



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA

**Título:** Controle nulo da equação do calor unidimensional: Uma análise matemática e numérica

Recife

2024

JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA

**Título:** Controle nulo da equação do calor unidimensional: Uma análise matemática e numérica

Trabalho apresentado ao Programa de Pósgraduação em Matemática do Centro de ciências exatas e da natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

**Área de Concentração:** Análise

**Orientador (a):** Prof. Roberto de Almeida Capistrano Filho

Recife

2024

**FICHA**

# **JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA**

*Controle nulo da equação do calor unidimensional: Uma análise matemática e numérica*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 26/07/2024

## **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho (Examinador Externo)  
Universidade Universidade Estadual do Piauí

---

Prof. Dr. Rodrigo Adolfo Véjar Asem (Examinador Externo)  
Universidad de La Serena/Chile

À minha mãe, por todo incentivo e apoio, dedico.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus que me deu o dom da vida e por me abençoar todos os dias com o seu amor infinito.

A minha amada mãe, Maria do Socorro, por ser minha base, por todo o amor, pelos ensinamentos, pelas lições de vida e pelas palavras sinceras e sábias. Agradeço sua paciência e compreensão referente à minha dedicação exclusiva aos estudos, me possibilitando continuar firme e forte nessa jornada acadêmica.

A minha irmã, Maria Jéssica, pelo apoio e ensinamento repassado, os quais me ajudaram a chegar nessa etapa da minha vida.

Ao meu professor e orientador, Prof. Roberto de Almeida Capistrano Filho, pela confiança em mim depositada para realização deste trabalho, assim como os seus ensinamentos repassados, companheirismo, paciência, dedicação e excelente orientação.

A todos os professores da UEPB e UFPE, assim como todos os outros que tive a honra de ter contato.

Ao Prof. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, sou grato pela ajuda referente ao programa FreeFEM++ e pelo suporte na teoria de análise numérica, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos que fiz durante minha graduação e mestrado, especialmente à Caio Vinícius, Eduardo Cruz, Érick Caetano, Jandeilson Santos, Júnior Leal, Leonardo Tavares e Matheus Marques, pelo apoio, amizade sincera, conhecimento repassado e risadas. Todos foram indispensáveis para torna esta jornada mais satisfatória.

Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora, Prof. Rodrigo Véjar Asem e Prof. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, agradeço pela leitura atenta e pelas valiosas contribuições ao meu trabalho.

À FACEPE, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal analisar a controlabilidade nula para a equação do calor unidimensional com potencial e condições de contorno do tipo Dirichlet, além de realizar sua análise numérica utilizando um método numérico primal. Inicialmente, demonstramos a existência e unicidade de soluções para o sistema em consideração através da teoria de semigrupos. O resultado de controlabilidade nula é então estabelecido via um argumento de dualidade, que envolve a prova de uma desigualdade de observabilidade. Essa desigualdade é obtida utilizando as técnicas desenvolvidas por Fursikov e Imanuvilov. Adicionalmente, abordamos a solução numérica da formulação variacional correspondente, introduzindo o método dos elementos finitos no espaço-tempo. Finalmente, utilizando o programa FreeFEM++, apresentamos resultados numéricos que corroboram com a análise matemática realizada.

**Palavras-chaves:** Equação do Calor, Controle nulo, Análise numérica, FreeFEM++.

## ABSTRACT

This work aimed to analyze the null controllability for the one-dimensional heat equation with potential and Dirichlet boundary conditions, and to perform its numerical analysis using a primal numerical method. Initially, we demonstrated the existence and uniqueness of solutions for the system under consideration through semigroup theory. The null controllability result is then established via a duality argument, which involves proving an observability inequality. This inequality is obtained using techniques developed by Fursikov and Imanuvilov. Additionally, we addressed the numerical solution of the corresponding variational formulation by introducing finite elements in space-time. Finally, using the FreeFEM++ program, we provide numerical supporting support the mathematical analysis.

**Keywords:** Heat Equation, Null Control, Numerical Analysis, FreeFEM++.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Haste de comprimento $L$ . . . . .	11
Figura 2 – Malha com $\Delta t = \Delta x$ . . . . .	73
Figura 3 – Plotagem de $\rho^{-2}$ . . . . .	73
Figura 4 – Plotagem de $\rho_0^{-2}$ . . . . .	74
Figura 5 – Plotagens de $y_h$ . . . . .	74
Figura 6 – Plotagens de $v_h$ . . . . .	75
Figura 7 – Evolução temporal da norma $L^2(0, 1)$ . . . . .	75

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Caso $\omega = (0.3, 0.6)$ , $\alpha = 0$ e $s = 0.45$ . . . . .	76
Tabela 2	– Caso $\omega = (0.3, 0.6)$ , $\alpha = 0$ e $s = 0.45$ . . . . .	76
Tabela 3	– Caso $\omega = (0.2, 0.8)$ , $\alpha = 0$ e $s = 0.5$ . . . . .	76
Tabela 4	– Caso $\omega = (0.2, 0.8)$ , $\alpha = 0$ e $s = 0.5$ . . . . .	76
Tabela 5	– Caso $\omega = (0.3, 0.6)$ , $\alpha = 0.5$ e $s = 0.45$ . . . . .	76
Tabela 6	– Caso $\omega = (0.3, 0.6)$ , $\alpha = 0.5$ e $s = 0.45$ . . . . .	77
Tabela 7	– Caso $\omega = (0.2, 0.8)$ , $\alpha = 0.5$ e $s = 0.5$ . . . . .	77
Tabela 8	– Caso $\omega = (0.2, 0.8)$ , $\alpha = 0.5$ e $s = 0.5$ . . . . .	77

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>RESULTADOS AUXILIARES</b>	<b>14</b>
2.1	ESPAÇOS $L^p$	14
2.2	ESPAÇOS FUNCIONAIS	15
2.3	ESPAÇOS DE SOBOLEV	16
2.4	ANÁLISE FUNCIONAL	17
2.5	TEORIA DE SEMIGRUPO	19
2.6	DESIGUALDADES ESSENCIAIS	21
2.7	OUTROS RESULTADOS	22
2.8	ANÁLISE NUMÉRICA	23
<b>2.8.1</b>	<b>Método dos elementos finitos</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>BOA COLOCAÇÃO</b>	<b>27</b>
3.1	BOA COLOCAÇÃO E REGULARIDADE DO PROBLEMA	27
<b>4</b>	<b>CONTROLABILIDADE NULA</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>ABORDAGEM VARIACIONAL</b>	<b>49</b>
5.1	UMA ABORDAGEM VARIACIONAL PARA O PROBLEMA DE CONTROLABILIDADE NULA	49
5.2	REFORMULAÇÃO DA IGUALDADE VARIACIONAL	54
<b>5.2.1</b>	<b>Uma reformulação variacional equivalente</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>58</b>
6.1	APROXIMAÇÃO EM DIMENSÃO FINITA	58
6.2	OS ESPAÇOS DE DIMENSÃO FINITA $Z_h$	60
6.3	Estimativa para $\ z - \Pi_h z\ _Z$	64
<b>7</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b>	<b>72</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE A – ESTIMATIVA DE CARLEMAN</b>	<b>81</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A equação do calor, também conhecida como equação de difusão térmica, é uma equação diferencial parcial com inúmeras aplicações na física e na matemática aplicada. Sua origem remonta ao início do século XIX, quando o físico e matemático francês Joseph Fourier formulou uma descrição matemática para a propagação do calor em sólidos. Em sua obra *Théorie analytique de la chaleur* (FOURIER, 1822), publicada em 1822, Fourier descreveu que o fluxo de calor é proporcional ao gradiente da temperatura e apresentou a equação que descreve esse fenômeno como

$$y_t = \alpha \nabla^2 y.$$

Nessa equação,  $y(x, t)$  representa a temperatura em um ponto  $x$  e no tempo  $t$ , enquanto  $\alpha$  é a constante difusividade térmica do material, que depende das propriedades físicas do meio.

Em um caso simplificado e em condições adequadas, consideremos uma haste de comprimento  $L$ . Seja  $y$  a função que descreve a temperatura na haste no ponto  $(x, t)$ , com sua temperatura inicial descrita por  $y(x, 0) = f(x)$  e  $y(0, t) = y(L, t) = \text{constante}$ . Analisemos uma seção da haste, digamos  $[a, a + h]$ .

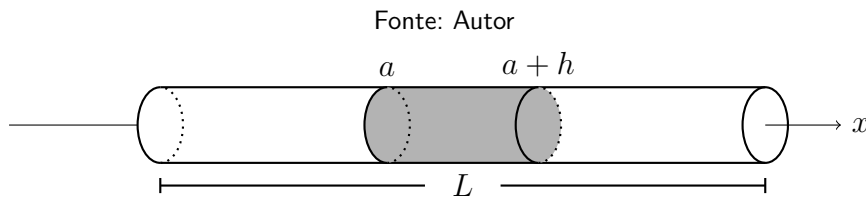


Figura 1 – Haste de comprimento  $L$

Sendo  $U$  a energia interna e  $q$  o fluxo da energia térmica, então  $U_t = M(q(a, t) - q(a + h, t))$ , onde  $M$  a área da seção transversal, que no problema é constante. Por outro lado,

$$U = \int_a^{a+h} \rho c M y \, dx,$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $c$  é o calor específico do material. Desta forma,

$$\left( \int_a^{a+h} \rho c M y \, dx \right)_t = M(q(a, t) - q(a + h, t)).$$

Sendo  $M$  constante,

$$\int_a^{a+h} \rho c y_t \, dx = q(a, t) - q(a + h, t).$$

Dividindo ambos os lados por  $h$ ,

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} \rho c y_t dx = -\frac{q(a+h, t) - q(a, t)}{h}. \quad (1.1)$$

Considerando  $h \rightarrow 0$  em (1.1), obtemos

$$\rho c y_t(a, t) = -q_x(a, t). \quad (1.2)$$

Pela Lei de Fourier, o fluxo de energia vai do sentido mais quente para o mais frio, matematicamente  $q = -ky_x$  (Lei de Fourier), desta forma, substituindo  $q$  em (1.2), verificamos que

$$\rho c y_t(a, t) = ky_{xx}(a, t).$$

Logo,

$$y_t(a, t) = Ky_{xx}(a, t), \quad \forall a \in [0, L],$$

onde  $K = \frac{k}{\rho c}$ . Portanto,

$$y_t(x, t) = Ky_{xx}(x, t).$$

Para mais detalhes sobre a dedução da equação do calor referenciamos (FOURIER, 1822) ou (FIGUEIREDO, 2018).

Com tal motivação, o objetivo da presente dissertação consistiu em discutir os resultados obtidos em (CARA; MÜNCH, 2013). Nela usamos as ferramentas da teoria de controle no intuito de checarmos, inicialmente, a propriedade de controlabilidade nula para o problema <sup>1</sup>

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + A(x, t)y = v1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.3)$$

em que  $\omega$  é um subconjunto aberto não vazio de  $(0, 1)$ ,  $1_\omega$  é a função característica associada,  $a \in L^\infty(0, 1)$ , com  $a(x) \geq a_0 > 0$  q.s,  $A \in L^\infty((0, 1) \times (0, T))$  e  $y_0 \in L^2(0, 1)$ . Em (1.3),  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  é o controle e  $y = y(x, t)$  é o estado associado. Em suma, essa etapa teve como preocupação analisar a existência de uma função  $v$  tal que a solução do problema (1.3) seja conduzida a partir de um estado inicial  $y_0$  até 0, em um tempo  $t = T$ . Isso foi provado via argumento de dualidade que consiste em demonstrar uma desigualdade de observabilidade. Tal desigualdade é alcançada usando as técnicas introduzidas por Fursikov e Imanuvilov em

<sup>1</sup> A dedução deste problema segue como no caso anterior ao considerarmos que fisicamente temos  $U_t = M(q(a, t) - q(a+h, t)) + \int_a^{a+h} A(x, t)y(x, t) dx$  e  $q = -a(x)y_x$ .

(FURSIKOV; IMANUVILOV, 1996). Adicionalmente, abordamos a obtenção do controle nulo e do estado via análise numérica, utilizando o método dos elementos finitos para aproximar a solução de um problema variacional. Após obtermos a aproximação de  $z$ , o estado e o controle ficam determinados por

$$y = \rho^{-1} (A_1 z + A_2 z_t + A_3 z_x + A_4 z_{xx}) \quad \text{e} \quad v = -(T - t)^\alpha \rho_0^{-1} z 1_\omega.$$

Para outras abordagens sobre a análise numérica aplicada à equação do calor referenciamos (CARA; MÜNCH, 2014) e (CARA; MÜNCH; SOUZA, 2016), onde são aplicados outros métodos numéricas referentes ao problema (3.1), por exemplo, o método do gradiente conjugado. Para o caso semilinear referenciamos (CARA; MÜNCH, 2011), onde o Método de Newton–Raphson é utilizado. Para o caso com  $A \equiv 0$ , referenciamos (CARA; MÜNCH, 2010). Sobre outras abordagens envolvendo formulações mistas, referenciamos (CARVALHO; CARA, 2019), (CARVALHO; CARA, 2020) e (CARVALHO; CARA; FERREL, 2020)

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos os resultados clássicos e essenciais que foram utilizados no decorrer do trabalho. No Capítulo 3, provamos a boa colocação para o problema (1.3), garantindo que a solução  $u \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ . No Capítulo 4, mostramos a controlabilidade nula para (1.3), garantido que, de fato,  $u(x, T) = 0$  em um tempo finito  $t = T$ . No Capítulo 5, discutimos sobre um problema variacional vinculado a obtenção de um mínimo para um funcional que envolve o par estado-controle. No Capítulo 6, tratamos sobre a passagem do problema variacional apresentado no Capítulo 5 para uma abordagem numérica, em particular, utilizando um método primal. No Capítulo 7, discutimos a obtenção de resultados numéricos acerca do método numérico aplicado no Capítulo 6, onde usamos como ferramenta o programa FreeFEM++ para os experimentos numéricos. Por fim, no Apêndice, provamos uma desigualdade do tipo Carleman para o problema (3.1) com  $a(x) \equiv 1$ .

## 2 RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e conceitos básicos relacionados à teoria das distribuições, análise funcional, teoria da medida, espaço de Sobolev, teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, análise numérica, entre outros que foram de fundamental importância no decorrer deste trabalho.

### 2.1 ESPAÇOS $L^p$

**Definição 2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Denotamos por  $L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $|u|^p$  é integrável a Lebesgue em  $\Omega$ .*

Com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach. No caso  $p = \infty$ , denotamos por  $L^\infty(\Omega)$  o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em  $\Omega$ , isto é, existe uma constante  $C > 0$ , tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ quase sempre em } \Omega,$$

que munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|$$

é um espaço de Banach. Em particular, se  $p = 2$ , temos que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x).$$

Dizemos que uma sequência  $(\varphi_n)$  em  $L^p(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $L^p(\Omega)$  se

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Proposição 2.2.** *Se  $(X, \mathbb{X}, \mu)$  é um espaço de medida finita, isto é,  $\mu(X) < \infty$ . Então,  $L^p \subset L^1$ , para todo  $p \geq 1$ .*

**Demonstração:** Ver (BARTLE, 1995). ■

Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, definimos por suporte de  $f$ , e denotamos por  $\text{supp}(f)$ , o fecho do conjunto  $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ . Dessa forma,  $\text{supp}(f)$  é um subconjunto fechado de  $\Omega$ .

**Definição 2.3.** Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) pertence ao espaço  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  se for localmente integrável, ou seja, se para todo subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , a função  $f$  for integrável sobre  $K$ . Mais formalmente, uma função  $f$  pertence a  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  se:

$$\forall K \subset\subset \Omega, \int_K |f(x)| dx < \infty,$$

onde  $K \subset\subset \Omega$  significa que  $K$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$ .

## 2.2 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Uma  $n$ -upla de inteiros não negativos  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é denominada multi-índice e sua ordem é definida por  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Representa-se por  $D^\alpha$  o operador derivação de ordem  $|\alpha|$ , isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , define-se  $D^0 u = u$ , para toda função  $u$ .

Denotaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, isto é, que se anulam em qualquer subconjunto compacto de  $\Omega$ .

**Definição 2.4.** Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Uma seqüência  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$ , quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) Existe um compacto  $K$  de  $\Omega$  tal que  $\text{supp}(\varphi), \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- ii) Para todo multi-índice  $\alpha$ , tem-se  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente em  $K$ .

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , munido da noção de convergência acima definida será denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e denominado de espaço das funções testes sobre  $\Omega$ .

Uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

- a)  $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$  e  $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ;
- b)  $T$  é contínua, isto é, se  $\varphi_n$  converge para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então  $T(\varphi_n)$  converge para  $T(\varphi)$  em  $\mathbb{R}$ .



Denotaremos o valor da distribuição  $T$  em  $\varphi$  por  $\langle T, \varphi \rangle$  e por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$ .

**Lema 2.5** (Du Bois Reymond). *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Então,  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Ver (BREZIS, 2010). ■

**Exemplo 2.6.** *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . O funcional  $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx,$$

*é uma distribuição.*

Em particular, em virtude do Lema de Du Bois Reymond, segue que se  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , então  $T_u = T_v$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , se e somente, se  $u = v$ . Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo  $T_u$  com o espaço  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Definição 2.7.** *Seja  $T$  uma distribuição sobre  $\Omega$  e  $\alpha$  um multi-índice. A derivada  $D^\alpha T$  de ordem  $|\alpha|$  de  $T$  é um funcional  $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

*Além disso,  $D^\alpha T$  é uma distribuição sobre  $\Omega$*

Decorre da definição que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.

**Corolário 2.8.**  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$   $1 \leq p < \infty$ .

**Demonstração:** Ver (MEDEIROS; MILLA, 2000). ■

### 2.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

No que segue, definiremos os espaços de Sobolev e destacaremos algumas propriedades básicas. Considere  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Se  $u \in L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , sabemos que  $u$  possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que  $D^\alpha u$  é definida por uma função de  $L^p(\Omega)$ . Quando  $D^\alpha u$  é definida por uma função de  $L^p(\Omega)$ , definimos o espaço de Sobolev. Dado um número inteiro  $m > 0$ , representa-se  $W^{m,p}(\Omega)$  o espaço vetorial de todas as funções  $u$  pertencentes a  $L^p(\Omega)$ , tais que para todo

multi-índice  $|\alpha| \leq m$ , tem-se  $D^\alpha u$  pertence a  $L^p(\Omega)$ , isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

Para cada  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ , definimos a norma de  $u$  como segue

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p, \text{ quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{\infty,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}^p(\Omega), \text{ quando } p = \infty.$$

**Observação 2.9.** Quando  $p = 2$ , representa-se  $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$  devido a estrutura Hilbertiana de tais espaços.

O próximo resultado garante imersões dos espaço  $H^m$  em  $C^0(\overline{\Omega})$ .

**Teorema 2.10.** Seja  $\Omega$  um aberto limitado, bem regular, do  $\mathbb{R}^n$ . Então, se  $m > \frac{n}{2}$  resulta que  $H^m(\Omega)$  está continuamente imerso em  $C^0(\overline{\Omega})$ , espaço das funções contínuas sobre o fecho de  $\Omega$ .

**Demonstração:** Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 1989). ■

## 2.4 ANÁLISE FUNCIONAL

Descreveremos alguns resultados usados no decorrer do trabalho. Para mais detalhes, referenciamos (BREZIS, 2010).

**Definição 2.11.** Uma função  $f$  é dita estritamente convexa se para  $x \neq y$  e  $0 < \theta < 1$ , vale:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

**Teorema 2.12.** Sejam  $H$  um espaço de Banach reflexivo,  $K$  um subconjunto convexo fechado de  $H$  e  $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com as seguintes propriedades:

1.  $\phi$  é convexa;
2.  $\phi$  semi-contínua inferiormente;
3. Se  $K$  é ilimitado, então  $\phi$  é coercivo, ou seja

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \phi(x) = \infty.$$

Então,  $\phi$  atinge um mínimo em  $K$ , ou seja, existe  $x_0 \in K$  tal que

$$\phi(x_0) = \min_{x \in K} \phi(x).$$

**Demonstração:** Ver (BREZIS, 2010). ■

**Lema 2.13** (Lax-Milgram). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $a : H \times H$  uma forma bilinear contínua e coerciva. Então, para todo  $\varphi \in H'$ , existe um único  $u \in H$  tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração:** Ver (BREZIS, 2010). ■

**Teorema 2.14** (Regularidade  $H^2$ ). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto de classe  $C^2$  com fronteira limitada,  $a(x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  que verifica*

$$\iint_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla v \, dxdt + \iint_{\Omega} uv \, dxdt = \iint_{\Omega} fv \, dxdt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Então,  $u \in H^2(\Omega)$  e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

onde  $c$  é uma constante que depende de  $\Omega$  e de  $\|a\|_{C(\bar{\Omega})}$ .

**Demonstração:** Ver (EVANS, 2022). ■

**Teorema 2.15.** *Suponha que  $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , com  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Então,*

$$u \in C([0, T]; L^2(U)).$$

**Demonstração:** Ver (EVANS, 2022). ■

**Teorema 2.16.** *Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach sobre o mesmo corpo de escalares  $\mathbb{K}$  e  $(T_n)_{n \in \mathcal{L}(E, F)} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$  tal que  $(T_n x)_{n \in \mathcal{L}(E, F)}$  converge em  $F$  para todo  $x \in E$ . Se*

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x, \quad \forall x \in E,$$

então

$$i) \quad \sup_{n \in \mathcal{L}(E, F)} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty;$$

$$ii) \quad T \in \mathcal{L}(E, F);$$

$$iii) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

**Demonstração:** Ver (BREZIS, 2010). ■

## 2.5 TEORIA DE SEMIGRUPO

Apresentaremos a seguir resultados relativos à teoria de semigrupos de operadores lineares, os quais podem ser encontrados em (PALOMINO; CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2016) ou (PAZY, 1983).

**Definição 2.17.** *Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach e  $\mathcal{L}(X)$  a álgebra dos operadores lineares e limitados de  $X$ . Diz-se que uma aplicação  $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  é um semigrupo de operadores limitados de  $X$  se:*

$$S(0) = I, \text{ onde } I \text{ denota o operador identidade de } X$$

e

$$S(t + s) = S(t)S(s), \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Dizemos que o semigrupo é de classe  $C_0$  se:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

**Proposição 2.18.** *Se  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , então  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é uma função limitada em todo intervalo limitado  $[0, T]$  e existem constantes  $M$  e  $\omega$  satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \tag{2.1}$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2016). ■

**Observação 2.19.** *Se as constantes em (2.1) são  $M = 1$  e  $\omega = 0$ , chamamos  $S$  de semigrupo de contração de classe  $C_0$ .*

**Definição 2.20.** *O operador  $A$  definido por*

$$A(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$$

e domínio

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ .

**Observação 2.21.** *O operador  $A$  é um operador linear e  $D(A)$  é um subespaço de  $X$ .*

Dizemos que  $A \in G(M, \omega)$  quando  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ , denotado por  $(S(t))_{t \geq 0}$ , que satisfaz

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

para todo  $t \geq 0$ .

Seja  $X$  um espaço de Banach,  $X'$  o dual topológico de  $X$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade entre  $X'$  e  $X$ . Definamos, para cada  $x \in X$ ,

$$F(x) = \{x^* \in X'; \langle x^*, x \rangle = \|x^*\|^2 = \|x\|^2\}.$$

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach,  $F(x) \neq \emptyset$  seja qual for o  $x \in X$ . Resulta daí o conceito de aplicação dualidade:

**Definição 2.22.** *Uma aplicação de dualidade é uma aplicação  $j : X \rightarrow X^*$ , tal que  $j(x) \in F(x)$ , para todo  $x \in X$ , ou seja,  $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$ .*

**Definição 2.23.** *Um operador linear  $A$  é dito dissipativo, relativamente a uma aplicação dualidade  $j$ , se*

$$\operatorname{Re}\langle j(x), Ax \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

**Definição 2.24.** *Um operador dissipativo  $A$  que satisfaça  $\operatorname{Im}(I - A) = X$  é denominado  $m$ -dissipativo.*

**Teorema 2.25** (Teorema de Lumer-Phillips). *Se  $A \in G(1, 0)$ , então*

- (i)  *$A$  é dissipativo, relativamente a qualquer aplicação dualidade;*
- (ii)  *$\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ , para todo  $\lambda > 0$ .*

*Reciprocamente, se:*

- (iii)  *$D(A)$  é denso em  $X$ ;*
- (iv)  *$A$  é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade;*
- (v)  *$\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ , para algum  $\lambda_0 > 0$ .*

*Então,  $A \in G(1, 0)$ .*

**Demonstração:** Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2016). ■

Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  o gerador infinitesimal de um semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  e  $f \in L^1(0, T; X)$ . Dado  $u_0 \in D(A)$ , o problema de Cauchy abstrato consiste em determinar uma função  $u(t)$ , tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Definição 2.26.** Dizemos que  $u$  é solução clássica (ou forte) de (2.2) em  $[0, +\infty)$ , se  $u$  satisfaz (2.2) e  $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$ .

**Teorema 2.27.** Se  $A \in G(M, \omega)$  e  $u_0 \in D(A)$ , o problema (2.2) possui uma solução clássica.

Por fim, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Definição 2.28.** Uma função  $u : [0, +\infty) \rightarrow X$  é uma solução clássica de (2.3) em  $[0, +\infty)$  se  $u$  satisfaz (2.3) em  $[0, +\infty)$  e  $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$ . Uma função  $u \in C([0, T]; X)$ , dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds$$

é chamada de “mild solution”, ou solução generalizada, de (2.3) em  $[0, T]$ .

**Teorema 2.29.** Se  $f : X \rightarrow X$  é uma função Lipschitziana, ou seja,

$$\|fu - fv\|_X \leq L\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Então, para todo  $u_0 \in X$ , existe uma única função  $u \in C^0([0, +\infty); X)$ , a qual é solução generalizada de (2.3).

