

FACEPE  
EDITAL FACEPE 08/2022 - PIBIC/FACEPE

RELATÓRIO FINAL

Julho - 2023  
Recife - PE

- **Projeto:** Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações
- **Orientador:** Roberto de Almeida Capistrano Filho
- **Instituição :** Universidade Federal de Pernambuco
- **Campus:** Recife
- **Centro :** Centro de Ciências Exatas e da Natureza
- **Departamento :** Departamento de Matemática
- **Bolsista:** Raffael Marinho de Arruda Feitosa - CPF: 061612524-06
- **Vigência do projeto:** 01/08/2022 à 31/07/2023
- **E-mail:** raffael.arruda@ufpe.br

# 1 Introdução

O estudo de cálculo diferencial serve para abranger características as quais envolvem problemas cotidianos e estão imersas em meio acadêmico. Nesse contexto, o estudo das equações diferenciais ordinárias entra como uma alternativa válida e eficiente para constituir um meio o qual possa integrar inúmeros problemas de cunho biológico, físico e científico.

Durante muito tempo, os matemáticos estiveram mais focados em observar se a técnica do cálculo funcionava corretamente, sem necessariamente verificar o rigor existente no desenvolvimento destes, o que originaram absurdos em alguns dos seus raciocínios, os quais foram fundamentais para que, com o passar dos tempos, viessem a ser corrigidos e construídos segundo uma fundamentação lógica e exata.

Inicialmente, Isaac Newton (1642-1727) trouxe o desenvolvimento do teorema binomial como uma forte contribuição para as exatas e, isto serviu de base para o cálculo diferencial segundo as formulações práticas da queda de objetos, originando assim a lei da gravitação universal, trazendo a ideia que uma matéria atrai outra a partir de uma força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as mesmas.

As primeiras motivações em se desenvolver o estudo de derivadas e integrais vieram a partir de exemplos práticos, no intuito de calcular comprimentos, áreas e volumes considerados e, a partir disso, as integrais foram consideradas como uma ferramenta fundamental para tal objetivo, sendo estudadas a partir do somatório de partes das mesmas segundo um ponto inicial e um ponto final, assim como as derivadas, que vieram segundo o estudos dos pontos de máximo e mínimo a partir da reta tangente das curvas.

Além de Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) formulou ideias elementares sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e o uso da integral, a qual teve seu símbolo derivado da palavra soma, além de ter sido o primeiro a trazer a notação da equação diferencial, dada por  $\frac{dx}{dy}$ , bem como por desenvolver os primeiros métodos de separação das variáveis, as reduções de equações separáveis e as equações diferenciais de primeira ordem.

## 2 Equações diferenciais de primeira ordem

**Definição 1.** A forma geral das equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem pode ser representada pela equação onde as funções reais contínuas  $p$  e  $q$  são definidas no intervalo aberto  $(a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\frac{df}{dt} = p(t)x + q(t) \quad (1)$$

Em (1), tem-se que a função  $f(x)$ , definida no intervalo  $(a, b)$ , só é solução desta se for diferenciável e satisfizer a respectiva equação. A notação  $\frac{df}{dt}$  é usada para designar a derivada em relação à variável independente  $t$ . Além disso, deve-se obter a solução geral da equação, a qual reúna todas as soluções e a solução do problema do valor inicial, a qual terá uma única solução, representada por:  $X(t_0) = X_0$ , dado que  $t_0 \in (a, b)$  e  $x_0$  são os dados iniciais.

**Exemplo 1.** A equação de crescimento exponencial é representada por:

$$\frac{dx}{dt} = kx. \quad (2)$$

Esta equação apresenta como solução geral os seus múltiplos  $x(t) = ce^{kt}$  e a solução do PVI desta, é dada por  $X(t_0) = X_0$ .

## 2.1 Equações Separáveis

Correspondem às equações diferenciais, representada em (1), na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (3)$$

em que  $f$  e  $g$  são, respectivamente, funções contínuas definidas em intervalos abertos  $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $g(y) \neq 0$ .

Dada uma função  $y$ , definida no intervalo  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  e  $y((\alpha, \beta) \subset (c, d)$ , com  $g(y(x)) \neq 0$ , pode-se afirmar que esta satisfaz para todo  $x \in (a, b)$ , com  $y(x)$  sendo uma solução de (1). Contudo, as soluções não estão definidas para todo  $x$  onde o segundo membro está definido. Dessa forma, a relação em (2) e (5) devem ser satisfeitas:

$$\frac{d}{dx}(G(y(x))) = f(x) \quad (4)$$

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (5)$$

Aplicando a regra da Cadeia e, levando-se em conta que  $C$  é uma constante arbitrária, com  $F$  e  $G$  primitivas de  $f$  e  $g$ , e monótonas, ou seja, preservam a relação de ordem existente, permitindo então obter soluções em relação à sua inversa, na forma  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ .

A partir disto, verifica-se que a relação  $G(y) = F(x) + C$  é expressa a partir de um ponto  $(X_0, Y_0)$  que a satisfaça e garanta a existência do intervalo aberto  $(\alpha, \beta)$  contendo  $X_0$  e uma função de classe  $C^1$ ,  $y: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ , e que também satisfaz a relação, sendo esta uma solução da mesma. Isto pode ser visto pelo Teorema das Funções Implícitas, dada uma sequência de pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  os quais são escritos na forma  $(x, y)$ , tal que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , com  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , havendo uma equação  $f(x, y) = c$  que define implicitamente  $y$  como função de  $x$ .

## 2.2 Teorema das Funções Implícitas

**Teorema 1.** Dada a função  $U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$ . Seja  $(x_0, y_0) \in U$  tal que  $f(x_0, y_0) = c$  e:

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0 \quad (6)$$

Seja uma bola definida em  $B = (x_0, \delta)$  e um intervalo determinado por:  $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ , os quais seguem as propriedades de:

1)  $B \times J \subset U$  e

$$\frac{df}{dy}(x, y) \neq 0 \quad (7)$$

$\forall (x, y) \in B \times J$

2) Para todo  $x \in B$ , existe um único  $y = \alpha(x) \in J$  tal que  $f(x, y) = (x, \alpha(x)) = c$ .

