramente consideramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + yy_x = 0, & \text{em} \quad I \times (0,T_0), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,T_0), \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I, \end{cases}$$

no qual T_0 será determinado posteriormente. De acordo com a Proposição 2.6, podemos deduzir que

$$||y(\cdot,T_0)||_{L^2(I)} \leq e^{-T_0}||y_0||_{L^2(I)}. \tag{4.2}$$

Então, tomando $\rho > 0$ como no Teorema 3.3, para $T_0 \geq \ln\left(\dfrac{||y_0||_{L^2(I)}}{\rho}\right)$, obtemos a partir de (4.2), que $||y(\cdot,T_0)||_{L^2(I)} \leq \rho$.

Aplicando o Teorema 3.3 com $\xi = 0, T_1 = T_0$ e $T_2 = T_0 + 1$, podemos encontrar uma função $\tilde{v} \in L^2(T_0, T_0+1; L^2(I))$ tal que a solução w de

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + w_{xxx} + ww_x = \tilde{v}\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (T_0, T_0+1), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T_0, T_0+1), \\ w(x,0) = y(x,T_0), & \text{em} \quad I, \end{cases}$$

satisfaz $w(\cdot, T_0+1) = 0$ em I. Além disso,

$$||\tilde{v}||_{L^2(T_0,T_0+1;L^2(I))} \leq C(1)||y(\cdot,T_0)||_{L^2(I)}, \tag{4.3}$$

onde $C(1)$ é a constante do Teorema 3.3 com $\xi = 0$ e $T_2 - T_1 = 1$. Considerando (4.2) e (4.3), se $T_0 \geq \ln\left(\dfrac{C(1)||y_0||_{L^2(I)}}{M}\right)$, temos que $||\tilde{v}||_{L^2(T_0,T_0+1;L^2(I))} \leq M$. Agora defina

$$v(\cdot,t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in (0,T_0] \cup [T_0+1, +\infty), \\ \tilde{v}(\cdot,t), & \text{se} \quad t \in (T_0, T_0+1), \end{cases}$$

onde $T_0 > 0$ é tal que

$$T_0 = \max\left\{\ln\left(\frac{||y_0||_{L^2(I)}}{\rho}\right), \ln\left(\frac{C(1)||y_0||_{L^2(I)}}{M}\right)\right\}.$$

Então, a solução w do sistema

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + w_{xxx} + ww_x = v\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (0, T_0+1), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0, T_0+1), \\ w(x,0) = y(x,T_0), & \text{em} \quad I, \end{cases}$$

satisfaz $w(\cdot, T_0+1) = 0$ em I e

$$||v||_{L^2(I\times(0,+\infty))} = ||\tilde{v}||_{L^2(T_0,T_0+1;L^2(I))} \leq M,$$

isto é, v é um controle admissível com $T = T_0 + 1$. Com isso, garantimos a existência de controles admissíveis para o sistema (4.1).

Para provar a existência do controle ótimo considere $T^* = \inf\{T; v \in \mathcal{V}_M\}$, com $0 \leq T^* < \overline{T}$ para algum $\overline{T} > 0$. Dessa forma, existem sequências $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de números reais positivos e $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{V}_M$ tais que $T^* = \lim_{m\to+\infty} T_m$ e a solução y_m, correspondente a v_m, satisfaz

$$\begin{cases} (y_m)_t - (y_m)_{xx} + (y_m)_{xxx} + y_m(y_m)_x = v_m\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (0,\overline{T}), \\ y_m(0,t) = y_m(L,t) = (y_m)_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,\overline{T}), \\ y_m(x,0) = y_0(x), \quad y_m(x,T_m) = 0, & \text{em} \quad I. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.7 temos que $||y_m||_{B_{\overline{T}}} \leq C(M, ||y_0||_{L^2})$. Como

$$||y_m(y_m)_x||_{L^2(0,\overline{T};L^1(I))} \leq ||y_m||^2_{B_{\overline{T}}} \quad \text{e} \quad ||v_m||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M.$$

Por um argumento análogo ao feito em (3.70), temos que

$$\begin{aligned} ||(y_m)_t||_{L^2(0,\overline{T};H^{-2}(I))} &= ||(y_m)_{xx} - (y_m)_{xxx} - y_m(y_m)_x + v_m\chi_\omega||_{L^2(0,\overline{T};H^{-2}(I))} \\ &\leq C(M, ||y_0||_{L^2(I)}). \end{aligned}$$