**Demonstração:** Ver (PALOMINO; CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2016). ■

## 2.6 DESIGUALDADES ESSENCIAIS

**Lema 2.30** (Desigualdade de Young). Sejam  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 < p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Segue que se  $A, B$  são quaisquer números reais não negativos, então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $A^p = B^q$ .

**Demonstração:** Ver (BARTLE, 1995). ■

**Lema 2.31** (Desigualdade de Hölder). Sejam  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$  onde  $p > 1$  e  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Então,  $fg \in L^1$  e  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

**Demonstração:** Ver (BARTLE, 1995). ■

**Lema 2.32** (Desigualdade de Minkowski). *Sejam  $f$  e  $h$  pertencentes ao espaço  $L^p$ , com  $p \geq 1$ , então  $f + h \in L^p$  e vale*

$$\|f + h\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|h\|_{L^p}.$$

**Demonstração:** Ver (BARTLE, 1995). ■

**Lema 2.33** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega$  um intervalo limitado. Então existe uma constante  $C$  (dependendo de  $|\Omega| < \infty$ ) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u'\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

*Em outras palavras, em  $W_0^{1,p}$ ,  $\|u'\|_{L^p(\Omega)}$  é uma norma equivalente à norma de  $W^{1,p}$ .*

**Demonstração:** Ver (BREZIS, 2010). ■

**Lema 2.34** (Desigualdade Gronwall). *Seja  $z(t)$  uma função real absolutamente contínua em  $[0, a[$  tal que para todo  $t \in [0, a[$  tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s) ds.$$

*Então,  $z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[$ .*

**Demonstração:** Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 1989). ■

## 2.7 OUTROS RESULTADOS

**Definição 2.35.** *Se  $E$  é um subconjunto de  $Z = X \times Y$  e  $x \in X$ , então a  $x$ -seção de  $E$  é o conjunto*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

*De forma análoga, se  $y \in Y$ , então a  $y$ -seção de  $E$  é o conjunto*

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

*Se  $f$  é uma função definida de  $Z$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  e  $x \in X$ , então a  $x$ -seção de  $f$  é a função  $f_x$  definido em  $Y$  por*

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y.$$

*Da mesma forma, se  $y \in Y$ , então a  $y$ -seção de  $f$  é a função  $f^y$  definida em  $X$  por*

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X.$$

**Teorema 2.36** (Fubini). *Sejam  $(X, \mathbb{X}, \mu)$  e  $(Y, \mathbb{Y}, \nu)$  espaços  $\sigma$ -finitos e  $\pi$  a medida produto de  $\mu$  e  $\nu$  em  $Z = X \times Y$ . Se a função  $F$  de  $Z = X \times Y$  em  $\mathbb{R}$  for integrável com respeito à medida  $\pi$ , então as funções estendidas a valores reais definidas q.t.p por*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu \quad \text{e} \quad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

têm integrais finitas e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Em outra notação,

$$\int_X \left[ \int_Y F d\nu \right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[ \int_X F d\mu \right] d\nu.$$

**Demonstração:** Ver (BARTLE, 1995). ■

**Teorema 2.37.** *Suponhamos que  $U$  seja limitado e  $\partial U$  seja  $C^1$ . Então, existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$$

de modo que:

(i)  $Tu = u|_{\partial U}$  se  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$  e

(ii)

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

para cada  $u \in W^{1,p}(U)$ , com a constante  $C$  dependendo apenas de  $p$  e  $U$ .

**Demonstração:** Ver (EVANS, 2022). ■

## 2.8 ANÁLISE NUMÉRICA

A análise numérica desempenha um papel crucial na resolução de equações diferenciais parciais. Muitas equações são complexas para serem resolvidas pelas teorias usuais, tornando necessária a utilização de métodos numéricos para obtermos soluções aproximadas, transformando problemas contínuos em problemas discretos que podem ser resolvidos com a ajuda de programas computacionais, oferecendo assim uma abordagem prática e eficaz.

No que segue, daremos uma breve introdução sobre o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas aplicados a problemas variacionais. Recomendamos (CIARLET, 2002) e (RINCON; LIU, 2020) para mais detalhes.



### 2.8.1 Método dos elementos finitos

Consideremos um problema na sua formulação fraca, a saber:

$$\text{Encontrar } u \in V, \text{ tal que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.4)$$

onde  $V$  é o espaço solução para o problema,  $a(\cdot, \cdot)$  é um funcional bilinear em  $V \times V$  e  $l(\cdot)$  é um funcional linear em  $V$ .

A formulação aproximada do problema (2.4) é:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.5)$$

onde  $V_h$  é um subespaço de dimensão finita de  $V$  que consiste em funções polinomiais contínuas por partes de grau fixo associadas a uma subdivisão do domínio.

Desta forma, se

$$\dim V_h = N(h) \quad \text{e} \quad V_h = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_{N(h)} \},$$

a solução aproximada em termo dos elementos da base torna-se

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N(h)} U_i \phi_i(x),$$

e o problema (2.5) agora consiste em encontrar  $(U_1, \dots, U_{N(h)}) \in \mathbb{R}^{N(h)}$  satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{N(h)} a(\phi_i, \phi_j) U_i = l(\phi_j), \quad j = 1, \dots, N(h). \quad (2.6)$$

Observemos que (2.6) é um sistema de equações lineares para  $U = (U_1, \dots, U_{N(h)})^T$ , onde a matriz do sistema  $A = (a(\phi_j, \phi_i))$  tem dimensão  $N(h) \times N(h)$ . Como os  $\phi_i$ 's têm suporte compacto, segue que  $a(\phi_j, \phi_i) = 0$  para a maioria dos pares de  $i$  e  $j$ , então, isso garante que a matriz  $A$  seja esparsa, isto é, a maioria das suas entradas são iguais à 0. Essa propriedade é crucial do ponto de vista da eficiência para obtenção da solução, visto que, em geral, os métodos iterativos rápidos são aplicáveis aos sistemas lineares com essa propriedade.

**Exemplo:** Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -(a(x)u')' + A(x)u = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Sendo

$$\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 A(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad v \in H_0^1(0,1)$$

a sua formulação fraca, o problema aproximado é dado por

$$\int_0^1 a(x)u'_h(x)v'_h(x)dx + \int_0^1 A(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.7)$$

Precisamos subdividir  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , façamos tal divisão em  $N - 1$  partes iguais onde  $x_0 = 0$  e  $x_N = 1$ . Para o que segue, consideremos as seguintes funções:

$$\phi_i(x) = \left(1 - \left|\frac{x - x_i}{h}\right|\right)_+ = \max\left\{1 - \left|\frac{x - x_i}{h}\right|, 0\right\}, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (2.8)$$

Notemos que, por construção,  $\phi_i \in H_0^1(0, 1)$ , além disso,  $\text{supp } \phi_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , e as funções  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , são linearmente independentes, desta forma, verifica-se que

$$V_h := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{N-1}\}$$

é um subespaço  $(N - 1)$  - dimensional de  $H_0^1(0, 1)$ . Por conseguinte, a solução para (2.7) pode ser vista em termos das  $\phi_i$  como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} U_i \phi_i(x), \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{N-1} U_i \int_0^1 [a(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + A(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx = \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx. \quad (2.10)$$

Denotando

$$a_{ji} := \int_0^1 [a(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + A(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx, \quad i, j = 1, \dots, N - 1,$$

e

$$F_j := \int_0^1 f(x)\phi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N - 1,$$

o problema (2.10) fica reescrito na forma

$$AU = F, \quad (2.11)$$

onde  $A = (a_{ji})$  e  $F = (F_1, \dots, F_{N-1})^T$ . A matriz  $A$  é simétrica (ou seja,  $A^T = A$ ), definida positiva (ou seja,  $x^T Ax > 0, x \neq 0$ ), ademais, como  $\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j$  tem interior vazio

quando  $|i - j| > 1$ , segue-se que a matriz  $A$  é tri-diagonal (ou seja,  $a_{ji}$  é zero, a menos que  $|i - j| \leq 1$ ), garantido que  $A$  é esparsa. Essas condições são suficientes para garantirmos a existência de  $A^{-1}$ . Desta forma,

$$U = A^{-1}F.$$

Nosso objetivo foi reduzido a obter a solução  $U$  para o sistema (2.11), feito isso, usando (2.9), encontramos  $u_h$ .

Notemos que as funções  $\phi_i$  consideradas em (2.8) satisfazem

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para todo  $i, j = 1, \dots, N - 1$ . Essa característica permite que em cada ponto (nó) da discretização o operador de interpolação definido por

$$\Pi_h u(x) := \sum_{i=1}^{N-1} u(x) \phi_i(x)$$

assuma exatamente o valor da solução  $u$  naquele ponto.

### 3 BOA COLOCAÇÃO

Este capítulo é dedicado a analisarmos a boa colocação para (3.1), a saber,

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + A(x, t)y = v1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $\omega$  é um subintervalo aberto e não vazio de  $(0, 1)$ ,  $1_\omega$  é a função característica associada,  $a \in L^\infty(0, 1)$ , com  $a(x) \geq a_0 > 0$  q.s,  $A \in L^\infty((0, 1) \times (0, T))$  e  $y_0 \in L^2(0, 1)$ . Em (3.1),  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  representa o controle e  $y = y(x, t)$  é o estado associado.

Para cada  $\tau > 0$ , adotaremos as seguintes notações:

$$\begin{cases} Q_\tau := (0, 1) \times (0, \tau), \\ \Sigma_\tau := \{0, 1\} \times (0, \tau), \\ q_\tau := \omega \times (0, \tau). \end{cases}$$

#### 3.1 BOA COLOCAÇÃO E REGULARIDADE DO PROBLEMA

Consideremos o seguinte problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} y_t = Ay + F(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} A : H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset L^2(0, 1) &\longrightarrow L^2(0, 1) \\ y &\longmapsto A(y) = (a(x)y_x)_x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F : L^2(0, 1) &\longrightarrow L^2(0, 1) \\ y &\longmapsto F(y) = v1_\omega - A(x, t)y. \end{aligned}$$

A seguir, verificaremos propriedades sobre  $A$  e  $F$  necessárias para aplicarmos os resultados de existência e unicidade de solução para o problema (3.2), e assim, para (3.1).

**Referente ao operador  $A$ :**

- $A$  é dissipativo.

De fato,

$$(Ay, y)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (a(x)y_x)_x y \, dx = - \int_0^1 a(x)y_x y_x \, dx = - \int_0^1 a(x)y_x^2 \, dx,$$

para todo  $y \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ . Sendo  $a(x) \geq a_0 > 0$ , obtemos

$$(Ay, y)_{L^2(0,1)} \leq 0, \quad \forall y \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1),$$

isto é,  $A$  é dissipativo.

- $A$  é  $m$ -dissipativo, ou seja,  $\text{Im}(I - A) = L^2(0,1)$ .

Com efeito,  $\text{Im}(I - A) = L^2(0,1)$  é equivalente a provarmos que para cada  $f \in L^2(0,1)$  dada, o problema  $y - (a(x)y_x)_x = f$  é satisfeito para algum  $y \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ , ou ainda, resolver o seguinte

$$\begin{cases} -(a(x)y_x)_x + y = f, & \text{em } (0,1) \times (0,T), \\ y = 0, & \text{em } \{0,1\} \times (0,T). \end{cases} \quad (3.3)$$

**Definição 3.1.** Dizemos que  $y \in H_0^1(0,1)$  é solução fraca para o problema (3.3) quando

$$\int_0^1 a(x)y_x v_x \, dx + \int_0^1 yv \, dx = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

**Observação 3.2.** Em virtude do Teorema 2.14, prova-se que a solução  $y \in H_0^1(0,1)$  para (3.3) é tal que  $y \in H^2(0,1)$ , por conseguinte,  $y \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ .

Para mostrarmos a existência e unicidade de  $y \in H_0^1(0,1)$ , solução para (3.3), recorreremos ao Lema 2.13. Para isto, definamos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B(y, v) : (H_0^1 \times H_0^1)(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, v) &\longmapsto B(y, v) = \int_0^1 a(x)y_x v_x + yv \, dx. \end{aligned}$$

Notemos que  $B$  é uma aplicação contínua, pois

$$\begin{aligned} |B(y, v)| &= \left| \int_0^1 a(x)y_x v_x + yv \, dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |a(x)y_x v_x + yv| \, dx \\ &\leq \int_0^1 |a(x)||y_x v_x| + |yv| \, dx \\ &\stackrel{(2.31)}{\leq} \|a\|_{L^\infty(0,1)} \|y_x\|_{L^2(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)} + \|y\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \\ &\stackrel{(2.33)}{\leq} \|a\|_{L^\infty(0,1)} \|y_x\|_{L^2(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)} + C \|y_x\|_{L^2(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Logo, para  $K = \|a\|_{L^\infty} + C$ , obtemos

$$|B(y, v)| \leq K \|y_x\|_{L^2(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)} = K \|y\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)}, \quad \forall y, v \in H_0^1(0, 1),$$

ou seja,  $B$  é contínua. Adicionalmente,  $B$  é coerciva, visto que  $a(x) \geq a_0 > 0$  e

$$\begin{aligned} B(y, y) &= \int_0^1 a(x) y_x y_x dx + \int_0^1 y^2 dx \\ &\geq \int_0^1 a(x) |y_x|^2 dx \\ &\geq a_0 \int_0^1 |y_x|^2 dx \\ &= a_0 \|y_x\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= a_0 \|y\|_{H_0^1(0,1)}^2, \end{aligned}$$

para toda  $y \in H_0^1(0, 1)$ . Desta forma, verificado que a forma bilinear  $B$  é contínua e coerciva, pelo Lema 2.13, existe uma única  $y \in H_0^1(0, 1)$  satisfazendo  $B(y, v) = (f, v)$ , para toda  $v \in H_0^1(0, 1)$ , ou seja,  $y$  satisfaz

$$\int_0^1 a(x) y_x v_x + yv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Em consonância com a Observação 3.2, segue que para cada  $f \in L^2(0, 1)$ , existe uma única  $y \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$  satisfazendo o problema (3.3). Desta forma, fica verificado que  $A$  é  $m$ -dissipativo.

- $\overline{D(A)} = L^2(0, 1)$ .

De fato, desde que  $D(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$  e

$$C_0^\infty(0, 1) \subset H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset L^2(0, 1),$$

obtemos

$$L^2(0, 1) \stackrel{(2.8)}{=} \overline{C_0^\infty(0, 1)}^{L^2(0,1)} \subset \overline{H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)}^{L^2(0,1)} \subset L^2(0, 1),$$

ou seja,  $\overline{H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)}^{L^2(0,1)} = L^2(0, 1)$ , isto é,  $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$  é denso em  $L^2(0, 1)$ .

Portanto, verificado que  $A$  é um operador densamente definido e  $m$ -dissipativo, segue do Teorema 2.25, que  $A$  gera um semigrupo de contração de classe  $C_0$ .

#### Referente a função $F$ :

- $F$  é uma função Lipschitz.

Com efeito, para  $y, v \in L^2(0, 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(v)\|_{L^2(0,1)} &= \|f1_\omega - b(x, t)y - (f1_\omega - b(x, t)v)\|_{L^2(0,1)} \\ &= \|A(x, t)y - b(x, t)v\|_{L^2(0,1)} \\ &= \|A(x, t)(y - v)\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|A\|_{L^\infty(Q_T)} \|y - v\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Assim, graças ao Teorema 2.29, o problema (3.2), e consequentemente o problema (3.1), admite uma única solução generalizada

$$y \in C^0([0, T]; L^2(0, T)). \quad (3.4)$$

Na tentativa de obtermos mais regularidade para a solução  $y$  obtida acima, multipliquemos (3.1)<sub>1</sub> por  $y$  e integremos em  $(0, 1)$ ,

$$\int_0^1 y_t y - (a(x)y_x)_x y + A(x, t)yy \, dx = \int_0^1 v1_\omega y \, dx,$$

logo, como  $y_t y = \frac{d}{dt}(\frac{y^2}{2})$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 y^2 \, dx + \int_0^1 a(x)y_x^2 \, dx + \int_0^1 A(x, t)y^2 \, dx = \int_0^1 v1_\omega y \, dx,$$

Desde que  $0 < a_0 \leq a(x)$ , para todo  $x \in (0, 1)$ , segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 \, dx + a_0 \int_0^1 |y_x|^2 \, dx + \int_0^1 A(x, t)|y|^2 \, dx \leq \int_0^1 v1_\omega u \, dx.$$

Pela desigualdade 2.30,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 \, dx + a_0 \int_0^1 |y_x|^2 \, dx + \int_0^1 A(x, t)|y|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_\omega |v|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |y|^2 \, dx.$$

Multiplicando por 2 e subtraindo  $\int_0^1 A(x, t)|y|^2 dx$  em ambos os lados da desigualdade anterior, vem que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 \, dx + 2a_0 \int_0^1 |y_x|^2 \, dx \leq \int_\omega |v|^2 \, dx + \int_0^1 |y|^2 \, dx - 2 \int_0^1 A(x, t)|y|^2 \, dx,$$

como  $-2 \int_0^1 A(x, t)|y|^2 dx \leq |2 \int_0^1 A(x, t)|y|^2 dx| \leq 2 \int_0^1 |A(x, t)||y|^2 dx$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 \, dx + 2a_0 \int_0^1 |y_x|^2 \, dx \leq \int_\omega |v|^2 \, dx + \int_0^1 |y|^2 \, dx + 2 \left| \int_0^1 A(x, t)|y|^2 \, dx \right|.$$

Já que  $A \in L^\infty(Q_T)$ , vale

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 \, dx + 2a_0 \int_0^1 |y_x|^2 \, dx \leq \int_\omega |v|^2 \, dx + \int_0^1 |y|^2 \, dx + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^1 |y|^2 \, dx,$$

ou melhor,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 dx + 2a_0 \int_0^1 |y_x|^2 dx \leq \int_{\omega} |v|^2 dx + (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \int_0^1 |y|^2 dx.$$

Desta forma, visto que  $y \in C^0([0, T]; L^2(0, T))$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 dx + 2a_0 \int_0^1 |y_x|^2 dx \leq \int_{\omega} |v|^2 dx + (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \|y\|_{C([0, T], L^2(0, 1))}. \quad (3.5)$$

Integrando (3.5) em relação à  $t$  em  $(0, T)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y(x, T)|^2 dx + 2a_0 \int_0^T \int_0^1 |y_x|^2 dx dt &\leq 2\|v\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &+ (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \|y\|_{C([0, 1], L^2(0, 1))} T + \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2. \end{aligned}$$

Sendo  $\int_0^1 |y(x, T)|^2 dx \geq 0$ , segue que

$$2a_0 \int_0^T \int_0^1 |y_x|^2 dx dt \leq 2\|v\|_{L^2(Q_T)}^2 + (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \|y\|_{C([0, T], L^2(0, 1))} T + \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2,$$

dividindo ambos os lados por  $2a_0$ ,

$$\int_0^T \|y_x(\cdot, t)\|_{L^2(0, 1)}^2 dt \leq \frac{2\|v\|_{L^2(Q_T)}^2 + (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \|y\|_{C([0, T], L^2(0, 1))} T + \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2}{2a_0},$$

pela equivalência de normas citada no Teorema 2.33, deduzimos que

$$\int_0^T \|y(\cdot, t)\|_{H_0^1(0, 1)}^2 dt \leq \frac{2\|v\|_{L^2(Q_T)}^2 + (1 + 2\|A\|_{L^\infty(Q_T)}) \|y\|_{C([0, T], L^2(0, 1))} T + \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2}{2a_0}.$$

Logo,

$$y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)).$$

Portanto, juntamente com o obtido em (3.4), concluímos que o problema (3.1) admite uma única solução com regularidade

$$y \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1)).$$



## 4 CONTROLABILIDADE NULA

Este capítulo se concentra na demonstração da propriedade de controlabilidade nula para a equação (3.1). Para alcançarmos esse objetivo, utilizamos a desigualdade de observabilidade relativa às soluções do problema adjunto, a qual é uma consequência direta de uma estimativa de Carleman. A estimativa de Carleman, uma ferramenta poderosa em análise de equações diferenciais parciais, nos permite obter resultados fundamentais sobre a controlabilidade do sistema. Exploraremos, fundamentando-nos nas ideias e técnicas desenvolvidas por Fursikov e Imanuvilov em (FURSIKOV; IMANUVILOV, 1996), como essa estimativa pode ser aplicada para estabelecer a controlabilidade nula, garantindo que, sob certas condições, podemos dirigir o estado do sistema a zero em um tempo finito.

O problema de controle nulo vinculado à (3.1) consiste em: para cada  $y_0 \in L^2(0,1)$ , encontrar  $v \in L^2(q_T)$  de tal forma que a solução  $y$  de (3.1) satisfaça

$$y(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (4.1)$$

Mais precisamente, o controle nulo de norma mínima em  $L^2(q_T)$  é dado por  $v = \varphi 1_\omega$ , onde  $\varphi$  resolve a equação do calor adjunta

$$\begin{cases} -\varphi_t - (a(x)\varphi_x)_x + A(x, t)\varphi = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ \varphi(x, T) = \varphi^T(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.2)$$

e  $\varphi^T$  minimiza o funcional estritamente convexo e coercivo

$$\mathcal{I}(\varphi^T) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(q_T)}^2 - (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}.$$

Na sequência, assumiremos

$$a \in C^1([0, 1]), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (4.3)$$

e adotaremos as seguintes notações:

$$Ly := y_t - (a(x)y_x)_x + A(x, t)y \quad \text{e} \quad L^*z := -z_t - (a(x)z_x)_x + A(x, t)z. \quad (4.4)$$

Seguindo as ideias de Fursikov e Imanuvilov (FURSIKOV; IMANUVILOV, 1996), consideremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t) = \exp\left(\frac{\beta(x)}{T-t}\right), \rho_0(x, t) = (T-t)^{3/2}\rho(x, t), \beta(x) = K_1 \left(e^{K_2} - e^{\beta_0(x)}\right) \\ \text{onde } K_i \text{ são constantes positivas suficientemente grandes (dependendo de } T, a_0) \text{ e} \\ \|a\|_{C^1} \text{ e } \beta_0 \in C^\infty([0, 1]), \beta_0 > 0 \text{ em } (0, 1), \beta_0(0) = \beta_0(1) = 0, |\beta_0'| > 0 \text{ em } (0, 1) \setminus \omega. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

A existência da função  $\beta_0(x)$  é garantida pelo seguinte lema.

**Lema 4.1.** *Seja  $\omega_0 \Subset \omega$  um conjunto arbitrário de  $\Omega$ . Então existe uma função  $\beta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0(x) > 0, \forall x \in \Omega, \\ \beta_0|_{\partial\Omega} = 0, \\ |\nabla\beta_0(x)| > 0, \forall x \in \Omega \setminus \omega_0. \end{array} \right.$$

**Demonstração:** Ver (FURSIKOV; IMANUVILOV, 1996). ■

Para o que segue, sejam

$$P_0 = \left\{ q \in C^\infty(\overline{Q_T}) : q = 0 \text{ em } \Sigma_T \right\}$$

e a forma bilinear

$$\begin{aligned} & B(p, q) \\ &= \iint_{Q_T} \rho^{-2} L^* p L^* q \, dx dt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} p q \, dx dt \\ &= \iint_{Q_T} \rho^{-2} \left( -p_t - (a(x)p_x)_x + A(x, t)p \right) \left( -q_t - (a(x)q_x)_x + A(x, t)q \right) \, dx dt \\ &\quad + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} p q \, dx dt. \end{aligned}$$

A forma bilinear acima é um produto interno no espaço  $P_0$ . De fato, inicialmente notemos que

$$\iint_{Q_T} \rho^{-2} L^* p L^* p \, dx dt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} p p \, dx dt \geq 0, \forall p \in P_0,$$

e se tivermos  $q \in P_0$ ,  $L^*q = 0$  em  $Q_T$  e  $q = 0$  em  $q_T$ , então, pela propriedade de continuação única, necessariamente teremos  $q \equiv 0$ . Adicionalmente, para quaisquer  $p, q, r \in P_0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades: simetria, isto é,  $B(p, q) = B(q, p)$ ; distributividade, ou seja,  $B(p + r, q) = B(p, q) + B(r, q)$  e homogeneidade, a saber,  $B(\lambda p, q) = \lambda B(p, q)$ .

Seja  $P$  o complemento de  $P_0$  com relação ao produto interno acima definido. Então,  $P$  é um espaço de Hilbert e o seguinte resultado é válido.

**Lema 4.2** (Desigualdade de Carleman). *Suponhamos que (4.3) seja satisfeito e  $\rho$  e  $\rho_0$  sejam considerados como em (4.5). Definindo*

$$\rho_1(x, t) := (T - t)^{1/2} \rho(x, t) \quad \text{e} \quad \rho_2(x, t) := (T - t)^{-1/2} \rho(x, t),$$

então, existe  $C > 0$  dependendo de  $\omega, T, a_0, \|a\|_{C^1(0,1)}$  e  $\|A\|_{L^\infty(Q_T)}$ , tal que para toda  $q \in P$ , se tem

$$\iint_{Q_T} \left[ \rho_2^{-2} (|q_t|^2 + |q_{xx}|^2) + \rho_1^{-2} |q_x|^2 + \rho_0^{-2} |q|^2 \right] dxdt \leq C \left( \iint_{Q_T} \rho^{-2} |L^* q|^2 dxdt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} |q|^2 dxdt \right). \quad (4.6)$$

Em termos de completude deixamos no Apêndice a prova de uma estima do tipo Carleman para o problema (3.1) com o potencial  $a(x) \equiv 1$ .