A função  $\alpha: B \rightarrow J$ , assim definida é de classe  $C^k$  e suas derivadas parciais, em cada ponto  $x \in B$ , podem ser definidas como:

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \alpha(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x))} \quad (8)$$

### 3 Teorema da Existência e Unicidade

**Teorema 2.** Dado  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , função contínua definida num intervalo aberto  $\Omega$  no plano  $(x, y)$ . Suponha que a derivada parcial em relação a segunda variável,  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Então, para cada  $(X_0, Y_0)$ ,  $x \in \Omega$ , existem um intervalo aberto  $I$  contendo  $X_0$  e uma única função diferenciável  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(x, \Phi(x))$ ,  $x \in \Omega$ , para todo  $x \in I$ , que é solução do problema de valor inicial, com:

$$y' = f(x, y) \quad (9)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (10)$$

**Lema 1.** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua do intervalo aberto  $\Omega$  do plano  $(x, y)$ . Então, uma função diferenciável  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução do PVI se e somente se for uma solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in I \quad (11)$$

Dado  $(x_0, y_0) \in \Phi$ , deve-se tomar  $a$  e  $b$  positivos, em que:  $B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$  esteja contido em  $\Omega$ . Como  $f$  é contínua e  $B$  é compacto, ou seja,  $f$  é limitado em  $B$ . Seja  $C$  o conjunto de todas as funções contínuas  $g : J_a \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $g(X_0) = Y_0$  e  $|g(x) - Y_0| \leq b$ .

O espaço métrico pode ser definido como um conjunto de pares  $(M, d)$ , em que  $M$  são os conjuntos das métricas e  $d$  correspondem as distâncias das mesmas entre funções que compõem o conjunto  $M$  e, estas por sua vez podem conter elementos de quaisquer formas, seja como números e vetores ou até mesmo como aplicações das funções definidas em  $M$ . A partir destes elementos, consideram-se os pontos fixos de Banch, que auxiliam na compreensão do Teorema 2.

**Teorema 3 (Teorema de Banach).** Seja  $C$  um espaço métrico completo. Suponha que  $\phi : C \rightarrow C$  é uma contração, isto é, existe uma constante  $0 \leq K < 1$ , tal que

$$d(\phi(g_1), \phi(g_2)) \leq Kd(g_1, g_2), \forall g_1, g_2 \in C \quad (12)$$

**Demonstração 1.** Supondo que  $K: X \rightarrow X$  é uma contração, tal que  $K$  tem único ponto fixo, pode-se afirmar que a partir de  $x_0 \in X$ , tem-se uma sequência  $X_n$  por:

$$x_1 = k(x_0), x_2 = k(x_1), k^2(x_0), \dots, x_n = k(x_{n-1}) = k^n(x_0). \quad (13)$$

Pode-se afirmar que esta é uma sequência de Cauchy e, como  $\rho(x_0, x_1) = \sigma$ , então:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(K, x_1), (K, x_0) \leq C\rho(x_1, x_0) = C\sigma \quad (14)$$

Por indução, verifica-se que  $\rho(x_n, x_{n-1}) \leq C^n\sigma$  e, a partir disso:  $C^n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  resulta em  $\rho(x_1, x_{n-1}) \rightarrow 0$ , com  $C^n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  resulta em  $\rho(x_1, x_{n-1}) \rightarrow 0$ .

Como  $X$  é completo, tem-se que  $X_n$  converge para algum  $a \in X$ , o que pode ser visto a partir da continuidade de  $K$ , tal que:  $K(a) = \lim K(X_n) = \lim X_{n+1} = a$ . Assim,  $a$  é ponto fixo.

Quanto à unicidade, pode-se verificar que, dados  $x$  e  $y \in X$ , tem-se que  $K(x) = x$  e  $K(y) = y$ . Então:

$$\rho(x, y) = \rho(K(x), K(y)) \leq C\rho(x, y) \rightarrow (1 - C)\rho(x, y) \leq 0 \quad (15)$$

Como  $(1 - C) > 0$  e  $\rho(x, y) \geq 0$ . Logo,  $\rho(x, y) = 0$ , o que resulta em  $x = y$ .  $\square$

No intuito de se aplicar (12) ao problema, deve-se verificar se  $\phi$  é uma contração, o que se pode verificar a partir da relação

$$|\phi(g_1)(x) - \phi(g_2)(x)| = \left| \int_{X_0}^X [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right| \quad (16)$$

A fim de se estimar o integrando no segundo membro de (14), será utilizado o lema a seguir.

**Lema 2.** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida num intervalo aberto  $\Omega$  do plano  $(x, y)$  e a derivada parcial  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja também contínua. Como a função é lipschitziana, com a constante  $K > 0$  tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K(y_1, y_2), \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \quad (17)$$

**Demonstração 2.** Seja  $\Omega$  a fronteira representada por  $\Omega = \{(x, y) \in \Omega : \text{dist}((x, y), \alpha) < a\}$ . Com isso, devem ser analisados ambos os casos em que o intervalo é satisfeito.

No caso de  $|y_1 - y_2| < a$  e, este contém o segmento  $\overline{y_1 y_2}$  contido em  $K$ , pode-se verificar pelo Teorema do Valor Médio, que existe um  $\sigma$  no segmento, e que é representado por:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \sigma)(y_1 - y_2) \quad (18)$$

em que se verifica que  $\sigma$  está no segmento em (18) e  $y_1 > y_2$ . De forma análoga, pode-se afirmar que:

$$M = \max |f_y(x, y)| : (x, y) \in K$$

E, dessa forma, pelo TVM, conclui-se que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2| \quad (19)$$

Caso seja considerado que  $|y_1 - y_2| \geq a$ , pode-se afirmar que:

$$M_2 = \max |f(x, y)| : (x, y) \in K$$

Assim, pode-se concluir que a relação abaixo é satisfeita:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f(x, y_1)| + |f(x, y_2)| \leq 2M_2 \leq 2M_2 |y_1 - y_2| / a$$

Com isso, pode-se verificar que  $K = \max\{M_1, 2M_2/a\}$

Dessa forma, como observado em (11) e pelo Lema 2, conclui-se que:

$$|\phi(g_1)(x) - \phi(g_2)(x)| \leq K \int_{X_0}^X |g_1(s) - g_2(s)| ds \leq K \bar{a} d(g_1, g_2) \quad (20)$$

Com isso:

$$d(\phi(g_1), \phi(g_2)) \leq K \bar{a} d(g_1, g_2). \quad (21)$$

Logo,  $\phi$  é contração se  $K \bar{a} < 1$ , tomando como base que  $\bar{a} < \frac{1}{K}$  e o intervalo é:  $I = (X_0 - \bar{a}, X_0 + \bar{a})$ .  $\square$

**Lema 3.** Seja  $\gamma[a, b]$  o espaço métrico das funções contínuas definidas no intervalo fechado  $[a, b]$ , definidas pela métrica:  $d(f_1, f_2) = \max |f_1(x) - f_2(x)|, x \in [a, b]$  Então,  $\gamma[a, b]$  é um espaço métrico completo.