Logo $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(0,\overline{T};H^{-2}(I))$. Assim, podemos deduzir a existência de $v^* \in L^2(I\times(0,+\infty))$ e de subsequências $(v_{m'})_{m'\in\mathbb{N}}$ e $(y_{m'})_{m'\in\mathbb{N}}$ tais que

$$v_{m'} \rightharpoonup v^* \text{ em } L^2(I\times(0,+\infty)),$$

com $||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M$. Assim

$$y_{m'} \rightharpoonup y^* \text{ em } L^2(0,\overline{T};H^1(I)) \cap H^1(0,\overline{T};H^{-2}(I))$$

e

$$y_{m'} \to y^* \text{ em } L^2(0,\overline{T};L^2(I)).$$

Com os mesmos argumentos de convergência feitos no Teorema 3.3 as convergências acima garantem que

$$\begin{cases} y^*_t - y^*_{xx} + y^*_{xxx} + y^*y^*_x = v^*\chi_\omega, & \text{em} \quad I\times(0,\overline{T}), \\ y^*(0,t) = y^*(L,t) = y^*_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,\overline{T}), \\ y^*(x,0) = y_0(x), & \text{em} \quad I. \end{cases}$$

Resta mostrar que $y^*(\cdot,T^*) = 0$ em I. Para qualquer $\sigma > 0$, considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_{xxx} = f, & \text{em} \quad (\sigma,\overline{T}), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\sigma,\overline{T}), \\ u(x,\sigma) = u_\sigma(x), & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{4.4}$$

Semelhante a prova de (3.11), podemos provar que para $u_\sigma \in H^1(I)$ e $f \in L^2(I\times(\sigma,\overline{T}))$, a solução u de (4.4) pertence a classe $C([\sigma,\overline{T}];H^1(I)) \cap L^2(\sigma,\overline{T};H^2(I))$, e satisfaz

$$||u||_{L^\infty(\sigma,\overline{T};H^1(I))} + ||u||_{L^2(\sigma,\overline{T};H^2(I))} \leq C\left(||u_\sigma||_{H^1(I)} + ||f||_{L^2(I\times(\sigma,\overline{T}))}\right), \tag{4.5}$$

no qual $C > 0$ é uma constante que não depende de σ. Note que y_m é a solução de (4.4) com $u_\sigma = y_m(\cdot,\sigma)$ e $f = v_m\chi_\omega - y_m(y_m)_x$. Além disso, podemos estimar f como

$$\begin{aligned} ||f||_{L^2(I\times(\sigma,\overline{T}))} &\leq ||v_m||_{L^2(I\times(\sigma,\overline{T}))} + ||y_m||_{L^\infty(\sigma,\overline{T};L^2(I))}||(y_m)_x||_{L^2(\sigma,\overline{T};L^2(I))} \\ &\leq M + ||y_m||_{L^\infty(\sigma,\overline{T};L^2(I))}||(y_m)||_{L^2(\sigma,\overline{T};H^1(I))} \\ &\leq C(M, ||y_0||_{L^2(I)}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $||y_m||_{B_{\overline{T}}} \leq C(M, ||y_0||_{L^2(I)}$. Substituindo (4.6) em (4.5), obtemos que

$$||y_m||_{L^\infty(\sigma,\overline{T};H^1(I))} + ||y_m||_{L^2(\sigma,\overline{T};H^2(I))} \leq C||y_m(\cdot,\sigma)||_{H^1(I)} + C(M, ||y_0||_{L^2(I)}). \tag{4.7}$$

Ainda, levando em conta que $||y_m||_{B_{\overline{T}}} \leq C(M, ||y_0||_{L^2(I)})$, particularmente, temos

$$\int_0^{T^*/2} ||y_m(\cdot,t)||^2_{H^1(I)}dt \leq \int_0^{\overline{T}} ||y_m(\cdot,t)||^2_{H^1(I)}dt \leq C_1(M, ||y_0||_{L^2(I)}).$$

Dessa forma, para qualquer m, podemos encontrar uma constante $\sigma_m \in (0, T^*/2)$ tal que $y_m(\cdot,\sigma_m) \in H^1(I)$ e

$$||y_m(\cdot,\sigma_m)||_{H^1(I)} \leq \sqrt{2C_1(M, ||y_0||_{L^2(I)})/T^*}. \tag{4.8}$$