Mostremos agora que a estimativa (4.6) implica na desigualdade de observabilidade para as soluções do problema adjunto, a saber, existe uma constante  $C$  tal que

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \iint_{q_T} |\varphi|^2 dxdt, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0, 1). \quad (4.7)$$

Por densidade, para  $\varphi$  solução de (4.2), (4.6) torna-se

$$\iint_{Q_T} \left[ \rho_2^{-2} (|\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2) + \rho_1^{-2} |\varphi_x|^2 + \rho_0^{-2} |\varphi|^2 \right] dxdt \leq C \iint_{q_T} \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt,$$

consequentemente,

$$\iint_{Q_T} \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt \leq C \iint_{q_T} \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt. \quad (4.8)$$

Analisando o lado esquerdo de (4.8), sendo  $\rho_0$  limitado em  $(\frac{3T}{4}, \frac{T}{4}) \times (0, 1)$ , obtemos  $0 < K_1 \leq \rho_0^{-2}(x, t) \leq K_2$  para constantes  $K_1$  e  $K_2$  e vale

$$K_1 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dxdt \leq \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt \leq \iint_{Q_T} \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt, \quad (4.9)$$

devido à (4.8) e (4.9), vem

$$K_1 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dxdt \leq C \iint_{q_T} \rho_0^{-2} |\varphi|^2 dxdt.$$

Em virtude da limitação superior de  $\rho_0$ , segue que

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dxdt \leq CK_2 K_1^{-1} \iint_{q_T} |\varphi|^2 dxdt. \quad (4.10)$$

Por outro lado, multiplicando (4.2)<sub>1</sub> por  $\varphi$ , integrando em  $(0, 1)$  e considerando a condição (4.3) sobre a função  $a$ , obtemos

$$\int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 - (a(x)\varphi_x)_x \varphi + A(x, t) |\varphi|^2 dx = 0,$$

logo,

$$\int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 + a(x) |\varphi_x|^2 dx = - \int_0^1 A(x, t) |\varphi|^2 dx.$$

Por  $A \in L^2(Q_T)$ ,

$$\int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 + a(x) |\varphi_x|^2 dx \leq \|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |\varphi|^2 dx,$$

sendo  $a(x) |\varphi_x|^2 dx \geq 0$ , para todo  $x \in (0, 1)$ , vale

$$\int_0^1 -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 dx \leq \|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |\varphi|^2 dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} |\varphi|^2 + 2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} |\varphi|^2 dx \geq 0. \quad (4.11)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 + 2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} |\varphi|^2 &= \frac{\frac{d}{dt} |\varphi|^2 e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t} + 2\|A\|_{L^\infty(0,1)} |\varphi|^2 e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t}}{e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \left[ |\varphi|^2 e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t} \right]}{e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t}}, \end{aligned}$$

assim, substituindo em (4.11), verificamos que

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ |\varphi|^2 e^{2\|A\|_{L^\infty(0,1)} t} \right] dx \geq 0$$

e, integrando com respeito à variável  $\tau$  de 0 a  $t$  e usando o Teorema 2.36, vale

$$\int_0^1 |\varphi(x, t)|^2 e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} t} - |\varphi(x, 0)|^2 e^{2\|A(\cdot, 0)\|_{L^\infty(0,1)} \cdot 0} dx \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_0^1 |\varphi(x, t)|^2 e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} t} dx \geq \int_0^1 |\varphi(x, 0)|^2 dx.$$

Logo,

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |\varphi(x, 0)|^2 dx \leq e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} T} \int_0^1 |\varphi(x, t)|^2 dx. \quad (4.12)$$

Desta forma, integrando (4.12) em relação à  $t$  de  $\frac{T}{4}$  até  $\frac{3T}{4}$ , obtemos

$$\frac{T}{2} \|\varphi_0\|_{L^2(0,1)}^2 \leq e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dx dt,$$

e, em decorrência de (4.10), chegamos em

$$\frac{T}{2} \|\varphi_0\|_{L^2(0,1)}^2 \leq e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} T} C K_2 K_1^{-1} \iint_{q_T} |\varphi|^2 dx dt. \quad (4.13)$$

Portanto, para  $\mathbf{C} = \frac{2e^{2\|A(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} T} CK_2 K_1^{-1}}{T}$ , a desigualdade (4.13) torna-se

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \mathbf{C} \iint_{qT} |\varphi|^2 dx dt,$$

verificando assim que a desigualdade (4.7) é válida.

Visto que a desigualdade de observabilidade se verifica, estamos aptos a provar a controlabilidade nula para o problema (3.1).

**Teorema 4.3.** *O problema (3.1) é controlável a zero.*

**Demonstração:** Dividiremos a prova em três passos. No primeiro passo, obteremos um controle  $v_\varepsilon$  por meio da minimização do funcional

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) := \mathcal{I}(\varphi^T) + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}. \quad (4.14)$$

No segundo passo, checaremos que a solução  $y_\varepsilon$  associadas ao controle aproximado  $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_\omega$  satisfaz

$$\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

Por fim, no terceiro passo, concluiremos que  $y$ , limite de  $y_\varepsilon$ , satisfaz o sistema (3.1) para  $v = \varphi$ , limite de  $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_\omega$ , e  $y(x, T) = 0$ .

### **Passo 1.**

Verifiquemos inicialmente que o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é estritamente convexo, contínuo e coercivo, no sentido que vale a relação

$$\lim_{\|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \infty} \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) = \infty,$$

garantindo assim que, graças ao Teorema 2.12, ele admite um mínimo em  $L^2(0, 1)$ .

**Afirmção 1:**  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é estritamente convexo.

No que segue, analisemos individualmente a convexidade dos fatores  $\|\varphi\|_{L^2(qT)}^2$  e  $\|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}$  que compõem o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$ . Para isso, sejam  $\varphi_1^T, \varphi_2^T \in L^2(0, 1)$  e  $0 < t < 1$ . Ademais, sejam  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  as respectivas soluções do problema (4.2) associadas a  $\varphi_1^T$  e  $\varphi_2^T$ . Então:

i) Denotando

$$\mathcal{I}_1(\varphi^T) = \|\varphi\|_{L^2(qT)}^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}_1(t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) - [t\mathcal{I}_1(\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_1(\varphi_2^T)] \\
&= \|t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 - t\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 - (1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 \\
&\leq \|t\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 + 2\|t\varphi_1\|_{L^2(q_T)} \cdot \|(1-t)\varphi_2\|_{L^2(q_T)} + \|(1-t)\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 - t\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 \\
&\quad - (1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 \\
&= t^2\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 + 2t(1-t)\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)} + (1-t)^2\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 - t\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 \\
&\quad - (1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2.
\end{aligned}$$

Desde que

$$t^2\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 - t\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 = -t(1-t)\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2$$

e

$$(1-t)^2\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 - (1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 = -t(1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2,$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}_1(t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) - [t\mathcal{I}_1(\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_1(\varphi_2^T)] \\
&\leq -t(1-t)\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}^2 + 2t(1-t)\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)}\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)} - t(1-t)\|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}^2 \\
&= -t(1-t)\left(\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)} - \|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}\right)^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{I}_1(t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) \leq t\mathcal{I}_1(\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_1(\varphi_2^T), \quad (4.15)$$

e a igualdade

$$-t(1-t)\left(\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)} - \|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}\right)^2 = 0$$

ocorre se, e somente se,

$$\|\varphi_1\|_{L^2(q_T)} = \|\varphi_2\|_{L^2(q_T)}. \quad (4.16)$$

Desta forma, fica verificado que  $\mathcal{I}_1$  é um funcional convexo.

ii) Denotando

$$\mathcal{I}_2(\varphi^T) = \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}_2(t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) - [t\mathcal{I}_2(\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_2(\varphi_2^T)] \\
&= \|t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T\|_{L^2(0,1)} - \left[ t\|\varphi_1^T\|_{L^2(0,1)} + (1-t)\|\varphi_2^T\|_{L^2(0,1)} \right].
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.32),

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_2 \left( t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T \right) - \left[ t\mathcal{I}_2 \left( \varphi_1^T \right) + (1-t)\mathcal{I}_2 \left( \varphi_2^T \right) \right] \\ & \leq t \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} + (1-t) \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} - \left[ t \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} + (1-t) \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} \right] \\ & = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{I}_2 \left( t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T \right) \leq t\mathcal{I}_2 \left( \varphi_1^T \right) + (1-t)\mathcal{I}_2 \left( \varphi_2^T \right),$$

isto é,  $\mathcal{I}_2$  é um funcional convexo.

Por outro lado, a igualdade

$$\mathcal{I}_2 \left( t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T \right) = t\mathcal{I}_2 \left( \varphi_1^T \right) + (1-t)\mathcal{I}_2 \left( \varphi_2^T \right), \quad (4.17)$$

ocorre se, e somente se,

$$\varphi_1 = \frac{\left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)}}{\left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)}} \varphi_2,$$

visto que, elevando ambos lados de (4.17) ao quadrado, vale

$$\left\| t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)}^2 = \left( t \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} + (1-t) \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} \right)^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & t^2 \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)}^2 + 2t(1-t) (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_{L^2(0,1)} + (1-t)^2 \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & = t^2 \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)}^2 + 2t(1-t) \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} + (1-t)^2 \left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

logo,

$$\left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} \varphi_1^T = \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} \varphi_2^T. \quad (4.18)$$

Daí, pela linearidade do problema (4.2),

$$\left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)} \varphi_1 = \left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)} \varphi_2,$$

ou melhor,

$$\varphi_1 = \frac{\left\| \varphi_1^T \right\|_{L^2(0,1)}}{\left\| \varphi_2^T \right\|_{L^2(0,1)}} \varphi_2. \quad (4.19)$$

Verificado que  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  são convexas e do fato que

$$(t\varphi(\cdot, 0) + (1-t)\varphi_2(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} = t(\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} + (1-t)(\varphi_2(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)},$$

segue que o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é convexo, isto é,

$$\mathcal{I}_\varepsilon (t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) \leq t\mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_2^T).$$

Por fim, para mostrarmos que  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é estritamente convexo, ou seja, se

$$\mathcal{I}_\varepsilon (t\varphi_1^T + (1-t)\varphi_2^T) = t\mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_1^T) + (1-t)\mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_2^T),$$

então  $\varphi_1^T = \varphi_2^T$ , necessariamente as condições (4.16) e (4.19) precisam ser satisfeitas. Desta forma, substituindo (4.19) em (4.16), observamos que

$$\left\| \frac{\|\varphi_1^T\|_{L^2(0,1)}}{\|\varphi_2^T\|_{L^2(0,1)}} \varphi_2 \right\|_{L^2(q_T)} = \|\varphi_2\|_{L^2(q_T)},$$

ou ainda,

$$\|\varphi_1^T\|_{L^2(0,1)} = \|\varphi_2^T\|_{L^2(0,1)}. \quad (4.20)$$

Logo, substituindo (4.20) em (4.18), concluímos que

$$\varphi_1^T = \varphi_2^T.$$

Portanto, mostrando que o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é estritamente convexo.

**Afirmção 2:**  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é coercivo.

A coercividade é consequência da desigualdade de observabilidade

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \iint_{q_T} |\varphi|^2 dx dt, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0,1). \quad (4.21)$$

De fato, aplicando a desigualdade Hölder em  $\mathcal{I}_\varepsilon$ , segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_T) &= \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(q_T)}^2 + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(q_T)}^2 - \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \cdot \|y_0\|_{L^2(0,1)} + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Em virtude de (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_T) &\geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(q_T)}^2 - \sqrt{C} \|\varphi\|_{L^2(q_T)} \|y_0\|_{L^2(q_T)} + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} \\ &= \|\varphi\|_{L^2(q_T)} \left( \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(q_T)} - \sqrt{C} \|y_0\|_{L^2(0,1)} \right) + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_\varepsilon (\varphi_T) = +\infty,$$

mostrando a coercividade do funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$ .



**Afirmção 3:**  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é contínuo.

Com efeito, seja  $(\varphi_n^T) \in L^2(0, 1)$  uma sequência de dados iniciais e  $(\varphi_n)$  a sequência correspondentes das soluções do problema (4.2). Suponhamos que

$$\varphi_n^T \longrightarrow \varphi^T \text{ em } L^2(0, 1).$$

Então, como o problema (4.2) é bem posto, obtemos a seguinte convergência

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ em } C^0([0, T]; L^2(0, 1)),$$

onde  $\varphi$  é a solução do problema (4.2) associada a  $\varphi^T$ . Assim, valem as convergências

$$\iint_{q_T} \varphi_n^2 dx dt \longrightarrow \iint_{q_T} \varphi^2 dx dt, \quad (4.22)$$

$$\|\varphi_n^T\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}, \quad (4.23)$$

e

$$(\varphi_n(0), y^0)_{L^2(0,1)} \longrightarrow (\varphi(0), y^0)_{L^2(0,1)}. \quad (4.24)$$

Logo, de (4.22), (4.23), (4.24) e da definição de  $\mathcal{I}_\varepsilon$ , resulta que

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi_n^T) \longrightarrow \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T),$$

ou seja, o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é contínuo.

Como o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$  é estritamente convexo, coercivo e contínuo, segue do Teorema 2.12 que ele admite um único mínimo em  $L^2(0, 1)$ .

### **Passo 2.**

Para o que segue, denotaremos por  $\varphi_\varepsilon^T$  o mínimo obtido decorrente do passo 1, cuja solução de (4.2) associada a este dado denotaremos por  $\varphi_\varepsilon$ , isto é,  $\varphi_\varepsilon$  satisfaz

$$\begin{cases} -\varphi_{\varepsilon t} - (a(x)\varphi_{\varepsilon x})_x + A(x, t)\varphi_\varepsilon = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi_\varepsilon(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ \varphi_\varepsilon(x, T) = \varphi_\varepsilon^T(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.25)$$

Adicionalmente, seja  $y^1 = y(T)$ , onde  $y$  é a solução do problema (3.1) com  $v = 0$ , ou seja,  $y$  satisfaz

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + A(x, t)y = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.26)$$

Desta forma, multiplicando (4.25)<sub>1</sub> por  $y$  solução de (4.26) e (4.26)<sub>1</sub> por  $\varphi_\varepsilon$  solução de (4.25) e, em ambos casos, integrando sobre  $Q_T$ , obtemos

$$\int_0^T \int_0^1 -\varphi_{\varepsilon t} y + a(x) \varphi_{\varepsilon x} y_x + A(x, t) \varphi_\varepsilon y \, dx dt = 0$$

e

$$\int_0^T \int_0^1 y_t \varphi_\varepsilon + a(x) y_x \varphi_{\varepsilon x} + A(x, t) y \varphi_\varepsilon \, dx dt = 0.$$

Das duas igualdades acima, segue que

$$\int_0^T \int_0^1 y_t \varphi_\varepsilon + y \varphi_{\varepsilon t} \, dx dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \int_0^1 \frac{d}{dt} (y \varphi_\varepsilon) \, dx dt = 0,$$

em virtude do Teorema 2.36, vale

$$\int_0^1 y(T, x) \varphi_\varepsilon(T, x) - y(0, x) \varphi_\varepsilon(0, x) \, dx dt = 0,$$

ou seja,

$$(y^1, \varphi_\varepsilon^T)_{L^2(0,1)} = (y^0, \varphi_\varepsilon(0))_{L^2(0,1)}. \quad (4.27)$$

**Afirmção 4:** Vale

$$\|y^1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon \iff \varphi_\varepsilon^T = 0. \quad (4.28)$$

De fato, suponhamos inicialmente que  $\|y^1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$ . Dado  $\varphi^T \in L^2(0, 1)$ , notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) &= \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)}^2 + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi(0), y^0)_{L^2(0,1)} \\ &\geq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi(0), y^0)_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Devido a (4.27), tem-se, usando desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) &\geq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi^T, y^1)_{L^2(0,1)} \\ &\geq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} - \|y^1\|_{L^2(0,1)} \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} \\ &= \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} \left( \varepsilon - \|y^1\|_{L^2(0,1)} \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pois estamos assumindo  $\|y^1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$ , logo,

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) \geq 0, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0, 1).$$

Entretanto,  $\mathcal{I}_\varepsilon(0) = 0$ , desta forma,

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) \geq 0 = \mathcal{I}_\varepsilon(0), \quad (4.30)$$

restando que o elemento  $0 \in L^2(0, 1)$  seja o único mínimo de  $\mathcal{I}_\varepsilon$ . Daí,

$$\varphi_\varepsilon^T \equiv 0.$$

Reciprocamente, assumindo  $\varphi_\varepsilon^T \equiv 0$ , para  $\varphi^T \in L^2(0, 1)$  qualquer e  $s \in \mathbb{R}_+^*$ , vale

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T) = 0 < \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi^T) \Rightarrow 0 \leq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{I}_\varepsilon(s\varphi^T)}{s}. \quad (4.31)$$

Usando a definição de  $\mathcal{I}_\varepsilon$  em (4.31), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{I}_\varepsilon(s\varphi^T)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \|s\varphi\|_{L^2(q_T)}^2 - (s\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} + \varepsilon \|s\varphi^T\|_{L^2(0,1)}}{s} \\ &= -(\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} + \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

desta forma,

$$\varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} \geq (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)},$$

em virtude de (4.27),

$$0 \leq \varepsilon \|\varphi^T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi^T, y^1)_{L^2(0,1)}, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0, 1),$$

em particular, para  $\varphi^T = y^1$ ,

$$0 \leq \varepsilon \|y^1\|_{L^2(0,1)} - (y^1, y^1)_{L^2(0,1)} = \varepsilon \|y^1\|_{L^2(0,1)} - \|y^1\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Portanto,

$$\|y^1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon,$$

mostrando a afirmação 4.

Por contrapositividade, usaremos a afirmação 4 como segue:

$$\|y^1\|_{L^2(0,1)} > \varepsilon \iff \varphi_\varepsilon^T \neq 0.$$

Assumamos  $\|y^1\|_{L^2(0,1)} > \varepsilon$  e analisemos a seguinte derivada no sentido de Gateux,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T), \varphi^T) &= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T + \lambda\varphi^T) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \left( \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega 2(\varphi_\varepsilon + \lambda\varphi)\varphi \, dxdt + \frac{1}{2} \|\varphi_\varepsilon + \lambda\varphi\|_{L^2(0,1)}^{-1} \int_0^1 2(\varphi_\varepsilon + \lambda\varphi)\varphi \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \varphi(0)y^0 \, dx \right) \Big|_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left( \mathcal{I}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T), \varphi^T \right) = \int_0^T \int_\omega \varphi_\varepsilon \varphi \, dxdt + \frac{\varepsilon \left( \varphi_\varepsilon^T, \varphi^T \right)_{L^2(0,1)}}{\|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}} + \left( \varphi(0), y^0 \right)_{L^2(0,1)}, \quad (4.32)$$

e sendo  $\varphi_\varepsilon^T$  mínimo para  $\mathcal{I}_\varepsilon$ , então  $\left( \mathcal{I}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T), \varphi^T \right) = 0$ , conseqüentemente, (4.32) torna-se

$$\int_0^T \int_\omega \varphi_\varepsilon \varphi \, dxdt + \frac{\varepsilon \left( \varphi_\varepsilon^T, \varphi^T \right)_{L^2(0,1)}}{\|\varphi^T\|_{L^2(0,1)}} + \left( \varphi(0), y^0 \right)_{L^2(0,1)} = 0, \quad (4.33)$$

para toda  $\varphi^T \in L^2(0,1)$ .

Agora, consideremos  $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_\omega$  e seja  $y_\varepsilon$  a solução do problema (3.1) associada a  $v_\varepsilon$ , isto é,  $y_\varepsilon$  satisfaz

$$\begin{cases} y_{\varepsilon t} - (a(x)y_{\varepsilon x})_x + A(x,t)y_\varepsilon = v_\varepsilon, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ y_\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \{0,1\} \times (0,T), \\ y_\varepsilon(x,0) = y_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \quad (4.34)$$

Em particular, para  $\varphi^T = \varphi_\varepsilon^T$  em (4.33), obtemos:

$$\int_0^T \int_\omega |\varphi_\varepsilon|^2 \, dxdt + \varepsilon \left\| \varphi_\varepsilon^T \right\|_{L^2(0,1)} - \left( \varphi_\varepsilon(0), y^0 \right)_{L^2(0,1)} = 0,$$

ou seja,

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \left( \varphi_\varepsilon(0), y^0 \right)_{L^2(0,1)}.$$

Pela desigualdade de Cauchy, segue que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \|\varphi_\varepsilon(0)\|_{L^2(0,1)} \|y^0\|_{L^2(0,1)},$$

e em virtude da desigualdade (4.7), temos

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \sqrt{C} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|y^0\|_{L^2(0,1)}.$$

Com isso, dado que  $\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} = \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}$ , concluímos que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \leq \sqrt{C} \|y^0\|_{L^2(0,1)},$$

ou ainda,

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \leq \sqrt{C} \|y^0\|_{L^2(0,1)}, \quad (4.35)$$

pois  $q_T \subset Q_T$ .

Da dualidade entre os sistemas (3.1) e (4.2), de forma análoga ao feito para obtermos (4.27), checamos que

$$\int_0^T \int_{\omega} \varphi_{\varepsilon} \varphi \, dx dt = \int_0^T \int_0^1 v_{\varepsilon} \varphi \, dx dt = (y_{\varepsilon}(T), \varphi^T)_{L^2(0,1)} - (y^0, \varphi(0))_{L^2(0,1)}. \quad (4.36)$$

Assim, substituindo (4.36) em (4.33),

$$0 = \varepsilon \left( \frac{\varphi_{\varepsilon}^T}{\|\varphi_{\varepsilon}^T\|_{L^2(0,1)}}, \varphi^T \right)_{L^2(0,1)} + (y_{\varepsilon}(T), \varphi^T)_{L^2(0,1)}, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0,1),$$

ou ainda,

$$\left( \frac{\varepsilon \varphi_{\varepsilon}^T}{\|\varphi_{\varepsilon}^T\|_{L^2(0,1)}} + y_{\varepsilon}(T), \varphi^T \right)_{L^2(0,1)} = 0, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0,1).$$

Logo, para  $\varphi^T = y_{\varepsilon}(T)$ , vale

$$(y_{\varepsilon}(T), y_{\varepsilon}(T))_{L^2(0,1)} = -\varepsilon \frac{(\varphi_{\varepsilon}^T, y_{\varepsilon}(T))_{L^2(0,1)}}{\|\varphi_{\varepsilon}^T\|_{L^2(0,1)}},$$

considerando o módulo e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\|y_{\varepsilon}(T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \varepsilon \frac{\|\varphi_{\varepsilon}^T\|_{L^2(0,1)} \|y_{\varepsilon}(T)\|_{L^2(0,1)}}{\|\varphi_{\varepsilon}^T\|_{L^2(0,1)}},$$

ou seja,

$$\|y_{\varepsilon}(T)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon. \quad (4.37)$$

**Passo 3.** Mostraremos agora que  $y_{\varepsilon} \rightarrow y$  solução de (3.1) para  $v = \varphi 1_{\omega}$ .

De fato, por (4.35), temos que  $(v_{\varepsilon})$  é limitada em  $L^2(Q_T)$  e sendo este um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe  $v \in L^2(Q_T)$ , tal que

$$v_{\varepsilon} \rightharpoonup v \text{ em } L^2(Q_T). \quad (4.38)$$

No intuito de obtermos convergências sobre  $y_{\varepsilon}$ , multiplicando a equação (4.34)<sub>1</sub> por  $y_{\varepsilon}$  e integrando em  $(0, 1) \times (0, t)$ ,  $t \in [0, T]$ , obtemos

$$\int_0^t \int_0^1 y_{\varepsilon t} y_{\varepsilon} \, dx dt - \int_0^t \int_0^1 (a y_{\varepsilon})_{xx} y_{\varepsilon} \, dx dt + \int_0^t \int_0^1 A y_{\varepsilon}^2 \, dx dt = \int_0^t \int_{\omega} v_{\varepsilon} y_{\varepsilon} \, dx dt.$$

Desde que  $y_{\varepsilon t} y_{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{y_{\varepsilon}^2}{2} \right]$  e  $0 < a_0 \leq a(x)$ , para todo  $x \in (0, 1)$ , vem

$$\frac{1}{2} \int_0^1 y_{\varepsilon}^2(t, x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (y_{\varepsilon}^0)^2 \, dx + a_0 \int_0^t \int_{\Omega} y_{\varepsilon x}^2 \, dx dt \leq \int_0^t \int_0^1 v_{\varepsilon} y_{\varepsilon} \, dx dt + \|A\|_{L^{\infty}(Q_T)} \int_0^t \int_0^1 |y_{\varepsilon}|^2 \, dx dt.$$

Usando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + a_0 \int_0^t \|y_{\varepsilon}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, dt &\leq \frac{1}{2} \|y_{\varepsilon}^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\omega} |v_{\varepsilon}|^2 \, dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\omega} |y_{\varepsilon}|^2 \, dx dt + \|A\|_{L^{\infty}(Q_T)} \int_0^t \int_{\Omega} |y_{\varepsilon}|^2 \, dx dt. \end{aligned}$$

Como  $(v_\varepsilon)$  é limitada em  $L^2(Q_T)$ , existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  que permitem reescrevermos a desigualdade acima como segue

$$\|y_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq C_1 + C_2 \int_0^t \|y_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.39)$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall, existe  $C_T > 0$  tal que

$$\|y_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.40)$$

Por conseguinte, de (4.39) e (4.40), existe  $\tilde{C}_T > 0$  tal que

$$\int_0^t \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)}^2 dt \leq \tilde{C}_T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.41)$$

Desta forma, de (4.40) e (4.41), resulta que

$$(y_\varepsilon) \text{ é limitada em } C^0(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1)). \quad (4.42)$$

Sendo  $L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$  reflexivo, existe  $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  tal que