**Demonstração 3.** Seja  $X_n$  uma sequência de Cauchy para o espaço métrico. Então:

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow \max |f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty \quad (22)$$

Em particular, dado um ponto  $X_0$  arbitrário em  $[a, b]$ , tem-se que:  $\max |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \rightarrow 0$

Logo,  $f_n(X_0)$  também é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e, como  $\mathbb{R}$  é completo, tem-se que tal sequência converge para  $f(X_0)$ . Como  $X_0$  é arbitrário, a mesma convergirá pontualmente para uma função  $f$ , convergindo de forma uniforme.

Dado  $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; |f_m(x) - f_n(x)| = \frac{\epsilon}{2}$  para  $m, n > N$  e para  $x \in [a, b]$ .

Com isso, para  $m \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$f_n - \frac{\epsilon}{2} < f_m < f_n + \frac{\epsilon}{2}$$

$$f_n - \frac{\epsilon}{2} \leq f \leq f_n + \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \forall x \in [a, b] \quad (23)$$

Contudo, precisa-se verificar que  $f$  pertence a  $\gamma[a, b]$  e, levando-se em conta que  $f_n$  é uma função contínua e a partir disso, pode-se obter que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x) - f(x)|$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .  $\square$

**Lema 4.** (Lema de Gronwall) Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  funções contínuas definidas em um intervalo  $(a, b)$  tais que  $\beta \geq 0$  e

$$\gamma(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\gamma(s)ds. \quad (24)$$

Então

$$\gamma(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du} ds \quad (25)$$

Em particular se  $\alpha(x) \equiv K = \text{constante}$ , temos

$$\sigma(x) \leq Ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds} \quad (26)$$

**Demonstração 4.** Seja  $\omega(x) = \int_{x_0}^x \beta(s)\sigma(s)ds$  Então  $\omega'(x) = \beta(x)\sigma(x)$ . E daí, considerando  $\beta \geq 0$  por (24),

$$\omega'(x) \leq \beta(x)\alpha(x) + \beta(x)\omega(x)$$

$$\omega'(x) - \beta(x)\omega(x) \leq \beta(x)\alpha(x)$$

Ao se multiplicarem ambos os lados por  $e^{-B(x)}$ , onde  $B'(x) = \beta(x)$ , pode-se obter

$$[\omega(x)e^{-B(x)}]' \leq \beta(x)\alpha(x)e^{-B(x)}$$

onde  $B'(x) = \beta(x)$ . Daí se segue

$$\omega(x)e^{-B(x)} \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{-B(s)} ds,$$

$$\omega(x) \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_{x_0}^s \beta(u)du} ds$$

e finalmente

$$\sigma(x) \leq \alpha(x) + e^{B(x)} \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{-B(s)} ds$$

o que implica (25). A verificação de (26) torna-se imediata utilizando e, considerando-se  $\alpha(x) \equiv K$ , percebe-se que

$$\beta(s)e^{\int_s^x \beta(u)du} = \frac{-d}{ds}(e^{\int_s^x \beta(u)du})$$

Seja  $T(s) = e^{-\int_s^x \beta(u)du}$ , então

$$\sigma(x) \leq K + K \int_{x_0}^x \beta(s)e^{\int_s^x \beta(u)du} ds = K + K(T(x) - T(x_0))$$

$$\sigma(x) \leq K + K(-e^{\int_x^x \beta(u)du} - (-e^{\int_{x_0}^x \beta(u)du}))$$

Daí, com isso:

$$\sigma(x) \leq Ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds}$$

□

**Corolário 1.** Se  $f(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções contínuas em  $(a, b)$ , então as soluções de (3.5) estão definidas em todo o intervalo  $(a, b)$ .

**Teorema 4.** (Dependência Contínua) Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 3, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são soluções de (3.5) definidas em um intervalo compacto  $[x_0, x_1]$ , então existe  $K > 0$  tal que

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq |\psi_1(x_0) - \psi_2(x_0)|e^{K(x - x_0)}, \forall x \in [x_0, x_1]$$

**Demonstração 5.** Seja  $\omega_0 \subset \omega$  um aberto que contenha os gráficos de  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Como

$$\psi_1'(x) - \psi_2'(x) = f(x, \psi_1(x)) - f(x, \psi_2(x)),$$

segue por integração que

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) = \psi_1(x_0) - \psi_2(x_0) + \int_{x_0}^x [f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))] ds.$$

Pelo Lema 2, pode-se tomar  $K > 0$  tal que

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) \leq \psi_1(x_0) - \psi_2(x_0) + \int_{x_0}^x K|\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds.$$

□

**Corolário 2.** Seja  $\gamma_0(x)$  uma solução do Lema 4 definida em um intervalo compacto comum  $[x_0, x_1]$  e seja uma sequência de condições iniciais  $Y_n$  convergindo para  $Y_0 = \gamma_0(x_0)$ . Então as soluções  $\gamma_n$  correspondentes a

$$y' = f(x, y)y(x_0) = y_n \tag{27}$$

também estão definidas no intervalo  $[y_0, y_1]$  para  $n$  grande, e  $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$  uniformemente neste intervalo.