Aplicando (4.7) com $\sigma = \sigma_m$ e considerando (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} ||y_m(\cdot,T^*/2)||_{H^1(I)} &\leq ||y_m||_{L^\infty(\sigma_m,\overline{T};H^1(I))} \\ &\leq C||y_m(\cdot,\sigma_m)||_{H^1(I)} + C(M, ||y_0||_{L^2(I)}) \\ &\leq C(M, ||y_0||_{L^2(I)}). \end{aligned}$$

Agora, considerando (4.7) com $\sigma = T^*/2$, podemos obter que $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C([T^*/2,\overline{T}]; H^1(I)) \cap H^1(T^*/2,\overline{T}; H^{-1}(I))$. Logo, pelo Lema de Aubin-Lions, segue que $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto em $C([T^*/2,\overline{T}]; L^2(I))$. Então, podemos deduzir a existência de $\overline{y}^*$ e uma subsequência $(y_{m'})_{m'\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_{m'} \to \overline{y}^* \ \text{ em } \ C([T^*/2,\overline{T}]; L^2(I)).$$

Por unicidade do limite temos que $y^* = \overline{y}^*$ em $I \times (T^*/2, \overline{T})$. Dessa forma

$$\begin{aligned} ||y^*(\cdot,T^*)||_{L^2(I)} &= ||\overline{y}^*(\cdot,T^*)||_{L^2(I)} \\ &\leq ||\overline{y}^*(\cdot,T^*) - \overline{y}^*(\cdot,T_{m'})||_{L^2(I)} + ||\overline{y}^*(\cdot,T_{m'}) - y_{m'}(\cdot,T_{m'})||_{L^2(I)} \\ &\to 0 \text{ quando } m' \to +\infty. \end{aligned}$$

Portanto $y^*(\cdot,T^*) = 0$ em I e, consequentemente, v^* é um controle ótimo. □

4.2 PROPRIEDADE BANG-BANG DO CONTROLE ÓTIMO

Finalmente, demonstraremos o resultado principal deste trabalho, o qual assegura que qualquer controle ótimo para o sistema (4.1) satisfaz a propriedade bang-bang. A prova deste resultado se deve a (CHEN, 2017).

Teorema 4.2 *Para quaisquer $y_0 \in L^2 \backslash \{0\}$ e $M > 0$, o controle ótimo v^* do sistema* (4.1) *satisfaz a propriedade bang-bang: $||v^*||_{L^2(I\times(0,T^*))} = M$, onde T^* é o tempo ótimo correspondente.*

Demonstração: Seja v^* um controle ótimo, então a solução y^* correspondente a v^* satisfaz

$$\begin{cases} y_t^* - y_{xx}^* + y_{xxx}^* + y^* y_x^* = v^*\chi_\omega, & \text{em} \quad I\times(0,+\infty), \\ y^*(0,t) = y^*(L,t) = y_x^*(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0,+\infty), \\ y^*(x,0) = y_0(x), \quad y^*(x,T^*) = 0, & \text{em} \quad I. \end{cases}$$

Suponha por absurdo que existe uma constante $\tau \in (0, M)$ tal que

$$||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M - \tau.$$

Note que isto é equivalente a dizer que $||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} < M$. Vamos provar que T^* não é o tempo mínimo que leva o sistema a zero com funções controle em $\mathcal{V}_M$. Isto é claramente uma contradição com a suposição de tempo ótimo, isto é, $T^* = \inf\{T; v \in \mathcal{V}_M\}$.

De fato, considere $\delta \in (0, T^*/2)$ uma constante que será determinada posteriormente e y^1 a solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} y_t^1 - y_{xx}^1 + y_{xxx}^1 + y^1 y_x^1 + (y^* y^1)_x = 0, & \text{em} \quad I\times(\delta, T^*/2), \\ y^1(0,t) = y^1(L,t) = y_x^1(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta, T^*/2), \\ y^1(x,\delta) = y_0(x) - y^*(x,\delta), & \text{em} \quad I. \end{cases} \tag{4.9}$$

Aplicando a Proposição 2.8 com $T = T^*/2,\ y_\delta = y_0 - y^*(\cdot,\delta)$ e $\xi = y^*$, podemos obter que se $||y_0 - y^*(\cdot,\delta)||_{L^2(I)} \leq \epsilon$, o sistema (4.9) admite uma única solução $y^1 \in B_{(\delta,\ T^*/2)}$, além disso,

$$||y^1||_{B_{(\delta,T^*/2)}} \leq C||y_0 - y^*(\cdot,\delta)||_{L^2(I)},$$

no qual $C = C(T^*, ||y^*||_{B_{T^*/2}})$ não depende de δ. Uma vez que $y^* \in C([0,\ T^*/2]; L^2(I))$, podemos encontrar uma constante $\delta_1 > 0$ suficientemente pequena, tal que, se $\delta \leq \delta_1$,