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)). \quad (4.43)$$

Na busca de convergência para  $y_{\varepsilon t}$ , dado  $z \in H_0^1(0, 1)$  e multiplicando (4.34)<sub>1</sub> por  $z$ , obtemos que

$$(y_{\varepsilon t}, z)_{L^2(0,1)} - ((ay_{\varepsilon x})_x, z)_{L^2(0,1)} + (Ay_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)} = (v_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)},$$

onde usando integração por partes, garantimos que

$$(y_{\varepsilon t}, z)_{L^2(0,1)} + (ay_{\varepsilon x}, z_x)_{L^2(0,1)} + (Ay_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)} = (v_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)},$$

ou ainda,

$$|(y_{\varepsilon t}, z)_{L^2(0,1)}| \leq |(ay_{\varepsilon x}, z_x)_{L^2(0,1)}| + |(Ay_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)}| + |(v_\varepsilon, z)_{L^2(0,1)}|.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, segue que

$$\begin{aligned} |(y_{\varepsilon t}, z)| &\leq \|a\|_{L^\infty(0,1)} \|y_{\varepsilon x}\|_{L^2(0,1)} \|z_x\|_{L^2(0,1)} + \|A\|_{L^\infty(Q_T)} \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \|z\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \|v\|_{L^2(0,1)} \|z\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

e pela desigualdade (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} |(y_{\varepsilon t}, z)| &\leq \|a\|_{L^\infty(0,1)} \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} \|z\|_{H_0^1(0,1)} + \|A\|_{L^\infty(Q_T)} \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \|z\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \|z\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|(y_{\varepsilon t}, z)| \leq \left( (\|a\|_{L^\infty(0,1)} + \|A\|_{L^\infty(0,1)}) \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \right) \|z\|_{H_0^1(0,1)},$$

ou seja,

$$\frac{|(y_{\varepsilon t}, z)|}{\|z\|_{H_0^1(0,1)}} \leq C \left( \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \right).$$

Consequentemente,

$$\|y_{\varepsilon t}\|_{H^{-1}(0,1)} = \sup_{\substack{z \in H_0^1(0,1) \\ \|z\|=1}} \frac{|(y_{\varepsilon t}, z)|}{\|z\|_{H_0^1(0,1)}} \leq C \left( \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \right),$$

validando

$$\|y_{\varepsilon t}\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \leq C \left( \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \right)^2.$$

Desde que para  $a, b \in \mathbb{R}$  vale  $2ab \leq a^2 + b^2$ , ou seja,  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , obtemos

$$\|y_{\varepsilon t}\|_{H^{-1}(0,1)}^2 \leq C \left( \|y_\varepsilon\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \right).$$

Por fim, integrando em relação à  $t \in [0, T]$ , segue que

$$\|y_{\varepsilon t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \leq C \left( \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \right),$$

isto é,

$$(y_{\varepsilon t}) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)).$$

Assim, a menos de subsequência, concluímos que

$$y_{\varepsilon t} \rightharpoonup \tilde{y} \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)). \quad (4.44)$$

Mostremos agora que  $\tilde{y} = y_t$ . Inicialmente, se  $\varphi \in C_0^\infty$ , vale

$$\int_0^T (y_{\varepsilon t}(t), \varphi(t)w(t)) dt = - \int_0^T (y_\varepsilon(t), \varphi_t(t)w) dt, \quad \forall w \in H_0^1(0, 1), \quad (4.45)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_{\varepsilon t}(t), \varphi(t)w(t)) dt &= \int_0^T (y_{\varepsilon t}(t)\varphi(t), w(t)) dt \\ &= \left( \int_0^T y_{\varepsilon t}(t)\varphi(t) dt, w(t) \right)_{L^2(0,1)} \\ &= - \left( \int_0^T y_\varepsilon(t)\varphi_t(t) dt, w(t) \right)_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Agora, seja  $w \in H_0^1(0, 1)$  e definamos

$$\begin{aligned} \Phi : L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \Phi(\xi) = \int_0^T (\xi_t(t), w(t)\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \Psi(\rho) = - \int_0^T (\rho(t), w(t)\varphi_t(t)) dt, \end{aligned}$$

que são funções lineares e, como consequência das desigualdades de Cauchy, Poincaré e Hölder, são contínuas, resulta que  $\Phi$  e  $\Psi$  são funcionais lineares contínuos. Logo, desde que (4.45) ocorra, temos

$$\Phi(y_{\varepsilon t}) = \Psi(y_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Por conseguinte, em virtude das convergências fracas (4.43) e (4.44) e do fato que  $\Phi$  e  $\Psi$  são funcionais lineares, vem

$$\Phi(\tilde{y}) = \Psi(y),$$

isto é,

$$\int_0^T (\tilde{y}(t), \varphi(t)w(t)) dt = - \int_0^T (y(t), \varphi_t(t)w(t)) dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T (\tilde{y}(t), \varphi(t)w(t))_{L^2(0,1)} dt = - \int_0^T (y(t), \varphi_t(t)w(t))_{L^2(0,1)} dt,$$

logo,

$$\int_0^T (\tilde{y}(t)\varphi(t), w(t))_{L^2(0,1)} dt = - \int_0^T (y(t)\varphi_t(t), w(t))_{L^2(0,1)} dt,$$

ou melhor,

$$\left( \int_0^T \tilde{y}(t)\varphi(t) dt, w(t) \right)_{L^2(0,1)} = - \left( \int_0^T y(t)\varphi_t(t) dt, w(t) \right)_{L^2(0,1)},$$

para toda  $w \in H_0^1(0, 1)$ . Pela densidade de  $H_0^1(0, 1)$  em  $L^2(0, 1)$ ,

$$\int_0^T \tilde{y}(t)\varphi_t(t) dt = - \int_0^T y(t)\varphi(t) dt,$$

para toda  $\varphi \in L^2(0, 1)$ , segue que

$$\tilde{y} = y_t,$$

ou seja,

$$y_{\varepsilon t} \rightharpoonup y_t \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)). \quad (4.46)$$



Desta forma, desde que  $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$  e  $y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$ , segue do Teorema 2.15 que  $y \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ , ou seja,

$$y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Adicionalmente, sendo  $y_\varepsilon$  solução fraca de (4.34) com  $v_\varepsilon$ , vale

$$\iint_{Q_T} y_{\varepsilon t} \phi + a(x) y_{\varepsilon x} \phi_x + A(x, t) y_\varepsilon \phi \, dx dt = \iint_{Q_T} v_\varepsilon \phi \, dx dt.$$

Pelas convergências (4.38), (4.43) e (4.46), obtemos

$$\iint_{Q_T} y_t \phi + a(x) y_x \phi_x + A(x, t) y \phi \, dx dt = \iint_{Q_T} v \phi \, dx dt,$$

ou seja,  $y$  é solução fraca de (3.1) para  $f = v$ , ou melhor,  $f = \varphi 1_\omega$ .

Por fim, seja  $v \in \mathcal{D}(0, 1)$  e  $\theta \in C^1[0, T]$ , tal que  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(T) = 1$ . Temos que

$$(y_\varepsilon(T), v) = \int_0^T (y'_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt + \int_0^T (y_\varepsilon(t), v) \theta'(t) dt.$$

Pelas convergências (4.43) e (4.46), vale

$$(y_\varepsilon(T), v) \rightarrow (y(T), v), \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(0, 1).$$

Como  $L^2(0, 1)$  é reflexivo, observamos que

$$y_\varepsilon(T) \rightharpoonup y(T) \text{ em } L^2(0, 1). \quad (4.47)$$

Por outro lado, como  $(y_\varepsilon(x, T)) \subset L^2(0, 1)$ , de (4.37) e pelo Teorema 2.16,

$$\|y(T)\|_{L^2(0,1)} \leq \liminf \|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(0,1)} = 0. \quad (4.48)$$

Logo, em virtude de (4.47) e (4.48), segue que  $y(T) = 0$ .

Portanto, fica verificado que existe  $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap C([0, T]; L^2(0, 1))$  satisfazendo  $y(T) = 0$  que é solução de (3.1) para  $f = \varphi 1_\omega$ , em que  $\varphi$  é a solução de (4.2) com o dado  $\varphi^T$ , que por sua vez, é o único mínimo para o funcional  $\mathcal{I}$ , em suma, o sistema (3.1) é controlável a zero. ■

## 5 ABORDAGEM VARIACIONAL

A abordagem variacional é uma técnica usada para resolvermos problemas de controle e otimização analisando-os como problemas de minimização de funcionais. Jacques-Louis Lions foi um pioneiro nesta área, formulando o conhecido “*Hilbert Uniqueness Method*” (Método de unicidade de Hilbert), detalhes deste método podem ser vistos (LIONS, 1988).

Consideremos o seguinte problema extremal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(y, v) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dx dt + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2 |v|^2 dx dt \\ \text{sujeito a } (y, v) \in \mathcal{C}(y_0, T), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $\mathcal{C}(y_0, T)$  é dado por

$$\mathcal{C}(y_0, T) = \left\{ (y, v) : v \in L^2(q_T), y \text{ resolve (3.1) e } y(x, T) = 0 \right\}.$$

Recordemos que estamos considerando  $\rho$  e  $\rho_0$  como em (4.5), em que eles satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \rho = \rho(x, t), \rho_0 = \rho_0(x, t) \text{ são contínuos;} \\ \rho, \rho_0 \geq \rho_* > 0 \text{ em } Q_T; \\ \rho, \rho_0 \in L^\infty(Q_{T-\delta}) \text{ para todo } \delta > 0 \text{ pequeno.} \end{cases}$$

Além disso, consideramos os espaços  $P_0$  e  $P$  como indicados no capítulo anterior.

### 5.1 UMA ABORDAGEM VARIACIONAL PARA O PROBLEMA DE CONTROLABILIDADE NULA

**Teorema 5.1.** *Para cada  $y_0 \in L^2(0, 1)$  e  $T > 0$ , existe exatamente uma solução para (5.1).*

**Demonstração:** Em virtude da controlabilidade nula de (3.1),  $\mathcal{C}(y_0, T)$  é não vazio. Além disso, é um conjunto convexo, pois, dada a linearidade do problema (3.1), se  $(y, v), (u, w) \in \mathcal{C}(y_0, T)$ , então

$$\begin{cases} y_t - (a(x)y_x)_x + A(x, t)y = v1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + A(x,t)u = w1_\omega, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \{0,1\} \times (0,T), \\ u(x,0) = y_0(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Desta forma, para  $\lambda \in (0,1)$ , temos que  $\lambda(y,v) + (1-\lambda)(u,w)$  satisfaz

$$\begin{cases} (\lambda y + (1-\lambda)v)_t - (a(x)(\lambda y + (1-\lambda)v)_x)_x + A(\lambda y + (1-\lambda)v) = (\lambda v + (1-\lambda)w)1_\omega, \\ (\lambda y + (1-\lambda)v)(x,t) = 0, \\ (\lambda y + (1-\lambda)v)(x,0) = y_0(x). \end{cases}$$

Ademais,

$$(\lambda y + (1-\lambda)v)(x,T) = \lambda y(x,T) + (1-\lambda)v(x,T) = 0,$$

ou seja,  $(\lambda y + (1-\lambda)v) \in \mathcal{C}(y_0, T)$ . Adicionalmente,  $\mathcal{C}(y_0, T)$  é um subconjunto fechado de  $L^2(Q_T) \times L^2(q_T)$ , onde a demonstração segue como feita no Capítulo 4 para verificar que  $y$ , limite de  $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ , satisfaz (3.1).

Por outro lado, o funcional

$$\begin{aligned} J : L^2(Q_T) \times L^2(q_T) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y,v) &\longmapsto J(y,v) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2 |v|^2 dxdt \end{aligned}$$

possui as seguintes propriedades:

- Estritamente convexo. A demonstração segue como feita no Capítulo 4 para o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$ .
- Semicontínuo inferiormente no espaço  $L^2(Q_T) \times L^2(q_T)$ . A demonstração segue como feita no Capítulo 4 para o funcional  $\mathcal{I}_\varepsilon$ .
- Coercivo, no sentido que  $J(y,v) \rightarrow +\infty$  quando  $\|(y,v)\|_{L^2(Q_T) \times L^2(q_T)} \rightarrow +\infty$ . De fato, desde que  $\rho, \rho_0 \in L^\infty(Q_{T-\delta})$ , então  $\rho^2$  e  $\rho_0^2$  são limitados em  $Q_{T-\delta}$  e vale

$$\begin{aligned} J(y,v) &= \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2 |v|^2 dxdt \\ &\geq C \left( \iint_{Q_T} |y|^2 dxdt + \iint_{q_T} |v|^2 dxdt \right) \\ &= C \left( \|y\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2(q_T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Daí, se  $\|y\|_{L^2(Q_T)} + \|v\|_{L^2(q_T)} = \|(y,v)\|_{L^2(Q_T) \times L^2(q_T)} \rightarrow \infty$ , então  $J(y,v) \rightarrow \infty$ , pois ou  $\|y\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow \infty$  ou  $\|v\|_{L^2(q_T)} \rightarrow \infty$ .

Portanto, em virtude do Teorema 2.12, o problema (5.1) possui solução única. ■

**Lema 5.2.** *Sobre as mesmas hipóteses do Lema 4.2, para qualquer  $\delta > 0$ , tem-se*

$$P \hookrightarrow C^0([0, T - \delta]; H_0^1(0, 1)),$$

onde a imersão é contínua. Em particular, existe  $C > 0$ , dependendo apenas de  $\omega, T, a_0, \|a\|_{C^1(0,1)}$  e  $\|A\|_{L^\infty(Q_T)}$ , tal que

$$\|q(\cdot, 0)\|_{H_0^1(0,1)}^2 \leq C \left( \iint_{Q_T} \rho^{-2} |L^*q|^2 dxdt + \iint_{Q_T} \rho_0^{-2} |q|^2 dxdt \right),$$

para toda  $q \in P$ .

**Demonstração:** Sejam  $\delta > 0$ ,  $q \in P$  e consideremos o espaço de Banach  $C^0([0, T - \delta]; L^2(0, 1))$ . Então, tendo em vista o Lema 5.3 e o fato que todas as funções pesos  $\rho_i$  são limitadas em  $Q_{T-\delta}$ , concluímos que

$$q, q_t, q_x, q_{xx} \in L^2(Q_{T-\delta}),$$

com norma limitada por  $C\|q\|_P$ , onde  $C$  é a constante obtida no Lema 5.3 que depende de  $\omega, T, a_0, \|a\|_{C^1(0,1)}$  e  $\|A\|_{L^\infty(Q_T)}$ . Sendo  $P$  o complemento de  $P_0$ , existe  $(q_n)_n \in P_0$  com

$$\|q_n - q\|_P \longrightarrow 0. \quad (5.2)$$

Pelo Teorema 2.37, vale

$$\|q - q_n\|_{L^2(\partial Q_{T-\delta})} \leq \bar{C} \|q - q_n\|_{H^1(Q_{T-\delta})}. \quad (5.3)$$

Em virtude da desigualdade (4.6), vale

$$\|q - q_n\|_{L^2(\partial Q_{T-\delta})} \leq C \|q - q_n\|_P,$$

desde que  $(q_n)_n \subset P_0$ , então  $q_n|_{(\partial Q_{T-\delta})} \equiv 0$  e obtemos

$$\|q\|_{L^2(\partial Q_{T-\delta})} \leq C \|q - q_n\|_P.$$

Por (5.2), resulta que  $q(\cdot, t)|_{\partial(0,1)} = 0$ . Em particular,  $t \mapsto q(\cdot, t)$  e  $t \mapsto q_t(\cdot, t)$ , respectivamente, consideradas como funções a valores em  $H^2(0, 1)$  e  $L^2(0, 1)$ , são quadrado integráveis. Juntamente com o Teorema 2.10, concluímos que  $t \mapsto q(\cdot, t)$ , considerada como uma função a valores em  $H_0^1(0, 1)$ , é contínua em  $[0, T)$  e vale a imersão continua desejada.

Por fim, pela imersão obtida, vale

$$\|q\|_{C^0([0, T-\delta]; H_0^1(0,1))} \leq C \|q\|_P$$

ou seja,

$$\sup_{0 \leq t < T-\delta} \|q\|_{H_0^1(0,1)} \leq C \|q\|_P,$$

e, em particular,

$$\|q(\cdot, 0)\|_{H_0^1(0,1)} \leq C \|q\|_P.$$

Portanto,

$$\|q(\cdot, 0)\|_{H_0^1(0,1)}^2 \leq C \left( \iint_{Q_T} \rho^{-2} |L^*q|^2 dxdt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} |q|^2 dxdt \right),$$

onde  $C$  é uma constante que depende de  $\omega, T, a_0, \|a\|_{C^1(0,1)}$  e  $\|A\|_{L^\infty(Q_T)}$ . ■

**Proposição 5.3.** *Suponhamos que a condição (4.3) ocorra e consideremos  $\rho$  e  $\rho_0$  como descritos em (4.5). Seja  $(y, v)$  a solução para (5.1). Então, existe  $p \in P$  tal que*

$$y = \rho^{-2} L^*p \quad e \quad v = -\rho_0^{-2} p|_{q_T}, \quad (5.4)$$

onde a função  $p$  é a única solução para

$$\iint_{Q_T} \rho^{-2} L^*p L^*q dxdt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} pq dxdt = \int_0^1 y_0(x)q(x, 0) dx \quad \forall q \in P; p \in P. \quad (5.5)$$

**Demonstração:** Mostremos inicialmente a unicidade para o problema (5.5). Consideremos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto B(p, q) = \iint_{Q_T} \rho^{-2} L^*p L^*q dxdt + \iint_{q_T} \rho_0^{-2} pq dxdt, \end{aligned}$$

onde  $V = \{q(\cdot, 0); q \in P\}$ . Em vista do Lema 5.2,

$$a(p, p) \geq \bar{C} \|p(\cdot, 0)\|_{H_0^1(0,1)}^2, \quad \text{com } \bar{C} = C^{-1},$$

isto é,  $B$  é coerciva. Adicionalmente, o funcional

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto f(q) = \int_0^1 y_0(x)q(x, 0)dx \end{aligned}$$

é contínua, uma vez que

$$|f(q)| \leq \|y_0\|_{L^2(0,1)} \|q(\cdot, 0)\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Desta forma, verificado que  $B$  é uma forma bilinear contínua e coerciva, obtemos via Lema 2.13 que existe um único elemento  $p \in V$  tal que

$$B(p) = f(p, q), \quad \forall q \in V.$$

Para o que segue, consideremos  $y$  e  $v$  de acordo com (5.4). Verifiquemos que  $(y, v)$  resolve (5.1). Observemos que  $y \in L^2(Q_T)$  e  $v \in L^2(q_T)$ . Além disso, (5.5), para  $(y, v)$ , torna-se

$$\begin{cases} \iint_{Q_T} y L^* q dx dt = \iint_{q_T} v q dx dt + \int_0^1 y_0(x) q(x, 0) dx, \\ \forall q \in P; \quad y \in L^2(Q_T). \end{cases} \quad (5.6)$$

Mas (5.6) indica que  $y$  é a solução para (3.1) no sentido da transposição. Por conseguinte, como  $y_0 \in L^2(0, 1)$  e  $v \in L^2(q_T)$ ,  $y$  deve coincidir com a única solução fraca para (3.1). Em particular,  $y \in C^0([0, T]; L^2(0, 1))$  e

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \rho^{-2}(x, t) = \lim_{t \rightarrow T^-} e^{\frac{-2\beta(x)}{T-t}} = 0,$$

ou seja,  $y$  como considerada em (5.4), satisfaz  $y(x, T) = 0$ , para todo  $x \in (0, 1)$ . Em outras palavras,  $(y, v) \in \mathcal{C}(y_0, T)$ .

Por fim, para a minimalidade, seja  $(z, w) \in \mathcal{C}(y_0, T)$  tal que  $J(z, w) < +\infty$ . Então,

$$\begin{aligned} J(z, w) - J(y, v) &= \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2(|z|^2 - |y|^2) dx dt + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2(|w|^2 - |v|^2) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 \left( (|z| - |y|)^2 + 2|z||y| - 2|y|^2 \right) dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2 \left( (|w| - |v|)^2 + 2|w||v| - 2|v|^2 \right) dx dt \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 \left( 2|z||y| - 2|y|^2 \right) dx dt + \frac{1}{2} \iint_{q_T} \rho_0^2 \left( 2|w||v| - 2|v|^2 \right) dx dt \\ &\geq \iint_{Q_T} \rho^2 y(z - y) dx dt + \iint_{q_T} \rho_0^2 v(w - v) dx dt. \end{aligned}$$

Substituindo  $y$  e  $v$  como consideradas nas hipóteses, vem

$$J(z, w) \geq J(y, v) + \iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt - \iint_{q_T} p(w - v) dx dt, \quad (5.7)$$

Agora, notemos que

$$\iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt = \iint_{Q_T} (-p_t - (ap_x)_x + Ap)(z - y) dx dt,$$

e por meio de integrações por partes, vale

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt &= \iint_{Q_T} p(z - y)_t + ap_x(z - y)_x + Ap(z - y) dx dt - \\ &\quad - \int_0^1 [p(z - y)]_0^T dx + \int_0^1 [ap_x(z - y)]_0^1 dx \end{aligned}$$

desde que  $z$  e  $y$  são soluções de (3.1), então  $z(0, t) = z(1, t) = y(0, t) = y(1, t) = 0$  e  $z(x, 0) = y(x, 0)$ . Além disso, por  $(y, v), (z, w) \in \mathcal{C}(y_0, T)$ ,  $y(x, T) = z(x, T) = 0$ , por conseguinte, as duas últimas integrais do lado direito da igualdade acima são nulas. Prosseguindo,

$$\iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt = \iint_{Q_T} p(z - y)_t + p_x a(z - y)_x + Ap(z - y) dx dt,$$

aplicando integração por partes,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt &= \iint_{Q_T} p(z - y)_t - p(a(z - y)_x)_x + pA(z - y) dx dt + \\ &+ \int_0^T [pa(z - y)_x]_0^1 dt. \end{aligned}$$

Como  $p$  satisfaz o problema (5.8), a última integral acima se anula e obtemos

$$\iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt = \iint_{Q_T} pL(z - y) dx dt,$$

pela linearidade do problema (3.1), vale

$$\iint_{Q_T} L^* p(z - y) dx dt = \iint_{Q_T} p(w - v) dx dt,$$

e, substituindo em (5.7), resulta em

$$J(z, w) \geq J(y, v), \quad \forall (z, w) \in \mathcal{C}(y_0, T).$$

Portanto, fica verificado que  $(y, v)$  está em  $\mathcal{C}(y_0, T)$  e minimiza o funcional  $J$ . ■

**Observação 5.4.** Devido (5.4) e (5.5), notamos que a função  $p$  descrita na Proposição 5.3 resolve, pelo menos no sentido fraco, o seguinte problema:

$$\begin{cases} L(\rho^{-2}L^*p) + \rho_0^{-2}p1_\omega = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ p(x, t) = 0, \quad (-\rho^{-2}L^*p)(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ (\rho^{-2}L^*p)(x, 0) = y_0(x), \quad (\rho^{-2}L^*p)(x, T) = 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (5.8)$$

que é de segunda ordem no tempo e de quarta ordem em espaço.

## 5.2 REFORMULAÇÃO DA IGUALDADE VARIACIONAL

Tendo em mãos a Proposição 5.3, uma estratégia para encontrarmos a solução  $(y, v)$  para (5.1) é inicialmente resolvermos (5.5) e depois usarmos (5.4).

### 5.2.1 Uma reformulação variacional equivalente

O intuito aqui é reescrevermos a igualdade variacional (5.5) em termos de uma nova variável  $z$  dada por

$$z(x, t) = (T - t)^{-\alpha} \rho_0^{-1}(x, t) p(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5.9)$$

para algum  $\alpha \geq 0$  adequado.