**Demonstração 6.** Por hipótese, tem-se que, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n \geq N$ , então

$$|Y_n - Y_0| < \epsilon$$

Considere  $\omega_0$  uma vizinhança de  $\gamma_0$  entre  $[x_0, x_1]$  com amplitude  $\gamma$ . Escolhendo-se

$$\epsilon = \frac{\lambda}{e^k(x_1 - x_0)}$$

Então,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > N$ , tem-se

$$|\gamma_n - \gamma_0| < \frac{\lambda}{e^k(x_1 - x_0)}$$

$$|\gamma_n - \gamma_0|e^k(x_1 - x_0) < \lambda$$

E, pelo teorema 4, pode-se concluir que

$$|\gamma_n - \gamma_0| < \lambda \forall x \in [x_0, x_1].$$

Portanto, por definição, tem-se que  $Y_n \rightarrow Y_0$  uniformemente.  $\square$

## 4 Equações diferenciais de segunda ordem

**Definição 2.** Sejam  $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas num intervalo aberto  $(a, b)$ , o qual corresponde a semireta  $t < 0$  ou toda a reta  $-\infty < t < \infty$ . Considerando a equação de segunda ordem:

$$\frac{dx}{dt} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x(t) = f(t) \quad (28)$$

Deve-se estudar a solução geral e a solução do problemas de valor inicial de (28), dados:

$$x(t_0) = x_0 \quad (29)$$

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0 \quad (30)$$

**Teorema 5.** Se  $p, q$  e  $f$  são funções contínuas em  $(a, b)$ , então o problema de valor inicial (28)-(30) tem uma, e somente uma solução definida em todo o intervalo  $(a, b)$ .

**Demonstração 7.** Deve-se passar a equação para um sistema de introdução de variáveis:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx}{dt}$$

A partir disso, é possível obter o sistema e a respectiva condição inicial:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -qx_1 - px_2 + f \\ x_1(0) &= x_0 \\ x_2(0) &= v_0. \end{aligned}$$

$\square$

Pela equação homogênea, pode-se verificar os problemas de valor inicial, em que cada um dos conjuntos de dados iniciais tem uma única solução, dado que  $t_0 \in (a, b)$ .

$$\frac{dx}{dt} + p \frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (31)$$

$$x(t_0) = 1 \quad (32)$$

$$x(t_0) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{dx}{t_0} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{dx}{t_0} = 1. \quad (35)$$

A equação acima admite  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como solução do PVI em (31). Seja  $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a solução do PVI em (33-35) e  $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a solução do PVI em (31-35). Isso é representado por qualquer função na forma:

$$\phi(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t). \quad (36)$$

Em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são as constantes arbitrárias e uma solução da equação diferencial, o que precisa a linearidade da equação (31) a partir de uma combinação linear das soluções e, conseqüentemente, na sua solução, a qual é uma solução geral de (31).

**Definição 3.** Duas funções  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são linearmente dependentes se existe uma constante  $k$  tal que  $\phi_2(t) = k\phi_1(t) \forall t \in (a, b)$

**Definição 4.** Duas funções ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ) são linearmente independentes se a condição:

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) = 0, \forall t \in (a, b), \quad (37)$$

implicar que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

**Definição 5.** Dadas duas funções diferenciáveis  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . O seguinte determinante é chamado de Wronskiano das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} \quad (38)$$

As noções podem ser expressas para funções diferenciáveis e estão ligadas com o determinante Wronskiano.

**Lema 5.** Sejam  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis cujo Wronskiano é diferente de zero em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ . Então  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são linearmente independentes.

**Demonstração 8.** Supondo-se por absurdo que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sejam linearmente dependentes. Então, existem constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  em que uma destas é não-nula, dado que:

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) = 0, \forall t \in (a, b) \quad (39)$$

Pela derivação, e considerando que  $t = t_0$ , há o sistema cujo determinante é equivalente a  $W[\phi_1, \phi_2](t_0)$ , sendo este não-nulo por hipótese. Conseqüentemente,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , e isto se torna uma contradição. Entretanto, tal recíproca é válida para a classe de soluções da equação (31).  $\square$

**Teorema 6.** Sejam  $\phi_1$  e  $\phi_2$  soluções de (31). Então, elas são linearmente independentes se e somente se seu Wronskiano for não-nulo em um ponto  $t_0 \in (a, b)$ . Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto  $t_0$ , então ele é diferente de zero em todos os demais pontos de  $(a, b)$ .

**Demonstração 9.** Deve-se verificar que o Wronskiano é diferente de zero em todos os pontos de  $(a, b)$ . Fixando  $t_0 \in (a, b)$  e provando que  $W[\phi_1, \phi_2](t_0) \neq 0$ , tem-se que há uma solução  $(\alpha_1, \alpha_2)$  não trivial.

Se a função  $\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t)$  possui uma solução de (31) e, dado que  $\phi(t_0)=0$ , pelo Teorema 5, implica que  $\phi(t) = 0, \forall t \in (a, b)$ . Contudo, torna-se absurdo, pois  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são linearmente dependentes.  $\square$

## 4.1 Teorema de Abel-Liouville

**Teorema 7 (Teorema de Abel-Liouville).** Sejam  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas soluções de (31). Então:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \quad (40)$$

onde  $t_0 \in (a, b)$  e o wronskiano de  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  é uma solução de (31).

**Demonstração 10.** Deve-se derivar a expressão do Wronskiano de (31), em que:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$W(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)$$

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \phi_1'(t) + \phi_1(t) & \phi_2'(t) + \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) + \phi_1'(t) & \phi_2''(t) + \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \phi_1'(t)\phi_2'(t) + \phi_1\phi_2''(t) - \phi_1''\phi_2 - \phi_1'\phi_2'(t)$$

A partir disso, e levando-se em conta que  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  são soluções de (31), pode-se obter a relação:

$$W'(t) = -p(t)W(t) \quad (41)$$

$$W' + p(t)W = \phi_1(t)\phi_2''(t) - \phi_1''(t)\phi_2(t) + p(t)(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t))$$

$$W' + p(t)W = \phi_1(t)(\phi_2''(t) + p(t)\phi_2'(t)) - \phi_2(t)(\phi_1''(t) + p(t)\phi_1'(t)).$$

Retomando de acordo com (31), pode-se concluir que:

$$\phi_1''(t) + p(t)\phi_1'(t) + q(t)\phi_1(t) = 0$$

$$\phi_1''(t) + p(t)\phi_1'(t) = q(t)\phi_1(t)$$

$$\phi_2''(t) + p(t)\phi_2'(t) + q(t)\phi_2(t) = 0$$

$$\phi_2''(t) + p(t)\phi_2'(t) = -q(t)\phi_2(t).$$

Assim, por (41), verifica-se que:

$$W' + p(t)W = \phi_1(t)q(t)\phi_2(t) + \phi_2(t)q(t)\phi_1(t).$$

$\square$

**Corolário 3.** Dadas  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  soluções de (31) e  $W(t)$  o wronskiano destas, tem-se que se  $W(t_0)=0$  para algum  $t_0$ , então  $W(t)=0, \forall t \in (a, b)$ . Por (41), tem-se que  $W(t_0)=0$  satisfaz ao problema de valor inicial, o qual existe e tem solução única. Dessa forma,  $\forall t, W(t) = 0$ .