$$||y^*(\cdot,0) - y^*(\cdot,\delta)||_{L^2(I)} = ||y_0 - y^*(\cdot,\delta)||_{L^2(I)} \leq \epsilon,$$

no qual $\epsilon > 0$ é escolhido a fim de obter $||y^1||_{B_{(\delta,\ T^*/2)}} \leq \rho$, onde ρ é a mesma constante vista no Teorema 3.3. Então, aplicando o Teorema 3.3 com $T_1 = T^*/2, T_2 = T^*, \xi = y^*$ e $y_{T_1} = y^1(\cdot, T^*/2)$, temos que existe uma constante $C(T^*, ||y^*||_{B_{(T^*/2,T^*)}})$ e uma função $v^1 \in L^2(T^*/2, T^*; L^2(I))$ tal que a solução y^2 do sistema

$$\begin{cases} y^2_t - y^2_{xx} + y^2_{xxx} + y^2 y^2_x + (y^* y^2)_x = v^1 \chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (T^*/2, T^*), \\ y^2(0,t) = y^2(L,t) = y^2_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (T^*/2, T^*), \\ y^2(x,0) = y^1(x, T^*/2), & \text{em} \quad I, \end{cases}$$

satisfaz $y^2(\cdot, T^*) = 0$ em I e v^1 verifica

$$\begin{aligned} ||v^1||_{L^2(T_1,T_2;L^2(I))} &\leq C(T^*, ||y^*||_{B_{(T^*/2,T^*)}})||y^1(\cdot, T^*/2)||_{L^2(I)} \\ &\leq C(T^*, ||y^*||_{B_{T^*}})||y_0 - y^*(\cdot, \delta)||_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Novamente usando o fato de que $y^* \in C([0,\ T^*/2]; L^2(I))$, podemos encontrar uma constante $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para $\delta \leq \delta_2$,

$$||y_0 - y^*(\cdot, \delta)||_{L^2(I)} \leq \frac{\tau}{C(T^*, ||y^*||_{B_{T^*}})},$$

o que implica

$$||v^1||_{L^2(T^*/2,T^*;L^2(I))} \leq \tau.$$

Considere

$$\tilde{y} = \begin{cases} y^1, & \text{se } I \times (\delta, T^*/2), \\ y^2, & \text{se } I \times (T^*/2, T^*), \end{cases} \quad \text{e} \quad v^2(\cdot, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in (0, T^2/2] \cup [T^*, +\infty), \\ v^1(\cdot, t), & \text{se } t \in (T^*/2, T^*). \end{cases}$$

Então $z = y^* + \tilde{y}$ satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + z_{xxx} + z z_x = (v^2 + v^*)\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (\delta, T^*), \\ z(0,t) = z(L,t) = z_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (\delta, T^*), \\ z(x,\delta) = y_0(x),\ z(x, T^*) = 0, & \text{em} \quad I. \end{cases}$$

Portanto, concluímos que para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, a função $y(\cdot, t) = z(\cdot, t + \delta)$ é solução de

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + y_{xxx} + y y_x = v\chi_\omega, & \text{em} \quad I \times (0, T^* - \delta), \\ y(0,t) = y(L,t) = y_x(L,t) = 0, & \text{em} \quad (0, T^* - \delta), \\ y(x,0) = y_0(x),\ y(x, T^* - \delta) = 0, & \text{em} \quad I, \end{cases}$$

onde $v(\cdot,t) = v^2(\cdot,t+\delta) + v^*(\cdot,t+\delta)$ satisfaz

$$||v||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq ||v^1||_{L^2(T^*/2,T^*;L^2(I))} + ||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} \leq M.$$

Mas isto contradiz a hipótese de que $T^* = \inf\{T; v \in \mathcal{V}_M\}$, dado o fato de que encontramos um tempo menor do que T^* tal que o controle associado a ele pertence a $\mathcal{V}_M$. Esta contradição ocorre por supormos que $||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} < M$, mas como v^* é um controle admissível concluímos que

$$||v^*||_{L^2(I\times(0,+\infty))} = M$$

como queríamos demonstrar. $\square$

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. [S.l.]: Elsevier, 2003.

BALOGH, A.; KRSTIC, M. Boundary control of the korteweg-de vries-burgers equation: further results on stabilization and well-posedness, with numerical demonstration. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 45, n. 9, p. 1739–1745, 2000.

BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolation spaces: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 223.

BOUSSINESQ, J. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. [S.l.]: Imprimerie nationale, 1877.

BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 2.

BURGERS, J. Application of a model system to illustrate some points of the statistical the-ory of free turbulence. *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, v. 43, 1940.

CAPISTRANO-FILHO, R. A.; GONZALEZ-MARTINEZ, V. H. Stabilization results for delayed fifth-order kdv-type equation in a bounded domain. *Mathematical Control and Related Fields*, v. 14, n. 1, p. 284–321, 2024.

CAPISTRANO-FILHO, R. A.; PAZOTO, A. F.; ROSIER, L. Internal controllability of the korteweg–de vries equation on a bounded domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, v. 21, n. 4, p. 1076–1107, 2015.

CHEN, M. Bang–bang property for time optimal control of the korteweg-de vries-burgers equation. *Applied Mathematics & Optimization*, Springer, v. 76, p. 399–414, 2017.

CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1955. v. 158.

EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2022. v. 19.

FATTORINI, H. Time-optimal control of solutions of operational differenital equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, SIAM, v. 2, n. 1, p. 54–59, 1964.

JEFFREY, A.; MOHAMAD, M. Exact solutions to the kdv-burgers' equation. *Wave motion*, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 369–375, 1991.

JOHNSON, R. S. *Non-linear waves in fluid-filled elastic tubes and related problems*. Tese (Doutorado) — University of London, 1971.

KARCH, G. Self-similar large time behavior of solutions to korteweg–de vries–burgers equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 35, n. 2, p. 199–219, 1999.

KESAVAN, S. *Topics in Functional Analusis and Applications*. [S.l.]: New Age International (P) Ltd, 2003.

KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. D. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 39, n. 240, p. 422–443, 1895.

KUNISCH, K.; WANG, L. Time optimal controls of the linear fitzhugh–nagumo equation with pointwise control constraints. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 395, n. 1, p. 114–130, 2012.

LIONS, J.; MAGENES, E. *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*. [S.l.]: Dunod, 1968. v. 1.

LIONS, J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM review*, SIAM, v. 30, n. 1, p. 1–68, 1988.

LÜ, Q. Bang-bang principle of time optimal controls and null controllability of fractional order parabolic equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Springer, v. 26, n. 12, p. 2377–2386, 2010.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. Espaços de sobolev. *IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*, 2019.

MICU, S.; ZUAZUA, E. An introduction to the controllability of partial differential equations. *Quelques questions de théorie du contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, to appear*, Citeseer, 2004.

MIZEL, V. J.; SEIDMAN, T. I. An abstract bang-bang principle and time-optimal boundary control of the heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 35, n. 4, p. 1204–1216, 1997.

PALOMINO, J. A. S.; CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS-CAVALCANTI, V. N. *Semigrupos lineares e não lineares e aplicações*. [S.l.]: Notas de Aula-Universidade Estadual de Maringá, 2016.

PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.

PHUNG, K. D.; WANG, L.; ZHANG, C. Bang-bang property for time optimal control of semilinear heat equation. In: ELSEVIER. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*. [S.l.], 2014. v. 31, n. 3, p. 477–499.

ROSIER, L. Exact boundary controllability for the korteweg-de vries equation on a bounded domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, EDP Sciences, v. 2, p. 33–55, 1997.

SCHWARTZ, L. Théorie des distributions, hermann, paris, 1966. *MR*, v. 35, p. 730, 2002.

SIMON, J. Compact sets in the space $\mathrm{Lp}(0, \mathrm{T}; \mathrm{B})$. *Ann. Mat. Pura Appl*, v. 146, n. 6, p. 65–96, 1987.

SMAOUI, N.; AL-JAMAL, R. H. Boundary control of the generalized korteweg–de vries–burgers equation. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 51, p. 439–446, 2008.

WANG, G.; WANG, L. The bang-bang principle of time optimal controls for the heat equation with internal controls. *Systems & control letters*, Elsevier, v. 56, n. 11-12, p. 709–713, 2007.

WANG, G.; WANG, L.; XU, Y.; ZHANG, Y. *Time optimal control of evolution equations*. [S.l.]: Springer, 2018.

WIJNGAARDEN, L. v. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Annual review of fluid Mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 4, n. 1, p. 369–396, 1972.

YAMAMOTO, M. Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse problems*, IOP Publishing, v. 25, n. 12, p. 123013, 2009.

ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: I: Fixed-Point Theorems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986.