Definamos  $Z$  como o complemento de  $P_0$  para o produto escalar

$$(z, \bar{z})_Z := \iint_{Q_T} \rho^{-2} L^* ((T-t)^\alpha \rho_0 z) L^* ((T-t)^\alpha \rho_0 \bar{z}) dx dt + \iint_{q_T} (T-t)^{2\alpha} z \bar{z} dx dt,$$

ou, de forma equivalente,

$$Z = \{(T-t)^{-\alpha} \rho_0 p : p \in P\}.$$

Verifiquemos que

$$\rho^{-1} L^* ((T-t)^\alpha \rho_0 z) = A_1 z + A_2 z_t + A_3 z_x + A_4 z_{xx}, \quad (5.10)$$

em que os  $A_i = A_i(x, t)$  satisfazem

$$\begin{cases} A_1 = \left( \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) - (a\beta_x)_x \right) (T-t)^{\alpha+1/2} - \left( a\beta_x^2 + \beta \right) (T-t)^{\alpha-1/2} + A(T-t)^{\alpha+3/2}, \\ A_2 = -(T-t)^{\alpha+3/2}, \\ A_3 = -2a\beta_x (T-t)^{\alpha+1/2} - a_x (T-t)^{\alpha+3/2}, \\ A_4 = -a(T-t)^{\alpha+3/2}. \end{cases}$$

De fato, desde que

$$\rho^{-1} L^* ((T-t)^\alpha \rho_0 z) = \underbrace{-\rho^{-1} ((T-t)^\alpha \rho_0 z)_t}_I - \underbrace{\rho^{-1} (a((T-t)^\alpha \rho_0 z)_x)_x}_{II} + \underbrace{\rho^{-1} A(T-t)^\alpha \rho_0 z}_{III},$$

então, referente à parcela  $I$ ,

$$\begin{aligned} -\rho^{-1} ((T-t)^\alpha \rho_0 z)_t &= -\rho^{-1} \left( (T-t)^\alpha (T-\alpha)^{3/2} \rho z \right)_t \\ &= -\rho^{-1} \left( (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} \rho z \right)_t \\ &= -\rho^{-1} \left[ \left( (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z \right)_t \rho + \rho_t (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z \right] \\ &= -\left( (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z \right)_t - (\ln \rho)' (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z \\ &= \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) (T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} z - (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z_t - \left( \frac{\beta(x)}{T-t} \right)' (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z \\ &= \left[ \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) (T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\beta(x)}{T-t} \right)' (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} \right] z - (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z_t \\ &= \left[ \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) (T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{\beta(x)}{(T-t)^2} (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} \right] z - (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z_t \\ &= \left[ \left( \alpha + \frac{3}{2} \right) (T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} - \beta(x) (T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \right] z - (T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}} z_t. \end{aligned}$$



Referente à parcela *II*,

$$\begin{aligned}
-\rho^{-1}\left(a\left((T-t)^\alpha\rho_0z\right)_x\right)_x &= -\rho^{-1}\left(a\left((T-t)^\alpha(T-t)^{\frac{3}{2}}\rho z\right)_x\right)_x \\
&= -\rho^{-1}(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left(a(\rho z)_x\right)_x \\
&= -\rho^{-1}(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left(a\rho_xz+a\rho z_x\right)_x \\
&= -\rho^{-1}(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left[\left(a\rho_x\right)_xz+a\rho_xz_x+\left(a\rho\right)_xz_x+a\rho z_{xx}\right] \\
&= -\rho^{-1}(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left[a_x\rho_xz+a\rho_{xx}z+a\rho_xz_x+a_x\rho z_x+a\rho_xz_x\right. \\
&\quad \left.+a\rho z_{xx}\right] \\
&= -(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\left[a_x\left(\frac{\beta(x)}{T-t}\right)_xz+a\rho^{-1}\rho_{xx}z+a\left(\frac{\beta(x)}{T-t}\right)_xz_x\right. \\
&\quad \left.+a_xz_x+a\left(\frac{\beta(x)}{T-t}\right)_xz_x+az_{xx}\right] \\
&= -\left((T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}a_x\beta_x+(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}a\rho^{-1}\rho_{xx}\right)z \\
&\quad -\left(2a\beta_x(T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}+a_x(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\right)z_x-a(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}z_{xx} \\
&= -\left((T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}a_x\beta_x+(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}a\left(\frac{\beta_{xx}}{T-t}+\frac{\beta_x^2}{(T-t)^2}\right)\right)z \\
&\quad -\left(2a\beta_x(T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}+a_x(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\right)z_x-a(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}z_{xx} \\
&= -\left((T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}a_x\beta_x+a\left((T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}\beta_{xx}+(T-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}\beta_x^2\right)\right)z \\
&\quad -\left(2a\beta_x(T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}+a_x(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}\right)z_x-a(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}z_{xx}.
\end{aligned}$$

Referente à parcela *III*,

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}A(T-t)^\alpha\rho_0z &= \rho^{-1}A(T-t)^\alpha(T-t)^{\frac{3}{2}}\rho z \\
&= A(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}z.
\end{aligned}$$

Desta forma, considerando

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \left(\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) - (a\beta_x)_x\right) (T-t)^{\alpha+1/2} - (a\beta_x^2 + \beta) (T-t)^{\alpha-1/2} + A(T-t)^{\alpha+3/2}, \\ A_2 = -(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}, \\ A_3 = -2a\beta_x(T-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} - a_x(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}, \\ A_4 = -a(T-t)^{\alpha+\frac{3}{2}}, \end{array} \right.$$

obtemos

$$\rho^{-1}L^*((T-t)^\alpha\rho_0z) = A_1z + A_2z_t + A_3z_x + A_4z_{xx},$$

ou ainda, pela substituição assumida em (5.9),

$$\rho^{-1}L^*p = A_1z + A_2z_t + A_3z_x + A_4z_{xx}.$$

De forma análoga, se  $\bar{z} = (T-t)^{-\alpha}\rho_0^{-1}(x,t)q(x,t)$ , ou seja,  $q(x,t) = (T-t)^\alpha\rho_0\bar{z}$ , vem

$$\rho^{-1}L^*q = A_1\bar{z} + A_2\bar{z}_t + A_3\bar{z}_x + A_4\bar{z}_{xx}.$$

Consequentemente, a igualdade variacional (5.5) fica reescrita como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{Q_T} (A_1z + A_2z_t + A_3z_x + A_4z_{xx})(A_1\bar{z} + A_2\bar{z}_t + A_3\bar{z}_x + A_4\bar{z}_{xx}) dxdt \\ + \iint_{q_T} \rho^{-2}(T-t)^\alpha\rho_0z(T-t)^\alpha\rho_0\bar{z} dxdt = \int_0^1 y_0(x)(T-0)^\alpha\rho_0(x,0)\bar{z}(x,0)dx, \\ \forall \bar{z} \in Z; z \in Z, \end{array} \right.$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{Q_T} (A_1z + A_2z_t + A_3z_x + A_4z_{xx})(A_1\bar{z} + A_2\bar{z}_t + A_3\bar{z}_x + A_4\bar{z}_{xx}) dxdt \\ + \iint_{q_T} (T-t)^{2\alpha}z\bar{z} dxdt = T^\alpha \int_0^1 y_0(x)\rho_0(x,0)\bar{z}(x,0) dx, \\ \forall \bar{z} \in Z; z \in Z. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

A boa colocação desta formulação segue como consequência da boa colocação para (5.5).

**Observação 5.5.** Para garantirmos que todos os coeficientes  $A_i$  estejam em  $L^\infty(Q_T)$ , é suficiente considerarmos  $\alpha \geq 1/2$ , assegurando que a parcela  $(a\beta_x^2 + \beta)(T-t)^{\alpha-1/2}$  em  $A_1$  seja finita. Na verdade, observamos que, em virtude da mudança de variável, os pesos  $\rho$  e  $\rho_0$  em  $\rho^{-1}L^*p = \rho^{-1}L^*((T-t)^\alpha\rho_0z)$  compensam-se entre si, de modo que nenhuma função exponencial aparece mais em (5.11).

Em virtude da mudança de variável (5.5), e consequentemente da caracterização (5.10), o seguinte resultado é válido:

**Teorema 5.6.** A igualdade variacional (5.11) possui exatamente uma solução  $z \in Z$ . Além disso, a solução única  $(y, v)$  para o problema extremal (5.1) é dada por

$$y = \rho^{-1}(A_1z + A_2z_t + A_3z_x + A_4z_{xx}) \quad e \quad v = -(T-t)^\alpha\rho_0^{-1}z1_\omega, \quad (5.12)$$

onde  $z \in Z$  resolve (5.11).

## 6 APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo abordamos a passagem do problema abstrato (5.11) para o problema discreto vinculado a ele. A mudança entre as duas abordagens para uma equação diferencial parcial qualquer é descrita detalhadamente em (CIARLET, 2002), ver também (RINCON; LIU, 2020).

Para o que segue, consideremos a forma bilinear  $m(\cdot, \cdot)$  definida por

$$m(z, \bar{z}) := \iint_{Q_T} (A_1 z + A_2 z_t + A_3 z_x + A_4 z_{xx}) (A_1 \bar{z} + A_2 \bar{z}_t + A_3 \bar{z}_x + A_4 \bar{z}_{xx}) dxdt \\ + \iint_{q_T} (T - t)^{2\alpha} z \bar{z} dxdt$$

e a forma linear  $\ell$  definida por

$$\langle \ell, \bar{z} \rangle := T^\alpha \int_0^1 y_0(x) \rho_0(x, 0) \bar{z}(x, 0) dxdt.$$

Então, (5.11) é reescrito como segue:

$$m(z, \bar{z}) = \langle \ell, \bar{z} \rangle, \quad \forall \bar{z} \in Z; \quad z \in Z. \quad (6.1)$$

Para uma melhor fluidez, recordemos que estamos considerando

$$P_0 = \left\{ q \in C^\infty(\bar{Q}_T) : q = 0 \text{ em } \Sigma_T \right\}$$

e  $P$  como complemento de  $P_0$  com relação ao produto interno

$$(p, q)_P = \iint_{Q_T} \rho^{-2} L^* p L^* q dxdt + \iint_{q_T} \rho_0^2 p q dxdt.$$

### 6.1 APROXIMAÇÃO EM DIMENSÃO FINITA

Para um espaço de dimensão finita  $Z_h \subset Z$ , estamos interessados em estudar o seguinte problema:

$$m(z_h, \bar{z}_h) = \langle \ell, \bar{z}_h \rangle \quad \forall \bar{z}_h \in Z_h; \quad z_h \in Z_h. \quad (6.2)$$

**Observação 6.1.** Dizemos que (6.2) é o problema discreto associado ao problema abstrato (6.1).

Desde que todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert é ainda de Hilbert, o problema (6.2) está bem definido. Além disso, vale o seguinte resultado:

**Lema 6.2.** *Sejam  $z \in Z$  a única solução de (6.1) e  $z_h \in Z_h$  a única solução de (6.2). Então,*

$$\|z - z_h\|_Z \leq \inf_{\bar{z}_h \in Z_h} \|z - \bar{z}_h\|_Z.$$

**Demonstração:** Observemos que para  $\bar{z}_h \in Z_h$  arbitrário, vale

$$\begin{aligned} \|z - z_h\|_Z^2 &= m(z - z_h, z - z_h) \\ &= m(z - z_h, \bar{z}_h - z_h) + m(z - z_h, z - \bar{z}_h). \end{aligned}$$

Como consequência da diferença de (6.1) por (6.2), o primeiro termo se anula para qualquer  $\bar{z}_h \in Z_h$ . Para o segundo termo, em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$m(z - z_h, z - \bar{z}_h) \leq \|z_h - z\|_Z \|\bar{z}_h - z\|_Z, \quad \forall \bar{z}_h \in Z_h.$$

Desta forma,

$$\|z - z_h\|_Z \leq \|z - \bar{z}_h\|_Z, \quad \forall \bar{z}_h \in Z_h,$$

ou seja,

$$\|z - z_h\|_Z \leq \inf_{\bar{z}_h \in Z_h} \|z - \bar{z}_h\|_Z.$$

■

Consideremos o operador de interpolação  $\Pi_h : P_0 \rightarrow Z_h$  e assumiremos que o espaço de dimensão finita  $Z_h$  seja escolhido de modo que

$$\|\Pi_h z - z\|_Z \rightarrow 0, \quad h \in \mathcal{H}, \quad h \rightarrow 0, \quad \forall z \in P_0. \quad (6.3)$$

Desde que a convergência anterior esteja assegurada, o resultado abaixo é válido.

**Proposição 6.3.** *Sejam  $z \in Z$  a solução de (6.1) e  $z_h \in Z_h$  a solução de (6.2) para cada  $h \in \mathcal{H}$ . Então,*

$$\|z - z_h\|_Z \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \in \mathcal{H}, h \rightarrow 0.$$

**Demonstração:** Seja  $\varepsilon > 0$ . Da densidade de  $P_0$  em  $Z$ , existe  $z_\varepsilon \in P_0$  tal que

$$\|z - z_\varepsilon\|_Z \leq \varepsilon.$$

Logo, deste fato e do Lema 6.2, se verifica que

$$\begin{aligned} \|z - z_h\|_Z &\leq \inf_{\bar{z}_h \in Z_h} \|z - \bar{z}_h\|_Z \\ &\leq \|z - \Pi_h z_\varepsilon\|_Z \\ &\leq \|z - z_\varepsilon\|_Z + \|z_\varepsilon - \Pi_h z_\varepsilon\|_Z \\ &\leq \varepsilon + \|z_\varepsilon - \Pi_h z_\varepsilon\|_Z. \end{aligned}$$

Em vista de (6.3),  $\|z_\varepsilon - \Pi_h z_\varepsilon\|_Z$  vai para zero quando  $h \in \mathcal{H}, h \rightarrow 0$ , por conseguinte, o resultado segue. ■

A seguir, descreveremos o espaço  $Z_h$  adequado para o nosso objetivo e provaremos a convergência (6.3) para o mesmo.

## 6.2 OS ESPAÇOS DE DIMENSÃO FINITA $Z_h$

Os espaços  $Z_h$  devem ser escolhidos de forma que  $\rho^{-1}L^*((T-t)^\alpha \rho_0 z_h)$  pertença a  $L^2(Q_T)$  para qualquer  $z_h \in Z_h$ . Isso significa que  $z_h$  deve possuir derivadas temporais de primeira ordem e derivadas espaciais de primeira e segunda ordem em  $L^2_{\text{loc}}(Q_T)$ . Assim, uma aproximação baseada em uma quadrangulação ou triangulação padrão de  $Q_T$  requer espaços de funções que devem ser, pelo menos,  $C^0$  em  $t$  e  $C^1$  em  $x$ .

Para inteiros  $N_x$  e  $N_t$  suficientemente grandes, definamos

$$\Delta x := \frac{1}{N_x}, \quad \Delta t := \frac{T}{N_t} \quad \text{e} \quad h := (\Delta x, \Delta t).$$

Além disso, seja  $\mathcal{H} = \{h \in \mathbb{R}^2 : h = (\frac{1}{N_x}, \frac{T}{N_t}) \text{ com } N_x, N_t \in \mathbb{N}\}$ . Assim, consideremos  $\mathcal{Q}_h$  e  $\mathcal{Q}_h$  as quadrangulações uniformes associadas respectivamente a  $Q_T$  e  $q_T$ , isto é,

$$Q_T = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}_h} K \quad \text{e} \quad q_T = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}_h} K$$

e assumiremos que  $\{\mathcal{Q}_h\}_h$  e  $\{\mathcal{Q}_h\}_h$  são quadrangulações normais. Então, é natural escolhermos o espaço  $Z_h$  como segue:

$$Z_h = \left\{ z_h \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{Q}_T) : z_h|_K \in \mathbb{P}(K), \quad \forall K \in \mathcal{Q}_h, \quad z_h = 0 \text{ em } \Sigma_T \right\},$$

onde  $C_{x,t}^{1,0}(\overline{Q}_T)$  é o espaço das funções em  $C^0(\overline{Q}_T)$  que possuem derivada parcial com relação à  $x$  contínua em  $\overline{Q}_T$  e  $\mathbb{P}(K)$  denota o espaço de funções polinomiais em  $x$  e  $t$  composto por

$$\mathbb{P}(K) = (\mathbb{P}_{3,x} \otimes \mathbb{P}_{1,t})(K),$$

em que  $\mathbb{P}_{\ell,\xi}$  é o espaço das funções polinomiais de ordem  $\ell$  na variável  $\xi$ . Observemos que  $\mathbb{P}(K)$  é escolhido em consonância com o problema (5.8).

Conforme a geometria específica de  $Q_T$ , analisaremos a situação para uma quadrangulação uniforme  $\mathcal{Q}_h$ , onde cada elemento  $K_{kl} \in \mathcal{Q}_h$  tem a forma

$$K_{kl} = (x_k, x_{k+1}) \times (t_l, t_{l+1}),$$

com

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x \quad \text{e} \quad t_{l+1} = t_l + \Delta t,$$

para  $k = 1, \dots, N_x$  e  $l = 1, \dots, N_t$ .

Dado  $k \in \{1, \dots, N_x\}$ , denotaremos por  $(L_{ik})_{0 \leq i \leq 3}$  as funções Hermite associadas ao intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ . Elas são definidas por

$$\begin{aligned} L_{0k}(x) &:= \frac{(\Delta x + 2x - 2x_k)(\Delta x - x + x_k)^2}{(\Delta x)^3}, & L_{1k}(x) &:= \frac{(x - x_k)^2(-2x + 2x_k + 3\Delta x)}{(\Delta x)^3}, \\ L_{2k}(x) &:= \frac{(x - x_k)(\Delta x - x + x_k)^2}{(\Delta x)^2}, & L_{3k}(x) &:= \frac{-(x - x_k)^2(\Delta x - x + x_k)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned}$$

Como propriedade, se  $f \in C^1([x_k, x_{k+1}])$ , a função

$$(\Pi_{\Delta x} f)(x) := \sum_{i=0}^1 L_{ik}(x) f(x_{i+k}) + \sum_{i=0}^1 L_{i+2,k}(x) f_x(x_{i+k})$$

é o único elemento em  $\mathbb{P}_3([x_k, x_{k+1}])$  que satisfaz

$$(\Pi_{\Delta x} f)(x_{k+i}) = f(x_{k+i}) \quad \text{e} \quad (\Pi_{\Delta x} f)_x(x_{k+i}) = (f_x)(x_{k+i}), \quad i = 0, 1.$$

De forma análoga, para  $l \in \{1, \dots, N_t\}$ , denotaremos por  $(\mathcal{L}_{jl})_{0 \leq j \leq 1}$  as funções Hermite associadas ao intervalo  $[t_l, t_{l+1}]$ . Eles são definidas por

$$\mathcal{L}_{0l}(t) := \frac{t_l - t + \Delta t}{\Delta t}, \quad \mathcal{L}_{1l}(t) := \frac{t - t_l}{\Delta t},$$

e, como propriedade, se  $f \in C^1([t_l, t_{l+1}])$ , a função

$$(\Pi_{\Delta t} f)(t) := \sum_{j=0}^1 \mathcal{L}_{jl}(t) f(t_{j+l})$$

é o único elemento em  $\mathbb{P}_1([t_l, t_{l+1}])$  que satisfaz

$$(\Pi_{\Delta t} f)(t_{j+l}) = f(t_{j+l}).$$

Para mais informações sobre as unicidades citadas, referenciamos a subseção 3.1.3 de (RINCON; LIU, 2020) ou (CIARLET, 2002).

Seguindo estas considerações, observamos que um elemento  $z_h \in \mathbb{P}(K_{kl})$  é unicamente determinado por  $\{z_h(x_{k+m}, t_{l+n})\}$  e  $\{(z_h)_x(x_{k+m}, t_{l+n})\}$ , para  $m, n = 0, 1$  e o seguinte resultado é válido.

**Lema 6.4.** *Sejam  $u \in P_0$  e a função  $\Pi_h u$  da seguinte forma: em cada*

$$K_{kl} = (x_k, x_k + \Delta x) \times (t_l, t_l + \Delta t)$$

definamos

$$\Pi_h u(x, t) := \sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) u(x_{i+k}, t_{j+l}) + \sum_{i,j=0}^1 L_{i+2,k}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) u(x_{i+k}, t_{j+l}). \quad (6.4)$$

Então,  $\Pi_h u$  é a única função em  $Z_h$  que satisfaz

$$\Pi_h u(x_k, t_l) = u(x_k, t_l) \quad e \quad (\Pi_h u(x_k, t_l))_x = u_x(x_k, t_l),$$

para todo  $k \in \{1, \dots, N_x\}$  e  $l \in \{1, \dots, N_t\}$ .

**Observação 6.5.** O mapa linear  $\Pi_h : P_0 \rightarrow Z_h$  considerado em (6.4) é denominado operador de interpolação associado ao espaço  $Z_h$ .

O Lema a seguir será usado para provarmos a convergência (6.3) para o espaço  $Z_h$  descrito anteriormente.

**Lema 6.6.** Para qualquer  $u \in P_0$  e  $(x, t) \in K_{kl}$ , tem-se:

$$u - \Pi_h u = \sum_{i,j=0}^1 m_{ij} u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) + \sum_{i,j=0}^1 L_{ik} \mathcal{L}_{jl} \mathcal{R}[u; x_{i+k}, t_{j+l}],$$

onde

$$m_{ij}(x, t) := (L_{ik}(x)(x - x_i) - L_{i+2,k}(x)) \mathcal{L}_j(t)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[u; x_{i+k}, t_{j+l}](x, t) &:= \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds + (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds \\ &+ \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Aplicaremos a expansão de Taylor com resto integral para cada um dos quatro pontos que compõem a expressão que define o operador de interpolação (6.4). De forma geral, para o ponto  $(x_{i+k}, t_{j+l})$ , a expansão é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x_{i+k}, t_{j+l}) + (x - x_{i+k}) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) + \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds \\ &+ (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds + \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds, \end{aligned}$$

desta forma,

$$\begin{aligned} u(x_{i+k}, t_{j+l}) &= u(x, t) - (x - x_{i+k}) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) - \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds \\ &- (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds - \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds. \end{aligned}$$

Substituindo isso em (6.4), resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_h u(x, t) &= \sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) \left( u(x, t) - (x - x_{i+k}) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) - \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds \right. \\ &\quad \left. - (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds - \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds \right) \\ &\quad + \sum_{i,j=0}^1 L_{i+2,k}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

logo,

$$\begin{aligned} \Pi_h u(x, t) &= u(x, t) \sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) - \sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) \left( (x - x_{i+k}) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds + (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds \right) \\ &\quad \left. + \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds \right) + \sum_{i,j=0}^1 L_{i+2,k}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Sendo

$$\sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) = (L_{0k}(x) + L_{1k}(x)) (\mathcal{L}_{0l}(t) + \mathcal{L}_{1l}(t)) = 1.$$

Então, após substituirmos (6.6) em (6.5), subtrairmos  $u(x, t)$  em ambos os lados e agruparmos os termos envolvendo  $u_x(x_{i+k}, t_{j+l})$ , obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) - \Pi_h u(x, t) &= \sum_{i,j=0}^1 \left( L_{ik}(x) (x - x_i) - L_{i+2,k}(x) \right) \mathcal{L}_j(t) u_x(x_{i+k}, t_{j+l}) \\ &\quad + \sum_{i,j=0}^1 L_{ik}(x) \mathcal{L}_{jl}(t) \times \left( \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds \right. \\ &\quad \left. + (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds + \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds \right). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue ao definirmos

$$m_{ij}(x, t) := \left( L_{ik}(x) (x - x_i) - L_{i+2,k}(x) \right) \mathcal{L}_j(t)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[u; x_{i+k}, t_{j+l}](x, t) &:= \int_{t_{j+l}}^t u_t(x_{i+k}, s) ds + (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t - s) u_{xt}(x_{i+k}, s) ds \\ &\quad + \int_{x_{i+k}}^x (x - s) u_{xx}(s, t) ds. \end{aligned}$$

■



### 6.3 Estimativa para $\|z - \Pi_h z\|_Z$

Provaremos agora a convergência (6.3) para  $\Pi_h z$  como definido em (6.4). Para tanto, fixemos  $z \in P_0$ . Devemos provar que

$$\|z - \Pi_h z\|_Z \rightarrow 0, \text{ quando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0^+,$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} |A_1(z - \Pi_h z) + A_2(z - \Pi_h z)_t + A_3(z - \Pi_h z)_x + A_4(z - \Pi_h z)_{xx}|^2 dxdt + \\ + \iint_{q_T} (T - t)^{2\alpha} |z - \Pi_h z|^2 dxdt \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0^+$ . Mostremos inicialmente que

$$\iint_{q_T} (T - t)^{2\alpha} |z - \Pi_h z|^2 dxdt \rightarrow 0. \quad (6.8)$$

Para cada  $K_{kl} \in \mathcal{Q}_h$  (quadrangulação correspondente ao  $q_T$ ), obtemos

$$\iint_{K_{kl}} \left( (T - t)^\alpha \right)^2 |z - \Pi_h z|^2 dxdt \leq T^{2\alpha} \iint_{K_{kl}} |z - \Pi_h z|^2 dxdt. \quad (6.9)$$

Analisando a integral do lado direito de (6.9), em virtude do Lema 6.6, a seguinte igualdade é válida:

$$\iint_{K_{kl}} |z - \Pi_h z|^2 dxdt = \iint_{K_{kl}} \left( \sum_{i,j=0}^1 m_{ij} z_x(x_i, t_j) + \sum_{i,j=0}^1 L_i \mathcal{L}_j \mathcal{R}[z; x_{i+k}, t_{j+l}] \right)^2 dxdt. \quad (6.10)$$

Como, dados  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , vale

$$\left( \sum_{i=1}^{2^k} a_i \right)^2 \leq 2^k \sum_{i=1}^{2^k} (a_i)^2,$$

(6.10) torna-se

$$\begin{aligned} \iint_{K_{kl}} |z - \Pi_h z|^2 dxdt &\leq 8 \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |m_{ij} z_x(x_i, t_j)|^2 dxdt \\ &\quad + 8 \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_{ik} \mathcal{L}_{jl} \mathcal{R}[z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 dxdt \\ &\leq 8 \|z_x\|_{L^\infty(K_{kl})}^2 \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |m_{ij}|^2 dxdt \\ &\quad + 8 \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_{ik} \mathcal{L}_{jl} \mathcal{R}[z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Em particular, analisando  $\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_{ik} \mathcal{L}_{jl} \mathcal{R} [z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 dxdt$ , o fator  $|\mathcal{R} [z; x_{i+k}, t_{j+l}]|$  satisfaz

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{R} [z; x_{i+k}, t_{j+l}]| \\
& \leq \left| \int_{t_{j+l}}^t z_t(x_{i+k}, s) ds + (x - x_{i+k}) \int_{t_{j+l}}^t (t-s) z_{xt}(x_{i+k}, s) ds + \int_{x_{i+k}}^x (x-s) z_{xx}(s, t) ds \right| \\
& \leq \int_{t_{j+l}}^t |z_t(x_{i+k}, s)| ds + |x - x_{i+k}| \int_{t_{j+l}}^t |t-s| |z_{xt}(x_{i+k}, s)| ds + \int_{x_{i+k}}^x |x-s| |z_{xx}(s, t)| ds \\
& \stackrel{(2.31)}{\leq} \left( \int_{t_{j+l}}^t 1^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_{t_{j+l}}^t |z_t(x_{i+k}, s)|^2 ds \right)^{1/2} + |x - x_{i+k}| \left( \int_{t_{j+l}}^t (t-s)^2 ds \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \left( \int_{t_{j+l}}^t |z_{xt}(x_{i+k}, s)|^2 ds \right)^{1/2} + \left( \int_{x_{i+k}}^x (x-s)^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_{x_{i+k}}^x |z_{xx}(s, t)|^2 ds \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

desta forma,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{R} [z; x_{i+k}, t_{j+l}]| \\
& \leq |t - t_{j+l}|^{1/2} \|z_t(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})} + |x - x_{i+k}| \left( \int_{t_{j+l}}^t (t-s)^2 ds \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \|z_{xt}(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})} + \left( \int_{x_{i+k}}^x (x-s)^2 ds \right)^{1/2} \|z_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(x_k, x_{k+1})} \\
& = \|z_t(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})} |t - t_{j+l}|^{1/2} + |x - x_{i+k}| \left( \frac{|t - t_{j+l}|^3}{3} \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \|z_{xt}(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})} + \left( \frac{|x - x_{i+k}|^3}{3} \right)^{1/2} \|z_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(x_k, x_{k+1})}.
\end{aligned}$$

Desde que para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  vale  $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ , segue

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R} [z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 & \leq 3 \|z_t(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 |t - t_{j+l}| \\
& \quad + (x - x_{i+k})^2 |t - t_{j+l}|^3 \|z_{xt}(x_{i+k}, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 \\
& \quad + |x - x_{i+k}|^3 \|z_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(x_k, x_{k+1})}^2,
\end{aligned}$$

onde as normas do lado direito são finitas em virtude de estarmos considerando  $z \in P_0$ .  
Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i \mathcal{L}_j \mathcal{R}[z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 dx dt &= \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i \mathcal{L}_j|^2 |\mathcal{R}[z; x_{i+k}, t_{j+l}]|^2 dx dt \\
&\leq 3 \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} \|z_t(x, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 \\
&\quad \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt \\
&\quad + \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} \|z_{tx}(x, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 \quad (6.12) \\
&\quad \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i)^2 dx dt \\
&\quad + \sup_{t \in (t_l, t_{l+1})} \|z_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(x_k, x_{k+1})}^2 \\
&\quad \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |x - x_i|^3 dx dt.
\end{aligned}$$

Calculando as integrais acima:

I) Para  $\iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt$ .