**Corolário 4.** As soluções  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  de (31) são linearmente independentes se e somente se  $\forall t, W(t) \neq 0$ .

## 4.2 Métodos de obtenção de soluções

### 4.2.1 Variação dos parâmetros

Supondo a equação não homogênea (31), deve-se verificar que qualquer combinação linear de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  também é uma solução de (31), sendo esta uma solução particular, representada por

$$x(t) = \alpha_1(t)\psi_1(t) + \alpha_2(t)\psi_2(t) \quad (42)$$

Seja um par  $\psi_1$  e  $\psi_2$  de soluções linearmente independentes, deve-se buscar funções para que se encontre uma solução de (31). Pela derivada em (42), pode-se obter uma relação para (31).

$$x(t) = \alpha_1(t)\psi_1(t) + \alpha_2(t)\psi_2(t), \quad (43)$$

$$x' = \alpha_1\psi_1' + \alpha_2\psi_2' + \alpha_1'\psi_1 + \alpha_2'\psi_2. \quad (44)$$

Supondo que a dependência foi suprimida, no intuito de simplificar a notação presente, tem-se, sem perda de generalidade, que:

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 = 0.$$

Logo:

$$x' = \alpha_1\psi_1' + \alpha_2\psi_2', \quad (45)$$

$$x'' = \alpha_1\psi_1'' + \alpha_2\psi_2'' + \alpha_1'\psi_1' + \alpha_2'\psi_2', \quad (46)$$

é uma solução de (42). Pela derivação de (42), é possível obter uma solução para  $x(t)$ , em que:

$$\alpha_1'\psi_1' + \alpha_2'\psi_2' = f$$

Para obter  $\alpha_1'$  e  $\alpha_2'$ , deve ser feita a relação:

$$\alpha_1' = -f\psi_2/W \quad \alpha_2' = f\psi_1/W \quad (47)$$

Tem-se que  $W$  é o Wronskiano de  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , o que é análogo para se obter  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

### 4.2.2 Equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Seja a equação, com  $p$  e  $q$  constantes

$$x'' + px' + qx = 0. \quad (48)$$

Tem-se que as soluções de (48) são definidas em toda a reta, em que estas são representadas na forma  $x(t) = e^{\lambda t}$ , dado que  $\lambda$  é tido como um parâmetro a determinar. Se  $x(t)$  for solução de (48), pode-se substituir na equação:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0,$$

e

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

sendo esta a equação característica de (48), representada pela forma  $e^{\lambda t}$  com funções correspondentes às suas soluções encontradas. Neste método, podem ser considerados três casos, os quais servem para encontrar soluções da equação, de acordo com o sinal do

discriminante presente. Assim, supondo sem perda de generalidade, que:  $p^2 - 4q$ , podem se verificar cada um destes. Se  $p^2 - 4q > 0$ , há duas raízes distintas:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

e

$$\lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}.$$

Tendo então, as soluções:  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  e  $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ , sendo ambas linearmente independentes. Se  $p^2 - 4q = 0$ , tem-se que  $\lambda = -\frac{p}{2}$  e há apenas uma solução:

$$x_1(t) = e^{-\frac{pt}{2}}. \quad (49)$$

Caso se queira encontrar uma nova solução, é usado o método de redução da ordem, para buscar outra solução na forma

$$x(t) = u(t)x_1(t)$$

e, esta pode ser substituída em (48), em que, supondo  $u' = v$ :

$$u[x_1'' + px_1' + qx_1] + u''x_1 + u'(px_1 + 2x_1') = 0$$

e

$$v' + (p + 2\frac{x_1'}{x_1})v = 0.$$

Diante de tal raciocínio, pode-se verificar que há uma solução em (49), e assim:

$$v' = 0 \longrightarrow v = c$$

e

$$u = ct + c'.$$

Então, qualquer função da forma  $(ct + c')x_1(t)$  é solução de (48), com  $c$  e  $c'$  constantes. Com isso, tem-se que:

$$x_2(t) = te^{-\frac{pt}{2}}.$$

Se  $p^2 - 4q < 0$ , há duas raízes complexas conjugadas, representadas por:

$$\lambda_1 = -u + iv,$$

$$\lambda_2 = -u - iv,$$

$$u = \frac{p}{2},$$

e

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}.$$

Assim, as soluções são:

$$x_1(t) = e^{-u}e^{ivt}$$

e

$$x_2(t) = e^{-u}e^{-ivt}.$$

Pela linearidade de (48), pode-se afirmar que:

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = e^{-ut}\cos vt$$

e

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2i}[x_1(t) - x_2(t)] = e^{-ut}\sen vt,$$

também são soluções de (48), em que  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sen\theta, \forall \theta \in R$ . O wronskiano é uma alternativa válida a se trabalhar em cada um dos casos citados, tendo em vista que, além de encontrar as soluções destes, também mostra que estes são linearmente independentes.

### 4.2.3 Redução da Ordem de uma EDO

Dada uma solução  $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  da equação diferencial

$$x'' + p(t)x + q(t)x = 0 \quad (50)$$

tem-se que  $p, q: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e há o objetivo de se encontrar uma segunda solução na forma:  $\phi_2(t) = u(t)\phi_1(t)$ , com  $u(t)$  sendo uma função a determinar. Pode-se supor, sem perda de generalidade que, ao trocar  $x$  por  $\phi_2$  em (50) e se  $v=u'$ , pode-se encontrar

$$v' + (p + 2\frac{\phi_1'}{\phi_1})v = 0. \quad (51)$$

Assim, há uma equação diferencial linear de primeira ordem, com  $\phi_1(t) \neq 0$ . Se  $\phi_1(t) = 0$ , deve-se verificar a equação por partes, resolvendo-se a partir de (51), pode-se obter:

$$v(t) = \frac{c}{\phi_1^2} e^{-P(t)}$$

com  $c$  constante,  $u'=v$  e  $P(t)$  uma primitiva de  $p(t)$ ,

$$u(t) = c \int \frac{1}{\phi_1(t)^2} e^{-P(t)} dt.$$

Assim, pode-se concluir que uma solução válida para esta é representada por

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{1}{\phi_1(t)^2} e^{-P(t)} dt. \quad (52)$$