Notemos que

$$\iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt = \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dt \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_i(x)|^2 dx,$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt \\
&= \left( \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_0(t)|^2 |t - t_{l+0}| dt + \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_1(t)|^2 |t - t_{l+1}| dt \right) \times \\
&\quad \times \left( \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_0(x)|^2 dx + \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_1(x)|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Considerando  $\bar{t} = t - t_l$  e  $\bar{x} = x - x_k$  e dado que  $t \in [t_j, t_j + \Delta t]$ , vem

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x) \mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i)^2 dx dt \\
&= \left( \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 \bar{t} d\bar{t} + \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 (\Delta t - \bar{t}) d\bar{t} \right) \times \quad (6.13) \\
&\quad \times \left( \int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 d\bar{x} + \int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 d\bar{x} \right)
\end{aligned}$$

Analisemos individualmente as integrais que compõem (6.13):

i)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 \bar{t} d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\Delta t - \bar{t}}{\Delta t} \right)^2 \bar{t} d\bar{t} = \frac{(\Delta t)^2}{12}.$$

ii)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 (\Delta t - \bar{t}) d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right)^2 (\Delta t - \bar{t}) d\bar{t} = \frac{(\Delta t)^2}{12}.$$

iii)

$$\int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{(\Delta x + 2\bar{x})(\Delta x - \bar{x})^2}{(\Delta x)^3} \right]^2 d\bar{x} = \frac{13}{35} \Delta x.$$

iv)

$$\int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{\bar{x}^2(3\Delta x - 2\bar{x})}{(\Delta x)^3} \right]^2 d\bar{x} = \frac{13}{35} \Delta x.$$

Desta forma, substituindo em (6.13), obtemos

$$\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt = \left( \frac{(\Delta t)^2}{12} + \frac{(\Delta t)^2}{12} \right) \left( \frac{13}{35} \Delta x + \frac{13}{35} \Delta x \right) = \frac{13}{105} \Delta x (\Delta t)^2. \quad (6.14)$$

II) Para  $\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i)^2 dx dt$ .

Notemos que

$$\iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt = \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 dt \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_i(x)|^2 (x - x_i)^2 dx,$$

daí,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i) dx dt \\ &= \left( \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_0(t)|^2 |t - t_{l+0}|^3 dt + \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} |\mathcal{L}_1(t)|^2 |t - t_{l+1}|^3 dt \right) \times \\ & \quad \times \left( \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_0(x)|^2 (x - x_i)^2 dx + \int_{x_k}^{x_k + \Delta x} |L_1(x)|^2 (x - x_i)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Considerando  $\bar{t} = t - t_l$  e  $\bar{x} = x - x_k$  e dado que  $t \in [t_j, t_j + \Delta t]$ , vem

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i)^2 dx dt \\ &= \left( \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 \bar{t}^3 d\bar{t} + \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 (\Delta t - \bar{t})^3 d\bar{t} \right) \times \\ & \quad \times \left( \int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 \bar{x}^2 d\bar{x} + \int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 (\bar{x} - \Delta x)^2 d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Analisemos individualmente as integrais que compõem (6.15):

i)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 \bar{t}^3 d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\Delta t - \bar{t}}{\Delta t} \right)^2 \bar{t}^3 d\bar{t} = \frac{(\Delta t)^4}{60}.$$

ii)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 (\Delta t - \bar{t})^3 d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right)^2 (\Delta t - \bar{t})^3 d\bar{t} = \frac{(\Delta t)^4}{60}.$$

iii)

$$\int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 \bar{x}^2 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{(\Delta x + 2\bar{x})(\Delta x - \bar{x})^2}{(\Delta x)^3} \right]^2 \bar{x}^2 d\bar{x} = \frac{19}{630} \Delta x.$$

iv)

$$\int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 \bar{x}^2 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{\bar{x}^2(3\Delta x - 2\bar{x})}{(\Delta x)^3} \right]^2 \bar{x}^2 d\bar{x} = \frac{19}{630} \Delta x.$$

Desta forma, substituindo em (6.15), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt &= \left( \frac{(\Delta t)^4}{60} + \frac{(\Delta t)^4}{60} \right) \left( \frac{19}{630} \Delta x + \frac{19}{630} \Delta x \right) \\ &= \frac{19}{9450} \Delta x (\Delta t)^4. \end{aligned} \quad (6.16)$$

III) Para  $\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |x - x_i|^3 dx dt$ .

Notemos que

$$\iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |x - x_i|^3 dx dt = \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_j(t)|^2 dt \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} |L_i(x)|^2 |x - x_i|^3 dx,$$

daí,

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i) dx dt \\ &= \left( \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_0(t)|^2 dt + \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_1(t)|^2 dt \right) \left( \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} |L_0(x)|^2 |x - x_i|^3 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} |L_1(x)|^2 |x - x_i|^3 dx \right). \end{aligned}$$

Considerando  $\bar{t} = t - t_l$  e  $\bar{x} = x - x_k$  e dado que  $t \in [t_j, t_j + \Delta t]$ , vem

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |x - x_i|^3 dx dt \\ &= \left( \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 d\bar{t} + \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 d\bar{t} \right) \times \\ &\quad \times \left( \int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 \bar{x}^3 d\bar{x} + \int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 (\Delta x - \bar{x})^3 d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Analisemos individualmente as integrais que compõem (6.17):

i)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} + t_l)|^2 d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\Delta t - \bar{t}}{\Delta t} \right)^2 d\bar{t} = \frac{\Delta t}{3}.$$

ii)

$$\int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} + t_l)|^2 d\bar{t} = \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right)^2 d\bar{t} = \frac{\Delta t}{3}.$$

iii)

$$\int_0^{\Delta x} |L_0(\bar{x} - x_k)|^2 \bar{x}^3 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{(\Delta x + 2\bar{x})(\Delta x - \bar{x})^2}{(\Delta x)^3} \right]^2 \bar{x}^3 d\bar{x} = \frac{11}{840}(\Delta x)^4.$$

iv)

$$\int_0^{\Delta x} |L_1(\bar{x} - x_k)|^2 (\Delta x - \bar{x})^3 d\bar{x} = \int_0^{\Delta x} \left[ \frac{\bar{x}^2(3\Delta x - 2\bar{x})}{(\Delta x)^3} \right]^2 (\Delta x - \bar{x})^3 d\bar{x} = \frac{11}{840}(\Delta x)^4.$$

Desta forma, substituindo em (6.17), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j| dx dt &= \left( \frac{\Delta t}{3} + \frac{\Delta t}{3} \right) \left( \frac{11}{840}(\Delta x)^4 + \frac{11}{840}(\Delta x)^4 \right) \\ &= \frac{11}{630}(\Delta x)^4 \Delta t. \end{aligned} \quad (6.18)$$

**IV)** Para  $\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |m_{ij}|^2 dx dt = \sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |(L_i(x)(x - x_i) - L_{i+2}(x))\mathcal{L}_j(t)|^2 dx dt.$

Notemos que

$$\iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |x - x_i|^3 dx dt = \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_j(t)|^2 dt \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} (L_i(x)(x - x_i) - L_{i+2}(x))^2 dx,$$

daí,

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |L_i(x)\mathcal{L}_j(t)|^2 |t - t_j|^3 (x - x_i) dx dt \\ &= \left( \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_0(t)|^2 dt + \int_{t_l}^{t_l+\Delta t} |\mathcal{L}_1(t)|^2 dt \right) \times \\ &\quad \times \left( \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} (L_0(x)(x - x_i) - L_2(x))^2 dx + \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} (L_1(x)(x - x_i) - L_3(x))^2 dx \right). \end{aligned}$$

Considerando  $\bar{t} = t - t_l$  e  $\bar{x} = x - x_k$  e dado que  $t \in [t_j, t_j + \Delta t]$ , vem

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |m_{ij}|^2 dx dt \\ &= \left( \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_0(\bar{t} - \Delta t)|^2 d\bar{t} + \int_0^{\Delta t} |\mathcal{L}_1(\bar{t} - \Delta t)|^2 d\bar{t} \right) \times \\ &\quad \times \left( \int_0^{\Delta x} \left( L_0(\bar{x} - \Delta x)\bar{x} - L_2(\bar{x} - \Delta x) \right)^2 d\bar{x} + \int_0^{\Delta x} \left( L_1(\bar{x} - \Delta x)\bar{x} - L_3(\bar{x}) \right)^2 d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Analisemos individualmente as integrais que compõem (6.19):

i)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\Delta x} (L_0(\bar{x} - \Delta x)\bar{x} - L_2(\bar{x} - \Delta x))^2 d\bar{x} \\ &= \int_0^{\Delta x} \left( \frac{(\Delta x + 2\bar{x})(\Delta x - \bar{x})^2}{(\Delta x)^3} \bar{x} - \frac{\bar{x}(\Delta x - \bar{x})^2}{(\Delta x)^2} \right)^2 d\bar{x} \\ &= \frac{2}{315}(\Delta)^3 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\Delta x} (L_1(\bar{x} - \Delta x)\bar{x} - L_3(\bar{x} - \Delta x))^2 d\bar{x} \\
&= \int_0^{\Delta x} \left( \frac{\bar{x}^2(3\Delta - 2\bar{x})}{(\Delta x)^3} \bar{x} + \frac{\bar{x}^2(\Delta x - \bar{x})}{(\Delta x)^2} \right)^2 d\bar{x} \\
&= \frac{2}{315} (\Delta)^3.
\end{aligned}$$

Desta forma, substituindo em (6.19), obtemos

$$\sum_{i,j=0}^1 \iint_{K_{kl}} |m_{ij}|^2 dxdt = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{315} + \frac{2}{315} \right) = \frac{8}{945}. \quad (6.20)$$

Substituindo (6.14), (6.16), (6.18) e (6.20) em (6.12) e (6.12) em (6.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{K_{kl}} |z - \Pi_h z|^2 dxdt &\leq \frac{64}{945} (\Delta x)^3 \Delta t \|z_x\|_{L^\infty(K_{kl})}^2 \\
&+ \frac{312}{105} \Delta x (\Delta t)^2 \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} \|z_t(x, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 \\
&+ \frac{152}{9450} (\Delta x)^3 (\Delta t)^4 \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} \|z_{tx}(x, \cdot)\|_{L^2(t_l, t_{l+1})}^2 \\
&+ \frac{88}{630} (\Delta x)^4 \Delta t \sup_{t \in (t_l, t_{l+1})} \|z_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(x_k, x_{k+1})}^2.
\end{aligned}$$

Dado que  $q_T = \bigcup_{K_{kl} \in \mathcal{Q}_T} K_{kl}$  e

$$\left| \begin{array}{l} \Delta t = t_1 - t_0 = \dots = t_{N_t} - t_{N_t-1} \\ \Delta x = x_1 - x_0 = \dots = x_{N_x} - x_{N_x-1} \end{array} \right.,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\iint_{q_T} |z - \Pi_h z|^2 dxdt &\leq K_1 |q_T| \|z_x\|_{L^\infty(q_T)}^2 (\Delta x)^2 \\
&+ K_2 |\omega| \|z_t\|_{L^2(0,T;L^\infty(\omega))}^2 (\Delta t)^2 \\
&+ K_3 |\omega| \|z_{tx}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\omega))}^2 (\Delta x)^2 (\Delta t)^4 \\
&+ K_4 T \|z_{xx}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 (\Delta x)^4,
\end{aligned}$$

onde os  $K_i$  são números finitos.

Logo, (6.8) ocorre, a saber,

$$\iint_{q_T} (T - t)^{2\alpha} |z - \Pi_h(z)|^2 dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0. \quad (6.21)$$

Por outro lado, a fim de mostrarmos que a primeira parcela de (6.7) vai para zero, considerando  $\alpha \geq 1/2$ , temos, em consonância com a Observação 5.5, a garantia que os  $A'_i \in L^\infty(Q_T)$ , adicionalmente, notemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} |A_1(z - \Pi_h z) + A_2(z - \Pi_h z)_t + A_3(z - \Pi_h z)_x + A_4(z - \Pi_h z)_{xx}|^2 dxdt \\ & \leq 4 \|A_1\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \iint_{Q_T} |z - \Pi_h z|^2 dxdt + 4 \|A_2\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_t|^2 dxdt + \\ & \quad + 4 \|A_3\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_x|^2 dxdt + 4 \|A_4\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_{xx}|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga ao feito para  $\iint_{Q_T} |z - \Pi_h z|^2 dxdt$ , concluímos que

$$\iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_t|^2 dxdt, \quad \iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_x|^2 dxdt, \quad \iint_{Q_T} |(z - \Pi_h z)_{xx}|^2 dxdt \rightarrow 0,$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , resultando em

$$\iint_{Q_T} |A_1(z - \Pi_h z) + A_2(z - \Pi_h z)_t + A_3(z - \Pi_h z)_x + A_4(z - \Pi_h z)_{xx}|^2 dxdt \rightarrow 0, \quad (6.22)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Portanto, de (6.21) e (6.22), obtemos (6.3).

Como discutido no início do capítulo, verificada a convergência (6.3), a Proposição 6.3 está assegurada para o espaço de dimensão finita considerado nesta análise e, em particular, vale o seguinte resultado.

**Teorema 6.7.** *Seja  $z_h \in Z_h$  a única solução de (6.2) e sejam  $y_h, v_h$  as funções definidas por*

$$y_h = \rho^{-1} (A_1 z_h + A_2 z_{h,t} + A_3 z_{h,x} + A_4 z_{h,xx}) \quad \text{e} \quad v_h = -(T-t)^\alpha \rho_0^{-1} z_h 1_\omega.$$

Então,

$$\|v - v_h\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0^+.$$



## 7 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

O conjunto de experimentos a seguir, foi realizado com auxílio do software FreeFEM++. Seguindo as considerações específicas de (CARA; MÜNCH, 2013), apresentamos um experimento numérico relativo à (6.2), a saber,

$$m_h(\hat{z}_h, \bar{z}_h) = \langle \ell_h, \bar{z}_h \rangle \quad \forall \bar{z}_h \in Z_h; \quad \hat{z}_h \in Z_h,$$

que pode ser vista como um sistema linear envolvendo uma matriz esparsa, definida positiva e simétrica de ordem  $2N_x N_t$ . Denotamos por  $\mathcal{M}_h$  esta matriz, de modo que

$$(z_h, \bar{z}_h)_{Z_h} = (\mathcal{M}_h \{z_h\}, \{\bar{z}_h\}).$$

**Observação 7.1.** *A matriz  $\mathcal{M}_h$  é conhecida na literatura por matriz de rigidez ou matriz global.*

Obtido a variável  $z_h$ , em virtude de (5.12), o controle  $v_h$  fica determinado por  $v_h = -\left((T-t)^\alpha \rho_0^{-1}\right) z_h 1_\omega$ . A aproximação  $y_h$  é obtida resolvendo (3.1), usando o método dos elementos finitos no espaço e no tempo de maneira padrão. Observe que a condição de otimalidade  $y_h = \rho_h^{-2} L_h^* p_h$  fornece uma segunda maneira de obtermos  $y_h$ , entretanto, é menos robusto, devido à estrutura de  $L^*$ .

Destacamos a divergência entre os dados obtidos aqui e em (CARA; MÜNCH, 2013), a qual ocorre principalmente em virtude dos programas usados para as simulações. Usamos o FreeFEM++, que automatiza a escolha dos espaços de aproximação, por outro lado, no MATLAB, programa usado em (CARA; MÜNCH, 2013), essa escolha é feita de forma manual, descrevendo as funções da base do espaço de elemento finito. Desta forma, as aproximações obtidas lá usaram como funções base os polinômios de 3ª ordem  $L_{ik}(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , para o espaço e os polinômios de 1ª ordem  $\mathcal{L}_{jl}(t)$ ,  $j = 0, 1$ , para o tempo, como considerados anteriormente. Entretanto, o FreeFEM++, por fazer essa escolha automática, não permite definirmos paralelamente a escolha de diferentes espaços de aproximação para variáveis distintas.

Descreveremos agora os dados e as funções auxiliares usadas para o experimento. Dado  $s \in (0, 1)$ , consideremos a função  $\beta_{0,s}$ :

$$\beta_{0,s}(x) = \frac{x(1-x)e^{-(x-c_s)^2}}{s(1-s)e^{-(s-c_s)^2}},$$

onde

$$c_s = s - \frac{1-2s}{2s(1-s)}.$$

Se  $s$  pertence a  $\omega \subset (0, 1)$ , verifica-se que  $\beta_{0,s}$  satisfaz as condições (4.5). Consideremos  $\rho$  e  $\rho_0$  como em (4.5) com  $\beta_0 = \beta_{0,s}$ , com  $s$  sendo o ponto médio de  $\omega$ ,  $K_1 = 0,1$  e  $K_2 = 2 \|\beta_0\|_{L^\infty(0,1)} = 2$ .

Consideramos uma função de difusão constante  $a \equiv a_0 = 10^{-1}$  em  $(0, 1)$ . O estado inicial  $y_0$  é a primeira função própria do operador Laplaciano de Dirichlet, ou seja,

$$y_0(x) \equiv \sin(\pi x).$$

Além disso,  $T = 0,5$ ,  $A \equiv 1$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ , de modo que todos os coeficientes que aparecem na formulação pertencem ao  $L^\infty(Q_T)$ , como indicado na Observação 5.5. Sobre a geometria dos elementos finitos, para termos  $\Delta x = \Delta t$ , consideramos  $N_t = 0.5 \cdot N_x$ . Abaixo podemos observar a malhara para o caso com  $N_x = 20$ .

Fonte: Autor

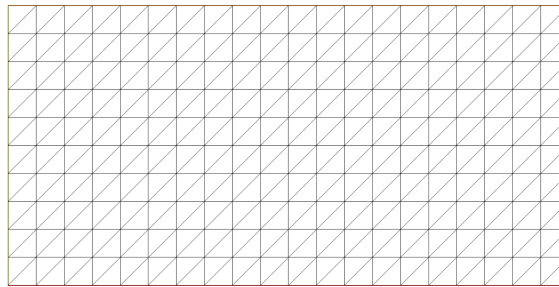


Figura 2 – Malha com  $\Delta t = \Delta x$

A seguir, temos as plotagens das funções pesos  $\rho^{-2}$  e  $\rho_0^{-2}$  com base em (4.5):

Fonte: Autor

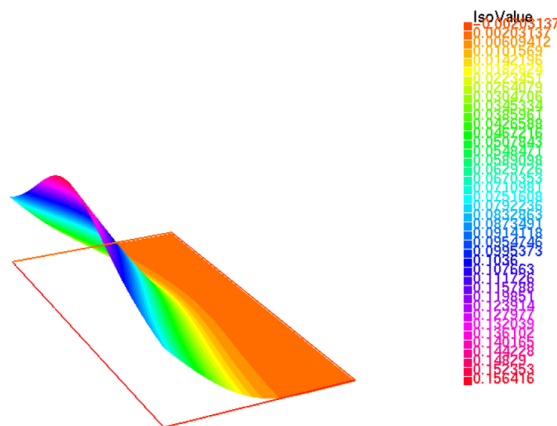
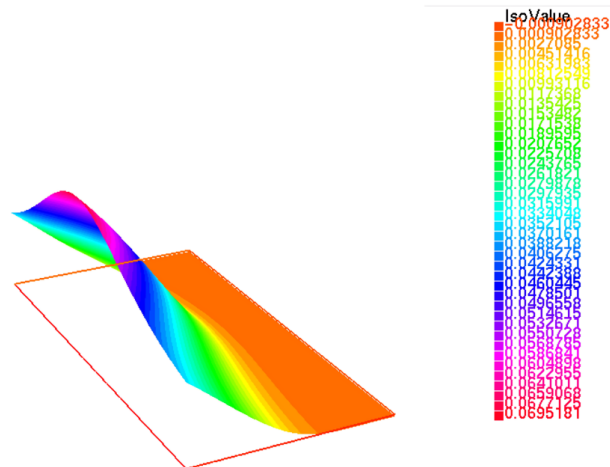


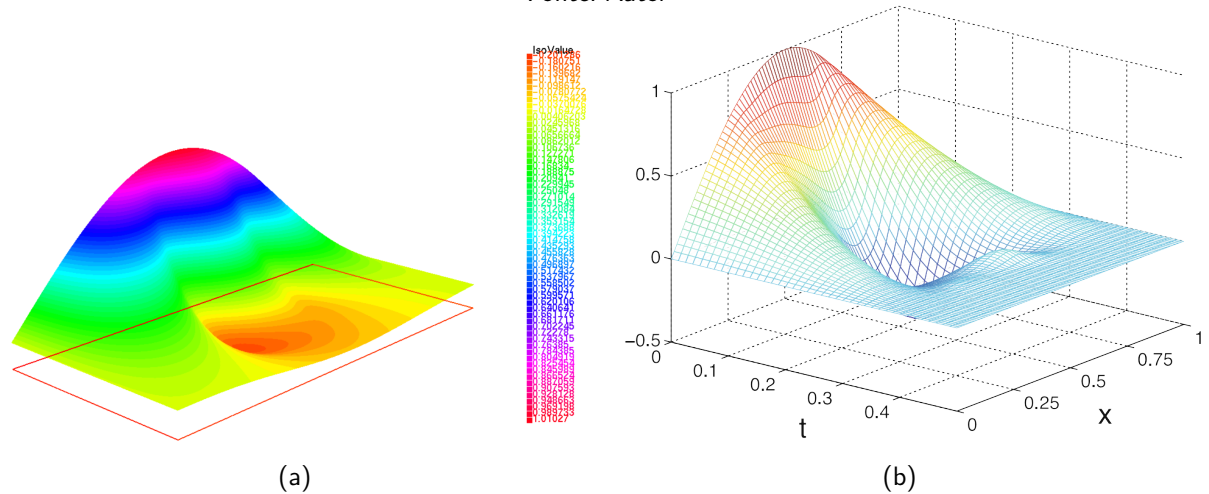
Figura 3 – Plotagem de  $\rho^{-2}$ .

Fonte: Autor

Figura 4 – Plotagem de  $\rho_0^{-2}$ 

Para fazermos uma comparação com os gráficos obtidos em (CARA; MÜNCH, 2013), seguem as plotagens de  $y_h$  e  $v_h$  obtidas neste trabalho (lado esquerdo (a)) e as plotagens obtidas em (CARA; MÜNCH, 2013) (lado direito (b)) para  $\alpha = 0$ ,  $s = 0.45$  e  $N_x = N_t = 80$ . Nestas condições, o termo  $A_1$  é singular, em virtude do fator  $(T - t)^{-1/2}$ . Desta forma, nos termos adequados, fizemos a substituição de  $(T - t)$  por  $(T - t + 10^{-10})$ .

Fonte: Autor

Figura 5 – Plotagens de  $y_h$

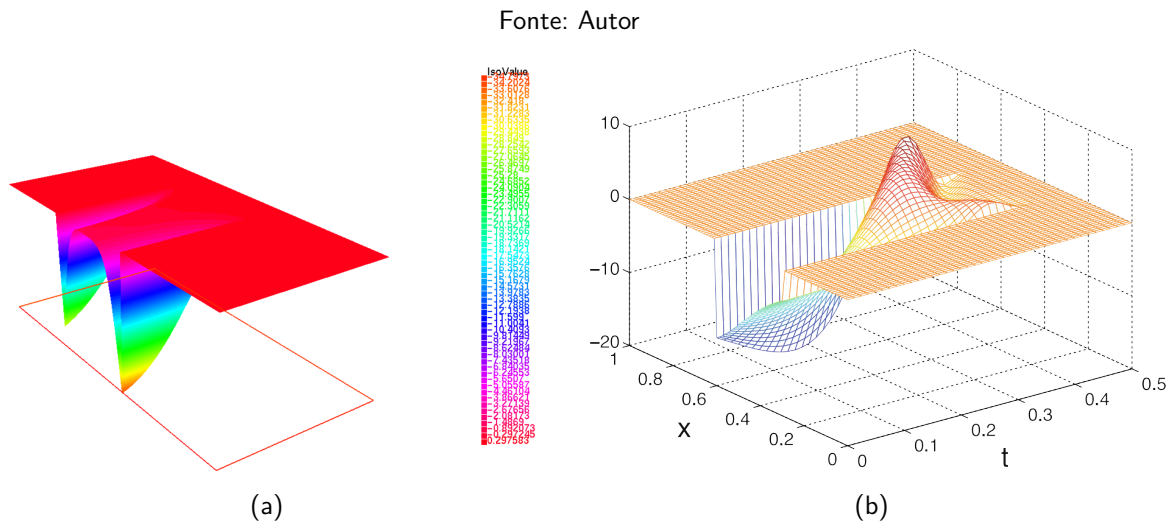


Figura 6 – Plotagens de  $v_h$

Adicionalmente, abaixo podemos conferir a evolução temporal da norma  $L^2$  em  $(0, 1)$  do estado e controle.