### 4.2.4 Método dos coeficientes a determinar

É utilizado para equações lineares com coeficientes constantes, no intuito de não determinar uma solução particular a partir do tipo da função  $f(t)$  e com seus respectivos coeficientes a ser determinados. Supondo  $p$  e  $q$  constantes, pode-se afirmar que:

$$x'' + px' + qx = f(t). \quad (53)$$

O método não envolve integrações, e busca determinar a solução particular de (53), a depender de qual seja o tipo da função  $f(t)$ , levando-se em conta os seus coeficientes  $b_j$  a serem determinados. Considere

$$f(t) = a_0 + a_1 + \dots + a_n t^n$$

e

$$X_p(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n.$$

O termo em  $X_p(t)$  pode ser expandido para as soluções particulares existentes, sendo estas apresentadas por

$$f_1(t) = x'' + px' + qx$$

e

$$f_2(t) = x'' + px' + qx.$$

Assim:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = x'' + px' + qx.$$

Com isso, em (53), podem ser encontradas os coeficientes das potências exponenciais, senos ou cossenos a partir dos sistemas algébricos utilizados e, posteriormente, determinando-se os coeficientes existentes. Dessa forma, pode-se supor, sem perda de generalidade:

$$f(t) = e^{t\alpha}$$

e

$$X_p(t) = be^{t\alpha}.$$

Assim,  $f(t)$  pode ser:

$$f(t) = \cos(t\beta),$$

ou então

$$f(t) = \text{sen}(t\beta)$$

e

$$X_p(t) = b_1 \cos(t\beta) + b_2 \text{sen}(t\beta)$$

Ao se expandir os termos, pode-se verificar que

$$f(t) = (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n)e^{t\alpha} \cos(t\beta)$$

ou

$$f(t) = (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n)e^{t\alpha} \text{sen}(t\beta)$$

e

$$X_p(t) = (b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n)e^{t\alpha} \cos(t\beta) + (c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n)e^{t\alpha} \text{sen}(t\beta).$$

Caso algum termo de  $X_p$  seja solução de (53), deve-se observar se há alguma solução particular desta e, se houver, a mesma deve assumir a forma  $t^2 X_p(t)$ .

#### 4.2.5 Equação de Euler-Cauchy

Dada a equação, com a e b constantes:

$$t^2 x'' + atx' + bx = f(t). \quad (54)$$

Tem-se que, a partir de (54), torna-se possível obter duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada:

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0. \quad (55)$$

Neste caso, há um método eficiente para tratar as soluções em (54) na forma  $x(t)=t^\lambda$ , sendo  $\lambda$  um parâmetro qualquer a determinar. Como em (54), pode-se encontrar:

$$t^2 \lambda(\lambda - 1)t^{\lambda-2} + at\lambda t^{\lambda-1} + bt^\lambda = 0.$$

Isso torna-se suficiente para obter a equação do segundo grau:

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0.$$

Segundo o sinal do discriminante  $\lambda$ , pode-se encontrar soluções possíveis para três casos diferentes. Se suas raízes forem reais e distintas, então:

$$(a - 1)^2 - 4b > 0,$$

$$\lambda_1 = -\frac{a-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}$$

e

$$\lambda_2 = -\frac{a-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}.$$

Assim,  $\phi_1(t) = t_1^\lambda$  e  $\phi_2(t) = t_2^\lambda$  são as duas soluções de (54). Se for satisfeita a condição:

$$(a-1)^2 - 4b = 0,$$

há apenas um valor de  $\lambda$  e conseqüentemente, uma única solução de (54), dada por:

$$\lambda = -\frac{a-1}{2}$$

e

$$\phi_1(t) = t^{\frac{(1-a)}{2}}.$$

Caso se queira obter uma segunda solução, pode ser usado o método de redução da ordem da equação, sendo este na forma:  $\phi_2 = u\phi_1$ , representado pela expressão em (52):

$$\phi_2(t) = t^{\frac{1-a}{2}} \int t^{a-1} t^{-a} dt = t^{\frac{1-a}{2}} \ln t.$$

Quando as raízes forem conjugadas, tem-se a equação na forma:

$$(a-1)^2 - 4b < 0.$$

Com as raízes complexas conjugadas na forma:

$$\lambda_1 = \mu + iv,$$

$$\lambda_2 = \mu - iv,$$

$$\mu = \frac{1-a}{2},$$

e

$$v = +\sqrt{b - \frac{a-1}{2}}.$$

Assim, após serem encontrados os valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \mu$  e  $v$ , pode-se encontrar que:  $\psi_1(t) = t^\mu t^{iv}$  e  $\psi_2(t) = t^\mu t^{-iv}$  são duas soluções LI de (54), contudo envolvendo apenas números reais, representadas por:  $\phi_1(t) = t^\mu \cos(v \ln t)$  e  $\phi_2(t) = t^\mu \sin(v \ln t)$ . No outro método, pode-se introduzir uma nova variável independente  $s$ , a partir da relação  $e^s = t$ , com a expressão:  $y(s) = x(e^s)$ . A partir de  $y(s)$ , podem ser obtidas as derivadas primeira e segunda, em que:

$$y(s) = x(e^s),$$

$$y'(s) = x'(e^s)e^s$$

e

$$y''(s) = x''(e^s)e^{2s} + x'(e^s)e^s.$$

Dessa forma, pode-se verificar a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes, representada por

$$y'' + (a-1)y' + by = 0. \tag{56}$$



### 4.2.6 Método das séries de potências

Sejam os coeficientes  $p(t)$  e  $q(t)$ , assim como  $f(t)$  são funções analíticas, pode-se afirmar pela equação

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (57)$$

As funções estão definidas no intervalo  $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ , junto às soluções de (57), estando todas definidas neste. O método de séries de potências é muito útil para obter soluções do tipo:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t - t_0)^n, \quad (58)$$

$$p_n = \frac{p^{(n)}(t_0)}{n!}. \quad (59)$$

O fato pode ser utilizado como uma expressão analógica para  $x(t)$ .