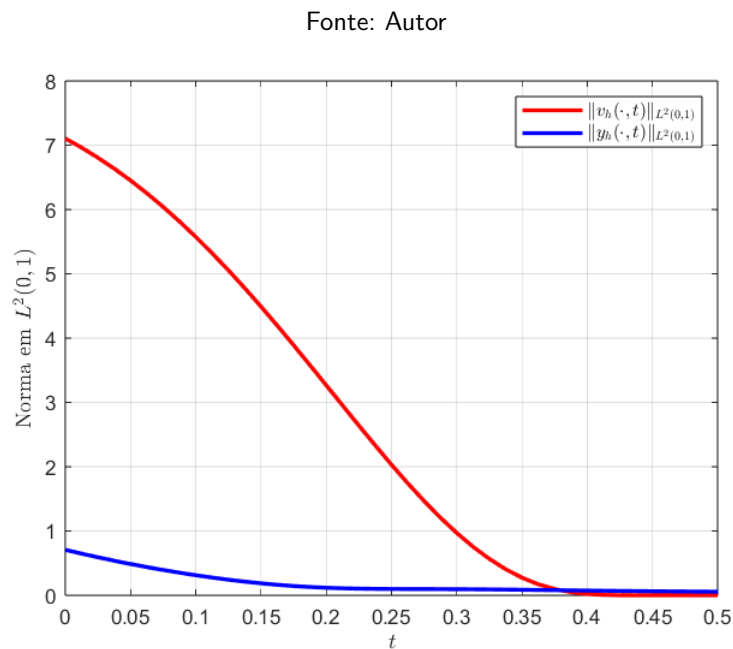


Figura 7 – Evolução temporal da norma  $L^2(0, 1)$

Nas tabelas abaixo fazemos uma comparação entre as normas das aproximações envolvidas e o valor dos passos considerados, os quais estamos assumindo sempre  $\Delta x = \Delta t$ . Além disso, alguns dados das tabelas listadas em (CARA; MÜNCH, 2013) estão inseridos para termos uma comparação entre os resultados.

Para o caso com  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $a(x) \equiv 10^{-1}$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.45$  :

Fonte: Autor

$\Delta x$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	1.307	1.874	2.58	3.455
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.078 \times 10^{-1}$	$1.896 \times 10^{-1}$	$1.789 \times 10^{-1}$	$1.748 \times 10^{-1}$

Tabela 1 – Caso  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.45$ 

Fonte: (CARA; MÜNCH, 2013)

$\Delta x, \Delta t$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	1.597	2.023	2.348	2.58
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$1.879 \times 10^{-1}$	$1.834 \times 10^{-1}$	$1.826 \times 10^{-1}$	$1.827 \times 10^{-1}$

Tabela 2 – Caso  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.45$ Para o caso com  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $a(x) \equiv 10^{-1}$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.5$  :

Fonte: Autor

$\Delta x$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	0.701	0.874	1.208	1.789
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.446 \times 10^{-1}$	$2.398 \times 10^{-1}$	$2.338 \times 10^{-1}$	$2.28 \times 10^{-1}$

Tabela 3 – Caso  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.5$ 

Fonte: (CARA; MÜNCH, 2013)

$\Delta x, \Delta t$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	0.971	1.003	1.023	1.035
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.011 \times 10^{-1}$	$1.998 \times 10^{-1}$	$1.990 \times 10^{-1}$	$1.986 \times 10^{-1}$

Tabela 4 – Caso  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $\alpha = 0$  e  $s = 0.5$ Para o caso com  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $a(x) \equiv 10^{-1}$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.45$  :

Fonte: Autor

$\Delta x$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	1.292	1.994	2.927	4.314
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.201 \times 10^{-1}$	$2.121 \times 10^{-1}$	$2.078 \times 10^{-1}$	$2.091 \times 10^{-1}$

Tabela 5 – Caso  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.45$

Fonte: (CARA; MÜNCH, 2013)

$\Delta x, \Delta t$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	1.596	2.005	2.334	2.571
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$1.881 \times 10^{-1}$	$1.837 \times 10^{-1}$	$1.827 \times 10^{-1}$	$1.827 \times 10^{-1}$

Tabela 6 – Caso  $\omega = (0.3, 0.6)$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.45$

Para o caso com  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $a(x) \equiv 10^{-1}$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.5$  :

Fonte: Autor

$\Delta x$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	0.94	1.253	1.714	2.443
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.16 \times 10^{-1}$	$2.07 \times 10^{-1}$	$2.001 \times 10^{-1}$	$1.946 \times 10^{-1}$

Tabela 7 – Caso  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.5$

Fonte: (CARA; MÜNCH, 2013)

$\Delta x, \Delta t$	1/20	1/40	1/80	1/160
$\ v_h\ _{L^2(Q_T)}$	0.896	1.209	1.629	2.286
$\ u_h\ _{L^2(Q_T)}$	$2.19 \times 10^{-1}$	$2.077 \times 10^{-1}$	$1.997 \times 10^{-1}$	$1.941 \times 10^{-1}$

Tabela 8 – Caso  $\omega = (0.2, 0.8)$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $s = 0.5$

Em ambos os casos, observamos que quando temos mais elementos finitos,  $\|v_h\|_{L^2(Q_T)}$  tem maior variação em comparação com os dados de (CARA; MÜNCH, 2013), este fato evidencia o impasse descrito inicialmente sobre os espaços de aproximação.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pontuamos aqui sobre a utilização e escolha do programa FreeFEM++ para as simulações numéricas do Capítulo 7, o qual vem sendo amplamente usado na teoria das equações diferenciais e análise numérica. Tivemos interesse em aplicá-lo com um método direto sem a necessidade de adaptar suas formulações, em contraste com o que foi feito em (CARA; MÜNCH, 2013), onde usaram o programa MATLAB e aplicaram também outros métodos. Destacamos que este foi o nosso primeiro contato com esta ferramenta e pretendemos aprofundar nosso conhecimento sobre ela, assim como a teoria vinculada a ela, buscando não apenas melhores resultados para o problema abordado neste trabalho, como também para outras equações diferenciais parciais, por exemplo, os métodos mistos aplicados em (CARVALHO; CARA, 2020), (CARVALHO; CARA, 2019) e (CARVALHO; CARA; FERREL, 2020) para termos formulações que requerem outros espaços de aproximação.

Por fim, destacamos que os resultados obtidos com o uso do FreeFEM++ demonstraram o comportamento esperado ao considerarmos o espaço de aproximação com polinômios de grau um e a aplicação de um método primal. Isso evidencia a eficácia da ferramenta, que, por sua vez, é gratuita e, portanto, permite substituímos o MATLAB, que exige uma licença paga.

## REFERÊNCIAS

- BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley, 1995.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 2011th edition. ed. New York, NY Dordrecht Heidelberg London: Springer, 2010.
- CARA, E. F. .; MÜNCH, A. Numerical exact controllability of the 1d heat equation: Duality and carleman weights. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 163, n. 1, p. 253–285, 2014. Disponível em: <[https://econpapers.repec.org/RePEc:spr:joptap:v:163:y:2014:i:1:d:10.1007\\_s10957-013-0517-z](https://econpapers.repec.org/RePEc:spr:joptap:v:163:y:2014:i:1:d:10.1007_s10957-013-0517-z)>.
- CARA, E. F.; MÜNCH, A. Numerical null controllability of the 1d heat equation: primal algorithms. *Computational and Applied Mathematics*, v. 29, n. 1, p. 1–23, 2010. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00687884>>.
- CARA, E. F.; MÜNCH, A. Numerical null controllability of semi-linear 1-d heat equations: fixed point, least squares and newton methods. *Numerische Mathematik*, v. 119, n. 4, p. 611–646, May 2011. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00211-011-0393-x>>.
- CARA, E. F.; MÜNCH, A. Strong convergent approximations of null controls for the 1d heat equation. *SeMA Journal*, v. 61, n. 1, p. 49–78, 2013. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s40324-013-0001-6>>.
- CARA, E. F.; MÜNCH, A.; SOUZA, D. A. On the numerical controllability of the two-dimensional heat, stokes and navier–stokes equations. *Journal of Scientific Computing*, v. 70, p. 819–858, 2016. Disponível em: <<https://researchr.org/publication/Fernandez-CaraM17>>.
- CARA, E. F.; ZUAZUA, E. The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case. *Advances in Differential Equations*, v. 5, n. 4-6, p. 465–514, 2000.
- CARVALHO, P. P. de; CARA, E. F. On the computation of nash and pareto equilibria for some bi-objective control problems. *Journal of Scientific Computing*, v. 78, p. 246–273, 2019.
- CARVALHO, P. P. de; CARA, E. F. Numerical stackelberg-nash control for the heat equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 42, n. 5, p. A2678–A2700, 2020.
- CARVALHO, P. P. de; CARA, E. F.; FERREL, J. B. L. On the computation of nash and pareto equilibria for some bi-objective control problems for the wave equation. *Advances in Computational Mathematics*, Springer, v. 46, p. 73, 2020.
- CIARLET, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 530 p. ISBN 0898715148.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2nd. ed. Providence: American Mathematical Society, 2022. 712 p. ISBN 978-1470469429.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 5th. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 292 p. ISBN 978-85-244-0428-3.
- FOURIER, J. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot, 1822.



- 
- FURSIKOV, A. V.; IMANUVILOV, O. Y. *Controllability of Evolution Equations*. Korea: Seoul National University, 1996. v. 34. 1–163 p. (Lecture Notes Series, v. 34).
- LIONS, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, v. 30, n. 1, p. 1–68, 1988.
- MEDEIROS, L. A.; MILLA, M. A. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elícticos não Homogêneos)*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.
- MEDEIROS, L. A. J.; MIRANDA, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, Instituto de Matemática, 1989.
- PALOMINO, J. A. S.; CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações*. Maringá: UEM/DMA, 2016.
- PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- RINCON, M. A. R.; LIU, I. S. *Introdução ao Método de Elementos Finitos*. [S.l.]: Instituto de Matemática, UFRJ, 2020.

## APÊNDICE A – ESTIMATIVA DE CARLEMAN

Por simplicidade, demonstraremos uma desigualdade de Carleman para a seguinte equação

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + a(x, t)u = v1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Aqui, consideremos o seguinte problema adjunto

$$\begin{cases} -\phi_t - \phi_{xx} + a(x, t)\phi = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \phi(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ \phi(x, T) = \phi_T(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

**Teorema A.1** (Desigualdade de Carleman). *Existem constantes positivas  $\lambda_0, s_0, C$  tais que*

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} e^{2s\alpha} \left[ (s\phi)^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2) + s\phi|\varphi_x|^2 + s^3\phi^3\varphi^2 \right] dxdt \\ \leq C \left( \int_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + \int_{q_T} e^{2s\alpha} (s\phi)^3 \varphi^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

para todo  $s \geq s_0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  e  $\varphi$  solução de (A.2).

A demonstração apresentada aqui segue as ideias usadas em (FURSIKOV; IMANUVILOV, 1996) para o caso de uma equação parabólica geral. Além disso, destacamos que não estaremos interessados em explicitar o valor da constante  $C$ , sendo assim, no decorrer da demonstração estaremos usando a letra “ $C$ ” para denotar constantes que, no geral, assumem valores distintos a cada implicação. Referenciamos (CARA; ZUAZUA, 2000) para um estudo onde a constante  $C$  é abordada com mais cuidado.

**Demonstração:** Fixemos  $\alpha_0$  como no Lema 4.1 e consideremos

$$\phi(x, t) = \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)}}{t(T-t)} \quad \text{e} \quad \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)} - e^{2\lambda\|\alpha_0\|_{C(\bar{\Omega})}}}{t(T-t)},$$

onde  $\Omega = (0, 1)$ . Além disso,  $F := -\phi_t - \phi_{xx} + a(x, t)\phi$ .

**Identities sobre  $\phi$  e  $\alpha$ :**

$$\text{Id}_1 \quad \phi_x(x, t) = \lambda \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)}}{t(T-t)} (\alpha_0)_x = \lambda\phi(\alpha_0)_x;$$

$$\text{Id}_2 \quad \alpha_x(x, t) = \lambda \frac{e^{\lambda\alpha_0(x)}}{t(T-t)} (\alpha_0)_x = \lambda\phi(\alpha_0)_x;$$

$$\text{Id}_3 \quad \alpha_{xx}(x, t) = \lambda^2 \phi(\alpha_0)_x^2 + \lambda \phi(\alpha_0)_{xx};$$

$$\text{Id}_4 \quad |\phi_x| \leq C\lambda\phi \quad \text{e} \quad |\alpha_x| \leq C\lambda\phi \quad \left( \text{seguem do fato que } \alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega}) \right);$$

$$\text{Id}_5 \quad |\alpha_{xx}| < C\lambda^2\phi, \quad \text{se } \lambda > 1;$$

$$\text{Id}_6 \quad |\alpha_t| \leq CT\phi^2 \quad \text{e} \quad |\phi_t| \leq CT\phi^2;$$

$$\text{Id}_7 \quad |\alpha_{xx}| \leq CT^2\phi^2.$$

Afim de  $p(x, 0) = p(x, T) = 0$ , fazamos a seguinte mudança de variável:

$$p(x, t) = e^{s\alpha(x,t)}\varphi(x, t), \tag{A.4}$$

ou ainda,

$$\varphi(x, t) = e^{-s\alpha(x,t)}p(x, t).$$

Calculando as derivadas requeridas em (A.2):

- $\varphi_t = -s\alpha_t e^{s\alpha}p + e^{s\alpha}p_t;$
- $\varphi_x = -se^{-s\alpha}p\alpha_x + e^{-s\alpha}p_x;$
- $\varphi_{xx} = -se^{-s\alpha}p\alpha_{xx} + s^2\alpha_x^2 e^{-s\alpha}p - 2se^{-s\alpha}\alpha_x p_x + e^{-s\alpha}p_{xx},$

e substituindo  $\alpha_x$  e  $\alpha_{xx}$ , vem

$$\varphi_{xx} = -se^{-s\alpha} \left( \lambda^2 \phi(\alpha_0)_x^2 + \lambda \phi(\alpha_0)_{xx} \right) p + s^2 (\lambda \phi(\alpha_0)_x)^2 e^{-s\alpha} p - 2se^{-s\alpha} (\lambda \phi(\alpha_0)_x) p_x + e^{-s\alpha} p_{xx}.$$

Substituindo  $\varphi_t$ ,  $\varphi_x$  e  $\varphi_{xx}$  em (A.2), obtemos

$$\begin{aligned} F &= -e^{-s\alpha} (-s\alpha_t p + p_t) + se^{-s\alpha} \left( \lambda^2 \phi(\alpha_0)_x^2 + \lambda \phi(\alpha_0)_{xx} \right) p - s^2 (\lambda \phi(\alpha_0)_x)^2 e^{-s\alpha} p \\ &\quad + 2se^{-s\alpha} (\lambda \phi(\alpha_0)_x) p_x - e^{-s\alpha} p_{xx} + ae^{-s\alpha(x,t)} p, \end{aligned}$$

ou ainda, multiplicando ambos os lados por  $-e^{-s\alpha}$ , decorre que

$$\begin{aligned} e^{-s\alpha} F &= -s\alpha_t p - p_t - s \left( \lambda^2 \phi(\alpha_0)_x^2 + \lambda \phi(\alpha_0)_{xx} \right) p + s^2 (\lambda \phi(\alpha_0)_x)^2 p \\ &\quad - 2s (\lambda \phi(\alpha_0)_x) p_x + p_{xx} - ap. \end{aligned}$$

Feitas essas considerações, definamos

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 p := -2s\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \phi p - 2s\lambda \phi(\alpha_0)_x p_x - p_t, \\ M_2 p := s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p + p_{xx} - s\alpha_t p, \\ G := e^{-s\alpha} F + s\lambda \phi(\alpha_0)_{xx} p + ap - s\lambda^2 \phi(\alpha_0)_x^2 p. \end{array} \right.$$

Logo, o sistema (A.2) torna-se

$$\begin{cases} M_1 p + M_2 p = G, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ p(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T), \\ p(x, 0) = p(x, T) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Agora, consideremos a norma  $L^2(Q_T)$  em ambos os lados de (A.5)<sub>1</sub>, ou seja,

$$\|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2(M_1 p, M_2 p)_{L^2(Q_T)} = \|G\|_{L^2(Q_T)}^2. \quad (\text{A.6})$$

Notemos que

$$(M_1 p, M_2 p)_{L^2(Q_T)} = \sum_{i,j=1}^3 ((M_1 p)_i, (M_2 p)_j)_{L^2(Q_T)}, \quad (\text{A.7})$$

em que  $(M_k p)_i$  denota a  $i$ -ésima parcela de  $M_k p$ .

Analisemos individualmente cada um dos 9 produtos internos que compõem (A.7).

$$\mathbf{1^a} - \text{Para } ((M_1 p)_1, (M_2 p)_1)_{L^2(Q_T)} = \left( -2s\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \phi p, s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p \right)_{L^2(Q_T)}.$$

Para tal termo, notemos que

$$((M_1 p)_1, (M_2 p)_1)_{L^2(Q_T)} = -2s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x^4 \phi^3 p^2 dx dt. \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{2^a} - \text{Para } ((M_1 p)_2, (M_2 p)_1)_{L^2(Q_T)} = \left( -2s\lambda \phi (\alpha_0)_x p_x, s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p \right)_{L^2(Q_T)}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} ((M_1 P)_2, (M_2 P)_1)_{L^2(Q_T)} &= -2s^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^3 p_x p dx dt \\ &= -2s^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^3 \left( \frac{p^2}{2} \right)_x dx dt \\ &= s^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} [\phi^3 (\alpha_0)_x^3]_x p^2 dx dt \\ &= s^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} [3\phi^2 \phi_x (\alpha_0)_x^3 + 3\phi^3 (\alpha_0)_x^2 (\alpha_0)_{xx}] p^2 dx dt. \end{aligned}$$

Desde que  $\alpha_0 \in C(\overline{\Omega})$  e pela identidade  $Id_1$ , segue que

$$\left| ((M_1 P)_2, (M_2 P)_1)_{L^2(Q_T)} \right| \leq 3s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^4 p^2 dx dt + 3Cs^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dx dt. \quad (\text{A.9})$$

Assim

$$((M_1 P)_2, (M_2 P)_1)_{L^2(Q_T)} \geq 3s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^4 p^2 dx dt - 3Cs^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dx dt. \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{3^a} - \text{Para } ((M_1 p)_3, (M_2 p)_1)_{L^2(Q_T)} = \left( p_t, s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p \right)_{L^2(Q_T)}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} ((M_1p)_3, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)} &= s^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^2(\alpha_0)_x \left(\frac{p^2}{2}\right)_t dxdt \\ &= -\frac{1}{2}s^2\lambda^2 \iint_{Q_T} 2\phi\phi_t(\alpha_0)_x p^2 dxdt \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |((M_1p)_3, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)}| &\stackrel{(Id_6)}{\leq} s^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi(CT\phi^2)(\alpha_0)_x p^2 dxdt \\ &\leq CTs^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$((M_1p)_3, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)} \geq -CTs^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt. \quad (\text{A.11})$$

Com isso, de (A.8), (A.10) e (A.11),

$$\begin{aligned} (M_1p, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)} &= ((M_1p)_1 + (M_1p)_2 + (M_1p)_3, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)} \\ &\geq s^3\lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^2(\alpha_0)_x p^2 - C(s^3\lambda^3 + Ts^2\lambda^2) \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

**4ª** - Para  $((M_1p)_1, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} = \left(-2s\lambda^2(\alpha_0)_x \phi p, p_{xx}\right)_{L^2(Q_T)}$ .

Segue que

$$\begin{aligned} &((M_1p)_1, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} \\ &= -2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x \phi p p_{xx} dxdt \\ &= 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} ((\alpha_0)_x \phi p)_x p_x dxdt \\ &\stackrel{(id_1)}{=} 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} 2(\alpha_0)_x(\alpha_0)_{xx} \phi p p_x dxdt + 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x (\lambda\phi\alpha_0) p p_x dxdt \\ &\quad + 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x \phi p_x^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Note que,

$$\left| 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} 2(\alpha_0)_x(\alpha_0)_{xx} \phi p p_x dxdt \right| \leq Cs\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt,$$

ou seja,

$$-Cs\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt \leq 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} 2(\alpha_0)_x(\alpha_0)_{xx} \phi p p_x dxdt \quad (\text{A.14})$$

e

$$\left| 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x (\lambda\phi\alpha_0) p p_x dxdt \right| \leq Cs\lambda^3 \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt,$$

isto é,

$$-Cs\lambda^3 \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt \leq 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x^2 (\lambda\phi\alpha_0) p p_x dxdt. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo (A.14) e (A.15) em (A.13), obtemos

$$\begin{aligned} ((M_1p)_1, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} &\geq 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} |(\alpha_0)_x|^2 \phi |p_x|^2 dxdt \\ &\quad - C(s\lambda^2 + s\lambda^3) \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

**5ª** - Para  $((M_1p)_2, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} = \left( -2s\lambda\phi(\alpha_0)_x p_x, p_{xx} \right)_{L^2(Q_T)}$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} &((M_1p)_2, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} \\ &= -2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_x p_x p_{xx} \\ &= 2s\lambda \iint_{Q_T} (\phi(\alpha_0)_x p_x)_x p_x dxdt - 2s\lambda \int_0^T (\phi(\alpha_0)_x p_x^2) \Big|_0^1 dt \\ &= 2s\lambda \iint_{Q_T} (\lambda\phi(\alpha_0)_x)(\alpha_0)_x p_x p_x dxdt + 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_{xx} p_x p_x dxdt \\ &\quad + 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_x p_{xx} p_x dxdt - 2s\lambda \int_0^T (\phi(\alpha_0)_x p_x^2) \Big|_0^1 dt, \\ &= 2s\lambda \iint_{Q_T} (\lambda\phi(\alpha_0)_x)(\alpha_0)_x p_x^2 dxdt + 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_{xx} p_x^2 dxdt \\ &\quad + 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_x \left( \frac{p_x^2}{2} \right)_x dxdt - 2s\lambda \int_0^T (\phi(\alpha_0)_x p_x^2) \Big|_0^1 dt. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Como

$$\left| 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_{xx} |p_x|^2 dxdt \right| \leq Cs\lambda \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2,$$

vale,

$$-Cs\lambda \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \leq 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_{xx} p_x^2 dxdt. \quad (\text{A.18})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 2s\lambda \iint_{Q_T} \phi(\alpha_0)_x \left( \frac{p_x^2}{2} \right)_x dxdt &\stackrel{(Id_1)}{=} -2s\lambda \iint_{Q_T} \left( \lambda\phi(\alpha_0)_x(\alpha_0)_x + \phi(\alpha_0)_{xx} \right) \frac{p_x^2}{2} dxdt \\ &\quad + s\lambda \int_0^T (\phi p_x^2(\alpha_0)_x) \Big|_0^1 dt, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde

$$\begin{aligned} \left| -2s\lambda \iint_{Q_T} \left( \lambda\phi(\alpha_0)_x(\alpha_0)_x + \phi(\alpha_0)_{xx} \right) \frac{p_x^2}{2} dxdt \right| &\leq C(s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \\ &\quad + s\lambda \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Sobre os termos de fronteira que aparecem em (A.17) e (A.19),

$$-2s\lambda \int_0^T \left( \phi(\alpha_0)_x p_x^2 \right) \Big|_0^1 dt + s\lambda \int_0^T \left( \phi p_x^2(\alpha_0)_x \right) \Big|_0^1 dt = -s\lambda \int_0^T \left( \phi p_x^2(\alpha_0)_x \right) \Big|_0^1 dt. \quad (\text{A.21})$$

Entretanto, notemos que, sendo  $\alpha_0$  uma função positiva que se anula na fronteira, existe uma vizinhança para cada ponto dessa fronteira, tal que  $\alpha_0$  é decrescente. Assim,  $(\alpha_0)_x$  é negativa e, por este motivo, o termo (A.21) é não negativo.

Assim, do citado acima, (A.18) e (A.21), obtemos a seguinte limitação para (A.17)

$$\begin{aligned} ((M_1p)_2, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} &\geq 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi((\alpha_0)_x p_x)^2 dxdt - C \left( s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + s\lambda \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

**6ª** - Para  $((M_1p)_3, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} = (p_t, p_{xx})_{L^2(Q_T)}$ ;

Veriquemos que

$$\begin{aligned} ((M_1p)_3, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} &= \iint_{Q_T} p_t p_{xx} dxdt \\ &= \iint_{Q_T} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_x^2}{2} \right) dxdt \\ &= \int_0^1 (p_x^2) \Big|_0^T dx \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

pois  $p_x(x, t) = s\alpha_x e^{s\alpha} \phi + e^{s\alpha} \phi_x$ .

Com isso, em virtude de (A.16), (A.22) e (A.23), vale

$$\begin{aligned} (M_1p, (M_2p)_1)_{L^2(Q_T)} &= ((M_1p)_1 + (M_1p)_2 + (M_1p)_3, (M_2p)_2)_{L^2(Q_T)} \\ &\geq 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} (\alpha_0)_x^2 \phi |p|^2 dxdt - C(s\lambda^2 + s\lambda^3) \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| \\ &\quad - C(s\lambda^2 + s\lambda) \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

**7ª** - Para  $((M_1p)_1, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)} = (-2s\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \phi p, -s\alpha_t p)_{L^2(Q_T)}$  :

Observemos que

$$\left| ((M_1p)_1, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)} \right| = \left| \iint_{Q_T} 2s^2\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \alpha_t \phi p^2 dxdt \right| \stackrel{(Id_6)}{\leq} CTs^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt,$$

daí,

$$-CTs^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt \leq ((M_1p)_1, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)}. \quad (\text{A.25})$$

**8ª** - Para  $((M_1p)_2, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)} = (-2s\lambda \phi(\alpha_0)_x p_x, -s\alpha_t p)_{L^2(Q_T)}$ ;

Notemos que

$$\begin{aligned}
& \left( (M_1 p)_2, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)} \\
&= \iint_{Q_T} 2s^2 \lambda \phi(\alpha_0)_x \alpha_t p_x p \, dx dt \\
&= \iint_{Q_T} 2s^2 \lambda \phi(\alpha_0)_x \alpha_t \left( \frac{p^2}{2} \right)_x \, dx dt \\
&= -s^2 \lambda \iint_{Q_T} (\phi(\alpha_0)_x \alpha_t)_x p^2 \, dx dt \\
&= -s^2 \lambda \iint_{Q_T} \underbrace{\lambda \phi(\alpha_0)_x (\alpha_0)_x}_{\leq C} \underbrace{\alpha_t}_{CT\phi^2} p^2 + \underbrace{\phi(\alpha_0)_{xx}}_{\leq C} \underbrace{\alpha_t}_{CT\phi^2} p^2 + \phi(\alpha_0)_x \alpha_{tx} p^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Daí, se  $\lambda > 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \left| \left( (M_1 p)_2, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)} \right| \\
&\leq C s^2 \lambda^2 T \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt + C s^2 \lambda \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt + C s^2 \lambda^2 T \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt \\
&\leq C s^2 \lambda^2 T \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-C s^2 \lambda^2 T \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt \leq \left( (M_1 p)_2, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)}. \quad (\text{A.26})$$

**9ª** - Para  $\left( (M_1 p)_3, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)} = \left( p_t, -s\alpha_t p \right)_{L^2(Q_T)}$ ;

Obtemos

$$\begin{aligned}
\left( (M_1 p)_3, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)} &= - \iint_{Q_T} s\alpha_t p p_t \, dx dt \\
&= - \iint_{Q_T} s\alpha_t \left( \frac{p^2}{2} \right)_t \, dx dt \\
&= \iint_{Q_T} s\alpha_{tt} \frac{p^2}{2} \, dx dt.
\end{aligned}$$

Daí, válido que  $|\alpha_{tt}| \leq CT^2 \phi^3$ , segue

$$\left| \left( (M_1 p)_3, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)} \right| \leq C s T^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt.$$

Logo,

$$-C s T^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt \leq \left( (M_1 p)_3, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)},$$

ou ainda,

$$-C s^2 \lambda^2 T^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 \, dx dt \leq \left( (M_1 p)_3, (M_2 p)_3 \right)_{L^2(Q_T)}. \quad (\text{A.27})$$



Com isso, de (A.25), (A.26) e (A.27), resulta que

$$\begin{aligned} (M_1p, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)} &= ((M_1p)_1 + (M_1p)_2 + (M_1p)_3, (M_2p)_3)_{L^2(Q_T)} \\ &\leq -C(T+1)Ts^2\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Feitas essas estimativas para os termos de  $(M_1p, M_2p)_{L^2(Q_T)}$ , obtemos de (A.11), (A.24) e (A.28) que

$$\begin{aligned} (M_1p, M_2p)_{L^2(Q_T)} &\geq s^3\lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 |(\alpha_0)_x|^4 p^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} |(\alpha_0)_x|^2 \phi |p_x|^2 dxdt \\ &\quad - \underbrace{C(s^3\lambda^3 + s^2\lambda^3 + s^2\lambda^2) \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt}_{I_1} - C s \lambda \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \\ &\quad - \underbrace{C(s\lambda^2 + s\lambda^3) \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt}_{I_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

onde valem

$$|I_1| \leq C s^3 \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt,$$

ou seja,

$$-C s^3 \lambda^3 \leq \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt, \quad (\text{A.30})$$

e

$$|I_2| \leq C s \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi |p| |p_x| dxdt \leq C s \lambda^3 \iint_{Q_T} \phi (\lambda^2 |p|) (\lambda |p_x|) dxdt.$$

Por meio da desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C s^2 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi p^2 dxdt + C \lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \\ &\leq C s^2 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt + C \lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-C s^2 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt - C \lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \leq I_2. \quad (\text{A.31})$$

Substituindo (A.30) e (A.41) em (A.29), vem

$$\begin{aligned} &(M_1p, M_2p)_{L^2(Q_T)} \\ &\geq s^3\lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 |(\alpha_0)_x|^4 p^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} |(\alpha_0)_x|^2 \phi |p_x|^2 dxdt - \\ &\quad - C(s^2\lambda^4 + s^3\lambda^3) \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt - C(s\lambda + \lambda^2) \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \end{aligned}$$

Desta forma, como estamos analisando (A.6.) a saber,

$$\|M_1p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2p\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2(M_1p, M_2p)_{L^2(Q_T)} = \|G\|_{L^2(Q_T)}^2,$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
& \|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 |(\alpha_0)_x|^4 p^2 dxdt + \\
& + 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} |(\alpha_0)_x|^2 \phi (p_x)^2 dxdt - C(s^2 \lambda^4 + s^3 \lambda^3) \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt - \\
& - C(s\lambda + \lambda^2) \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt \leq \|G\|_{L^2(Q_T)}^2.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Agora, analisemos o termo  $\|G\|_{L^2(Q_T)}^2$ , ou seja,

$$\iint_{Q_T} | -e^{s\alpha} F + s\lambda \phi (\alpha_0)_{xx} p + ap + s\lambda^2 \phi (\alpha_0)_x^2 p |^2 dxdt.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|G\|_{L^2(Q_T)}^2 & \leq 4 \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + \iint_{Q_T} |s\lambda \phi \alpha_0 p|^2 dxdt \right. \\
& \quad \left. + \iint_{Q_T} |ap|^2 dxdt + \iint_{Q_T} |s\lambda^2 \phi (\alpha_0)_x^2 p|^2 dxdt \right) \\
& \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + \iint_{Q_T} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |p|^2 dxdt \right. \\
& \quad \left. + \iint_{Q_T} \|a\|_{L^\infty}^2 |p|^2 dxdt + \iint_{Q_T} s^2 \lambda^4 \varphi^2 |p|^2 dxdt \right) \\
& \leq C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + C \iint_{Q_T} s^2 \lambda^4 \phi^3 |p|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

E substituindo em (A.32), obtemos

$$\begin{aligned}
& \|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 \\
& + 2s^3 \lambda^4 \iint_Q \phi^3 (\alpha_0)_x^4 p^2 dxdt + 2s\lambda^2 \iint_Q (\alpha_0)_x^2 \phi p_x^2 dxdt \\
& \leq C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt \\
& + C(s^2 \lambda^4 + s^3 \lambda^3) \iint_Q \phi^3 p^2 dxdt + C(s\lambda + \lambda^2) \iint_Q \phi p_x^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Como  $\gamma = \inf_{\partial\Omega \cup (\bar{\Omega} - \omega)} |(\alpha_0)| > 0$ , então valem

$$\gamma^4 \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi^3 p^2 \leq \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^4 p^2 \leq \iint_{Q_T} \phi^3 (\alpha_0)_x^4 p^2 \tag{A.34}$$

e

$$\gamma^2 \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi p_x^2 \leq \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi (\alpha_0)_x^2 p_x^2 \leq \iint_{Q_T} \phi (\alpha_0)_x^2 p_x^2. \tag{A.35}$$

Desta forma, de (A.33), (A.34) e (A.35):

$$\begin{aligned}
& \|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 \\
& + 2s^3 \lambda^4 \gamma^4 \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2 \gamma^2 \iint_{Q_T \setminus q_T} \phi p_x^2 dxdt \\
& \leq C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt \\
& + C(s^2 \lambda^4 + s^3 \lambda^3) \iint_Q \phi^3 p^2 dxdt + C(s\lambda + \lambda^2) \iint_Q \phi p_x^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Somando  $2s^3\lambda^4\gamma^4 \iint_{q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2\gamma^2 \iint_{q_T} \phi p_x^2 dxdt$  em ambos os lados de (A.36), segue que

$$\begin{aligned} & \|M_1 p\|_{L^2(Q)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q)}^2 + 2s^3\lambda^4\gamma^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2\gamma^2 \iint_{Q_T} \phi p_x^2 dxdt \\ & \leq C \iint_{Q_T} e^{2S\alpha} |F|^2 dxdt + C (s^2\lambda^4 + s^3\lambda^3) \iint_Q \phi^3 p^2 dxdt \\ & \quad + C (s\lambda + \lambda^2) \iint_Q \phi p_x^2 dxdt + 2s^3\lambda^4\gamma^4 \iint_{q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2\gamma^2 \iint_{q_T} \phi p_x^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Como para  $s$  e  $\lambda$  suficientemente grande valem

$$\gamma^4 s^3 \lambda^4 \geq C (\lambda^3 s^3 + s^2 \lambda^4) \quad \text{e} \quad \gamma^2 s \lambda^2 \geq C (s \lambda + \lambda^2),$$

ou seja,

$$-\gamma^4 s^3 \lambda^4 \leq -C (\lambda^3 s^3 + s^2 \lambda^4) \quad \text{e} \quad -\gamma^2 s \lambda^2 \leq -C (s \lambda + \lambda^2).$$

Assim, analisando em (A.37) as integrais que envolvem os fatores acima limitados, (A.37) torna-se:

$$\begin{aligned} & \|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + s^3\lambda^4\gamma^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt + s\lambda^2\gamma^2 \iint_{Q_T} \phi p_x^2 dxdt \\ & \leq C \iint_{Q_T} e^{2S\alpha} |F|^2 dxdt + 2s^3\lambda^4\gamma^4 \iint_{q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2\gamma^2 \iint_{q_T} \phi p_x^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Considerando

$$\bar{\gamma} = \min\{1, \gamma^2, \gamma^4\}, \quad \tilde{\gamma} = \max\{1, \gamma^2, \gamma^4\} \quad \text{e} \quad C = \frac{C\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}},$$

a desigualdade (A.38) fica reescrita como segue

$$\begin{aligned} & \|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2 + s^3\lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi p_x^2 dxdt \\ & \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2S\alpha} |F|^2 dxdt + 2s^3\lambda^4 \iint_{q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi p_x^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Agora, façamos a análise do fator  $\|M_1 p\|_{L^2(Q_T)}^2$ . Sendo

$$M_1 p = -2s\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \phi p - 2s\lambda \phi (\alpha_0)_x p_x + p_t,$$

considerando o quadrado do modulo em ambos os lados, segue que

$$|p_t|^2 = \left| -2s\lambda^2 (\alpha_0)_x^2 \phi p - 2s\lambda \phi (\alpha_0)_x p_x - M_1 p \right|^2.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|p_t|^2 \leq C \left( s^2\lambda^4 \phi^2 p^2 + s^2\lambda^2 \phi^2 p_x^2 + |M_1 p|^2 \right).$$

Multiplicando por  $(s\phi)^{-1}$  e integrando sobre  $Q_T$ , vem

$$\iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} |p_t|^2 dxdt \leq C \iint_{Q_T} s\lambda^4 \phi p^2 + s\lambda^2 \phi p_x^2 + (s\varphi)^{-1} |M_1 p|^2 dxdt.$$

Sendo  $(s\phi)^{-1}$  limitado superiormente, vale

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} |p_t|^2 dxdt \leq \tilde{C} \left( \frac{1}{4} \iint_{Q_T} s\lambda^4 \phi p^2 dxdt + \frac{1}{4} \iint_{Q_T} s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt \right. \\ \left. + \iint_{Q_T} |M_1 p|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

No que segue, façamos a análise do fator  $\|M_2 p\|_{L^2(Q_T)}^2$ . Observemos que

$$M_2 p = s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p + p_{xx} - s\alpha_t p.$$

Considerando o quadrado do modulo em ambos os lados, vem

$$|p_{xx}|^2 = |s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p - M_2 p - s\alpha_t p|^2.$$

Usando a desigualdade triangular, vale

$$|p_{xx}|^2 \leq C \left( |M_2 p|^2 + |s^2 \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 p|^2 + |s\alpha_t p|^2 \right).$$

Pela limitação sobre de  $\alpha_0$ ,

$$|p_{xx}|^2 \leq C \left( |M_2 p|^2 + s^4 \lambda^4 \phi^4 p^2 + s^2 \phi^2 p^2 \right).$$

Multiplicando por  $(s\varphi)^{-1}$  e integrando em  $Q_T$ , vem

$$\iint_{Q_T} (s\varphi)^{-1} |p_{xx}|^2 \leq C \left( \iint_{Q_T} |M_2 p|^2 dxdt + \iint_{Q_T} s^3 \lambda^4 \phi^3 p^2 dxdt \right),$$

o que implica

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (s\varphi)^{-1} |p_{xx}|^2 \leq C \left( \iint_{Q_T} |M_2 p|^2 dxdt \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \iint_{Q_T} s^3 \lambda^4 \phi^3 p^2 dxdt + \frac{1}{4} \iint_{Q_T} s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Somando (A.40) e (A.41), obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (s\varphi)^{-1} (|p_t|^2 + |p_{xx}|^2) dxdt \leq C \left( \|M_2 p\|^2 + \|M_2 p\|^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} s^3 \lambda^3 \phi^3 p^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

Em virtude de (A.39), limitamos a desigualdade acima pela direita como segue

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (s\varphi)^{-1} (|p_t|^2 + |p_{xx}|^2) dxdt + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} s^3 \lambda^3 \phi^3 p^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt \\ \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + 2s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt + 2s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi p_x^2 dxdt \right), \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} (|p_t|^2 + p_{xx})^2 dxdt}_{I_0} + \underbrace{\iint_{Q_T} s^3 \lambda^3 \phi^4 p^2 dxdt}_{I_1} + \underbrace{\iint_{Q_T} s \lambda^2 \phi p_x^2 dxdt}_{I_2} \\ & \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + \underbrace{2s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt}_{I_3} + 2s \lambda^2 \iint_{Q_T} \phi p_x^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Para o que segue, recordemos que inicialmente consideramos a substituição  $p(x, t) = e^{s\alpha(x,t)} \varphi(x, t)$ . Assim, a seguir, reescreveremos a desigualdade (A.43) em termos de  $\varphi$ . Em particular, valem:

- $p_x = s\lambda(\alpha_0)_x \phi e^{s\alpha} \varphi + e^{s\alpha} \varphi_x, \quad \varphi_x = -s\lambda(\alpha_0)_x e^{-s\alpha} p + e^{-s\alpha} p_x;$
- $p_{xx} = e^{s\alpha} \left[ \varphi_{xx} + s \left( \lambda(\alpha_0)_x \phi + \lambda^2(\alpha_0)_{xx}^2 \phi \right) \varphi + s^2 \lambda^2 (\alpha_0)_{xx}^2 \phi^2 \varphi + 2s\lambda(\alpha_0)_x \varphi_x \phi \right];$
- $\varphi_t = p_t e^{-2\alpha} - 2\alpha_t p e^{-s\alpha};$
- $\varphi_{xx} = -s \left( \lambda^2 \phi (\alpha_0)_x^2 + \lambda \phi (\alpha_0)_{xx} \right) e^{-s\alpha} p + s^2 \left( \lambda^2 \phi^2 (\alpha_0)_x^2 \right) e^{-s\alpha} p - 2s \left( \lambda \phi (\alpha_0)_x p_x + e^{-s\alpha} p_{xx} \right).$

A respeito das integrais destacadas em (A.43), analisando em termos da variável  $\phi$ , obtemos

- Sobre  $I_3$ , vale

$$s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \varphi^3 p^2 dxdt = s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^2 \varphi^3 dxdt. \quad (\text{A.44})$$

- Sobre  $I_2$ , notemos que

$$e^{2s\alpha} \varphi_x^2 \leq C (s^2 \lambda^2 \alpha^2 \phi^2 p^2 + p_x^2),$$

integremos sobre  $Q_T$  e multipliquemos ambos os lados por  $s\lambda^2 \phi$ , assim,

$$s\lambda^2 \phi \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \varphi_x^2 dxdt \leq C \iint_{Q_T} s^3 \lambda^4 \alpha^2 \phi^3 p^2 + s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt. \quad (\text{A.45})$$

- Sobre  $I_0$ , observemos que

$$e^{2s\alpha} \varphi_{xx}^2 \leq C \left( p_{xx}^2 + s^2 \lambda^2 \phi^2 p^2 + s^4 \lambda^4 \phi^4 p^2 + s^2 \lambda^2 \phi^2 p_x^2 \right),$$

integremos sobre  $Q_T$  e multipliquemos ambos os lados por  $(s\phi)^{-1}$ , desta forma,

$$\begin{aligned} \iint_Q (s\phi)^{-1} e^{2s\alpha} \varphi_{xx}^2 dxdt & \leq C \left( \iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} p_{xx}^2 dxdt + \iint_{Q_T} s^3 \lambda^4 \phi^3 p^2 dxdt \right. \\ & \left. + \iint_{Q_T} s\lambda^2 \phi p_x^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Adicionalmente,

$$e^{2s\alpha} |\varphi_t|^2 \leq |p_t|^2 + s^2 T \phi^4 p^2,$$

integrando sobre  $Q_T$  e multiplicando ambos os lados por  $(s\phi)^{-1}$ , chegamos em

$$\iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} e^{2s\alpha} |\varphi_t|^2 dxdt \leq C \left( \iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} |p_t|^2 + s^3 \lambda^2 \phi^3 p^2 dxdt \right). \quad (\text{A.47})$$

De (A.44), (A.45), (A.46) e (A.47), resulta que

$$\begin{aligned} & \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2) dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \right) \\ & \leq C \iint_{Q_T} (s\phi)^{-1} (|p_t|^2 + |p_{xx}|^2) dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} \phi |p_x|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \phi^3 p^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Em virtude de (A.43), a desigualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2) dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \\ & \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi (e^{2s\alpha} s^2 \lambda^2 \varphi^2 + e^{2s\alpha} \varphi_x^2) dxdt \right), \end{aligned}$$

e sendo válido

$$s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi^{2s\alpha} s^2 \lambda^2 \varphi^2 dxdt \leq C s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt,$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\phi)^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2) dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \\ & \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi e^{2s\alpha} \varphi_x^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

No intuito de obtermos a desigualdade (A.3), comparado com a desigualdade acima obtida, resta analisarmos a parcela  $s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi e^{2s\alpha} \varphi_x^2 dxdt$ . Consideremos a função de corte  $\chi \in C_0^\infty(\omega)$  tal que  $\chi = 1$  em  $\omega_0$ ;

**Afirmção:** Vale

$$s\lambda^2 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \iint_Q s\lambda^2 \phi |\varphi_x|^2 e^{2s\alpha} dxdt + C_0 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} s^3 \alpha^4 \phi^3 |\varphi|^2 dxdt.$$

De fato, multiplicando a equação (A.2)<sub>1</sub> por  $\lambda^2 e^{2s\alpha} \chi s \phi \varphi$  e integrando em  $Q_T$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{- \iint_{Q_T} \lambda^2 e^{2s\alpha} \chi s \phi \varphi \varphi_t dxdt}_I - \underbrace{\iint_{Q_T} \lambda^2 e^{2s\alpha} \chi s \phi \varphi \varphi_{xx} dxdt}_{II} + \underbrace{\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s \phi \alpha \varphi^2 dxdt}_{III} \\ & = \underbrace{\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s \phi F dxdt}_{IV}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Assim, desde que temos que sobre  $I$  vale

$$\begin{aligned} - \iint_{Q_T} \lambda^2 e^{2s\alpha} \chi s \phi \varphi \varphi_t dxdt &= -\lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \phi \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi^2}{2} \right) dxdt \\ &= \frac{\lambda^2 s}{2} \iint_{Q_T} \chi (e^{2s\alpha} \phi)_t \varphi^2 dxdt \\ &= \frac{\lambda^2 s}{2} \iint_{Q_T} \chi (2s\alpha_t e^{2s\alpha} \phi + e^{2s\alpha} \phi_t) \varphi^2 dxdt \\ &= \frac{\lambda^2 s}{2} \iint_{Q_T} \chi (CT \phi^3 + CT \phi^2) \varphi^2 dxdt, \end{aligned}$$

com isso,

$$|I| \leq C s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dx dt. \quad (\text{A.51})$$

Sobre *II*, verifica-se

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \lambda^2 e^{2s\alpha} \chi s \phi \varphi_{xx} dx dt \\ &= \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda \phi(\alpha_0)_x \chi \phi \varphi \varphi_x dx dt + \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi_X \phi \varphi \varphi_x dx dt + \\ & \quad \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \lambda \phi(\alpha_0)_x \varphi \varphi_x dx dt + \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \phi \varphi_x^2 dx dt. \end{aligned}$$

Sobre *III*, obtemos

$$\left| -\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s \phi a(x) \varphi^2 dx dt \right| \leq C \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi^2 dx dt \leq C s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dx dt. \quad (\text{A.52})$$

Sobre *IV*, segue

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s \phi F dx dt \\ & \leq \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (FC \lambda^2 s \phi \varphi) dx dt \\ & \leq \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \left( \frac{F^2}{2} + \frac{1}{2} c^2 \lambda^4 s^2 \phi^2 \varphi^2 \right) dx dt \\ & \leq \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dx dt + C \lambda^4 s^3 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dx dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s \phi F dx dt \leq \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dx dt + C \lambda^4 s^3 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dx dt. \quad (\text{A.53})$$

Então, substituindo (A.51)-(A.53) em (A.50), verificamos que

$$\begin{aligned} & \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \phi |\varphi_x|^2 dx dt \\ & \leq |IV| + |I| + |III| - \underbrace{\lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda \phi(\alpha_0)_x \chi \phi \varphi \varphi_x dx dt}_V - \underbrace{\lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi_X \phi \varphi \varphi_x dx dt}_{VI} \\ & \quad - \underbrace{\lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \lambda \phi(\alpha_0)_x \varphi \varphi_x dx dt}_{VII}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Adicionalmente, sobre *V*:

$$\begin{aligned} |V| &= \left| -\lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda \phi(\alpha_0)_x \chi \phi \varphi \varphi_x dx dt \right| \\ &\leq C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda^3 s c \phi^2 |\varphi| |\varphi_x| \\ &= C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \left( \lambda^2 s^{1/2} C \phi^{3/2} |\varphi| \right) \left( \lambda s^{1/2} \varphi^{1/2} |\varphi_x| \right) dx dt \\ &\stackrel{(2.30)}{\leq} C \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \left( \overline{C} \lambda^4 s c^2 \phi^3 |\varphi|^2 + \frac{\lambda^2 s}{4\overline{C}} \phi |\varphi_x|^2 \right) dx dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|V| \leq C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dxdt + \frac{1}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda^2 s \phi |\varphi_x|^2 dxdt. \quad (\text{A.55})$$

Sobre VI:

$$\begin{aligned} |VI| &\leq \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \lambda^2 s C \phi |\varphi| |\varphi_x| dxdt \\ &= \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \left( \lambda s^{1/2} C \phi^{1/2} |\varphi| \right) \left( \lambda s^{1/2} \phi^{1/2} |\varphi_x| \right) dxdt \\ &\leq C\lambda^2 s \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt \\ &\leq C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt, \end{aligned}$$

assim,

$$|VI| \leq C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt. \quad (\text{A.56})$$

Sobre VII:

$$\begin{aligned} |VII| &\leq \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \lambda^3 s C \phi |\varphi| |\varphi_x| dxdt \\ &= \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \left( \lambda^2 s^{1/2} C \phi^{3/2} |\varphi| \right) \left( \lambda s^{1/2} \phi^{1/2} |\varphi_x| \right) dxdt \\ &\leq C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|VII| \leq C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt. \quad (\text{A.57})$$

Logo, como consequência de (A.55) - (A.57), (A.54) torna-se

$$\begin{aligned} \lambda^2 s \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 &= \lambda^2 s \iint_{q_T} e^{2s\lambda} \chi \phi |\varphi_x|^2 dxdt \\ &\leq \lambda^2 s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi \phi |\varphi_x|^2 dxdt \\ &\leq \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 + C\lambda^4 s^3 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 |\varphi|^2 + \frac{3\lambda^2 s}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi |\varphi_x|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Em virtude de (A.58), a desigualdade (A.49) fica reescrita por

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\varphi)^{-1} \left( |\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2 \right) dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \\ &\leq \bar{C} \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + C s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_{q_T} \phi e^{2s\alpha} |\varphi_x|^2 dxdt \right) \\ &\leq \bar{C} \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + C s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt + \frac{3s\lambda^2}{4\bar{C}} \iint_{Q_T} \phi e^{2s\alpha} |\varphi_x|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Daí, ao compararmos os termos que envolvem  $\varphi_x$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\varphi)^{-1} \left( |\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2 \right) dxdt + \frac{1}{4} s\lambda^2 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \\ &\leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} |F|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$



Portanto,

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} (s\varphi)^{-1} \left( |\varphi_t|^2 + |\varphi_{xx}|^2 \right) dxdt + s \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi \varphi_x^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \\ & \leq C \left( \iint_{Q_T} e^{2S\alpha} |F|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{2s\alpha} \phi^3 \varphi^2 dxdt \right), \end{aligned}$$

concluindo assim a prova de (A.3). ■