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t - t_0)^n. \quad (60)$$

Neste método, pode-se verificar que os coeficientes  $X_n$  em (60) são determinados de acordo com as séries de potências em (57) e seus respectivos coeficientes das potências de  $t$  devem ser igualados, a fim de se obter um sistema infinito de equações lineares algébricas para coeficientes  $X_n$ , o que pode ser obtido pela recursão em termos de  $X_0$  e  $X_1$ , com todas as soluções  $X_n \forall n \geq 2$ .

**Demonstração 11.** Ao se desenvolver a relação em (59), pode-se verificar que o termo geral da sequência será dado por:  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t - t_0)^n$ , com um expoente de números naturais junto à um número real fixo, na forma:  $n+r$ . Assim

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t - t_0)^n$$

isto é,

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t - t_0)^{n+r} = p_0(x - x_0)^r + p_1(x - x_1)^{r+1} + p_2(x - x_2)^{r+2}.$$

Destaca-se que a série de potências, se estiver centrada em zero, assume a forma:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2.$$

O raio de convergência  $R$  é convergente se  $|R - R_0| > 0$  e  $|R - R_0| < 0$ . Se  $R=0$ , a série converge apenas para  $X = X_0$  e se  $R=\infty$ , tem-se que a série converge para todo  $x$ . O conjunto de valores para os quais a série é convergente é o intervalo de convergência, representado por  $I=(X_0 - r, X_0 + r)$ .  $\square$

## 5 Aplicações

### 5.1 Modelos populacionais

#### 5.1.1 Modelo Malthusiano

Desenvolvido em 1798 por T.R.Malthus, teve como base a aplicação em populações e os meios de sobrevivência, segundo a ideia de que ambos cresciam em razão geométrica e aritmética, respectivamente. A população viria a ser controlada conforme a existência de epidemias ou adversidades as quais poderiam reduzi-la. Seu modelo é expresso por

$$p = p\lambda \quad (61)$$

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t - t_0)} \quad (62)$$

#### 5.1.2 Modelo de Verhulst

Desenvolvido em 1834 por Verhulst, serviu como modelo para se estudar a dinâmica de populações na Bélgica e França, levando-se em conta a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade, em que foi levada em conta o fato da existência de alguns mecanismos para que houvesse o controle do crescimento da população. Tal modelo é expresso por

$$p' = (a - bp)p \quad (63)$$

### 5.2 Equações autônomas

As equações expressas na forma

$$x' = f(x) \quad (64)$$

são chamadas de autônomas, onde a função  $f$  depende somente de  $x$  e não da variável correspondente. Em (62) e (63), há dois exemplos de modelos que utilizam as mesmas, tendo como base o fato de que, se  $x(t)$  é solução de (64), então  $y(t) = x(t+c)$ , com  $c$  constante e também solução de (64).

$$x' = f(x) \quad (65)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (66)$$

Supondo que há existência e unicidade para a solução do problema, pode-se afirmar que  $x(t)$  é solução de (66) se e somente se  $y = x(t + t_0)$  é solução de

$$x' = f(x) \quad (67)$$

$$x(0) = x_0 \quad (68)$$

Dessa forma, em equações autônomas, pode-se considerar apenas condições iniciais em que  $t_0 = 0$ .

**Definição 6.** Se  $\bar{x}$  é um zero de  $f$ , isto é,  $f(\bar{x}) = 0$ , então  $x(t) \equiv \bar{x}$  é solução de (64) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto  $\bar{x}$  é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade. Por exemplo,  $\bar{x}$  e  $\bar{x} = \frac{a}{b}$  são pontos de equilíbrio de (64).

**Definição 7.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é estável, se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\sigma > 0$ , tal que para  $|x_0 - \bar{x}| < \sigma$ , a solução do problema de valor inicial em (68) é tal que  $|x(t) - \bar{x}| < \epsilon \forall t \leq 0$ . Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é assintoticamente estável, se for estável e se existir  $\alpha > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$  quando  $|x_0 - \bar{x}| < \alpha$ . Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado de instável. Por exemplo,  $\bar{x} = \frac{a}{b}$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (64) e  $\bar{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio instável.

**Teorema 8.** Seja  $\bar{x}$  um ponto de equilíbrio de (64) com  $f$  de classe  $C^1$ . Então,  $f(\bar{x}) < 0$  implica que  $\bar{x}$  é assintoticamente estável e  $f'(\bar{x}) > 0$  implica que  $\bar{x}$  é instável.

**Demonstração 12.** Pela variação de  $x(t) - \bar{x}$ :

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \bar{x})^2 = 2(x(t) - \bar{x})x' = 2(x(t) - \bar{x})f(x(t))$$

o que se torna equivalente, pelo Teorema do Valor Médio:

$$2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})] = 2(x(t) - \bar{x})^2 f'(\alpha(t))$$

com  $\alpha(t)$  sendo um valor entre  $x(t)$  e  $\bar{x}$ . Mas, se  $f'(\bar{x}) < 0$ , então, pela continuidade de  $f'$ , existem  $\beta > 0$  e  $\sigma > 0$  tais que  $f'(x) < \beta < 0$  para  $|x - \bar{x}| < \sigma$ . Logo, se para algum  $t_0$ , a solução  $x(t)$  de (64) é tal que  $|x(t_0) - \bar{x}| < \sigma$ , segue-se que  $\omega(t) = (x(t) - \bar{x})^2$  é decrescente para  $t \geq t_0$ . Além disso, temos

$$\frac{d}{dt}\omega(t) \leq -\alpha\omega(t), \forall t \geq t_0.$$

Dessa forma,  $\omega(t) \leq ce^{-t\alpha}$ , o que implica que  $x(t) \rightarrow \bar{x}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . O resultado é análogo para  $f'(\bar{x}) > 0$ .  $\square$

### 5.3 Mecânica Newtoniana

A contribuição de Isaac Newton para o campo da física esteve diretamente relacionada ao movimento dos corpos, buscando também trazer informações a respeito da trajetória de asteroides e surgimento das marés e, para isto, as equações diferenciais foram fundamentais para a explicação dos fenômenos naturais. Na primeira lei de Newton, tem-se a inércia, que trata sobre os corpos permanecerem em seu estado de movimento retilíneo, ou de repouso, exceto se houver a ação de forças que possam deslocá-lo. Na segunda lei de Newton, há uma relação mais direta a respeito do uso de equações diferenciais como uma aplicação, na qual a mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

**Exemplo 2.** Supondo um corpo de massa  $m$  em queda livre e, a partir desta, busca-se encontrar as forças que nele atuam. Dessa forma, vemos que as forças peso e normal, as quais atuam em sentidos opostos, com isso:

$$\begin{aligned} ma &= F_r \\ ma &= \sum F \\ ma &= mg - kv \\ m \frac{dv}{dt} &= mg - kv \\ m \frac{dv}{dt} + kv &= mg \\ \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v &= g \end{aligned}$$

Assim, com a mudança de variáveis, pode-se encontrar uma equação diferencial linear de primeira ordem, expressa na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Logo, pelo cálculo do fator integrante, tem-se:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int \frac{k}{m} dt} \\ \mu(t) &= e^{\frac{kt}{m}} \\ e^{\frac{kt}{m}} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{kt}{m}} \frac{k}{m} v &= e^{\frac{kt}{m}} g \\ \frac{d}{dt} (e^{\frac{kt}{m}} v) &= e^{\frac{kt}{m}} g \\ e^{\frac{kt}{m}} v &= \int e^{\frac{kt}{m}} g dt \\ e^{\frac{kt}{m}} v &= g \frac{1}{k} m e^{\frac{kt}{m}} + C \\ e^{\frac{kt}{m}} v &= g \frac{m}{k} e^{\frac{kt}{m}} + C \\ v &= g \frac{m}{k} e^{\frac{kt}{m}} e^{-\frac{kt}{m}} + C \\ v &= g \frac{m}{k} + C e^{-\frac{kt}{m}}\end{aligned}$$

Na terceira lei de Newton, tem-se que ao se aplicar uma força num corpo, o mesmo também aplica outra força, ou seja, a ação e reação, respectivamente, ambas com mesmo módulo e direção, e sentidos opostos. Além disso, pode-se destacar a respeito da lei do resfriamento de Newton, que trata sobre a variação de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente, considerando se a temperatura  $T$  for a mesma em todo o corpo e depender apenas do tempo  $t$ , ou se é constante com o tempo, e permanece a mesma em todo o meio ambiente. O fluxo de calor através das paredes do corpo é proporcional a diferença entre as temperaturas do meio ambiente, expresso por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (69)$$

onde  $k$  é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo em questão e, levando-se em conta de que o calor flui da fonte quente para fonte fria, por isso  $T > T_a$ , logo há a tendência de que  $T$  decresça. Caso contrário, se  $T < T_a$ , então  $\frac{dT}{dt}$  cresce e o corpo está se aquecendo. O estudo foi realizado por Newton a partir do estudo segundo uma bola de metal aquecida.

## 5.4 Campos vetoriais

**Definição 8.** Um campo vetorial  $F$  é uma aplicação  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um aberto  $\Omega$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  nele próprio. Geometricamente, pode-se imaginar que a cada ponto  $(x,y,z)$  de  $\Omega$  está ligado um vetor  $F(x,y,z)$ .

Um campo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamado campo gradiente se existir uma função diferenciável  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $gradV = F$ . O campo escalar  $V$  é chamado um potencial do campo  $F$ , e diz-se também que  $F$  deriva de um potencial.

**Corolário 5.** Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo gradiente contínuo em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  cujo potencial é  $V$ . Seja  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$  um caminho diferenciável em  $\Omega$ . Então, a integral de linha de  $F$  ao longo do caminho  $\alpha$  depende apenas dos pontos inicial e final de  $\alpha$ :

$$\int_{\alpha} F = V(x(b), y(b), z(b)) - V(x(a), y(a), z(a)). \quad (70)$$

**Corolário 6.** Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo gradiente contínuo em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  então

$$\int_{\alpha} F = 0$$

para qualquer caminho fechado  $\alpha$  em  $\Omega$ .

**Definição 9.** Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexo se qualquer função contínua  $\gamma$  definida no círculo unitário

$$\gamma : \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \Omega,$$

pode ser estendida continuamente ao disco, isto é, existe  $\gamma'$  contínua

$$\gamma' : \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \Omega,$$

tal que  $\gamma'(x, y) = \gamma(x, y)$  se  $x^2 + y^2 = 1$ .

## 5.5 Leis de Kepler

O astrônomo alemão Johannes Kepler estudou os movimentos das órbitas planetárias, trazendo forte contribuição à mecânica celeste, bem como por introduzir um conceito o qual rompeu com a ideia anteriormente proposta pelo grego Aristóteles, de que a Terra movia-se em órbitas circulares. A partir de seus estudos, divulgados em um artigo, Kepler trouxe como contribuições diversas dos conceitos que serviram de base para os estudos futuros, bem como elencou de forma detalhada como ocorreu tal processo, sendo estas as leis de Kepler:

- Primeira lei de Kepler: A observação de que os planetas moviam-se em órbitas elípticas em torno do Sol, que estava num dos focos;
- Segunda lei de Kepler: O raio vetor  $\vec{r}$  que liga planetas ao Sol descreve áreas em intervalos de tempos iguais;
- Terceira lei de Kepler: Os quadrados dos períodos de revolução são proporcionais aos cubos das distâncias médias do Sol, isto é,  $T^2 = ka^3$ , em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

As leis de Kepler, de base heliocêntrica, receberam críticas da época e chegaram a ser muitas vezes contestada por físicos da época, que durante anos não conseguiram verificar seu modelo, o qual considerava o vácuo como sendo o outro foco utilizado pelo estudo, que estava posicionado a determinada distância do Sol, o que trouxe diversas dúvidas de físicos da época, os quais contestavam sobre a veracidade do mesmo. Sua obra foi publicada em 1738 e, as demonstrações destas tinham base em fórmulas as quais foram realizadas a partir de demonstrações em equações diferenciais.

**Demonstração 13.** Na primeira lei de Kepler, a lei de Órbitas Elípticas, foi estabelecida a ideia de que o planeta é uma partícula e, teve como fundamento a fórmula da gravitação universal

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{r} \quad (71)$$

Com isso, dado que a massa do planeta é constante, e considerando-se a segunda lei de Newton, tem-se que:

$$m\vec{i} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{r}'' = -G \frac{M}{r^2} \vec{r}$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \vec{r}) - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -G \frac{M}{r^2} \vec{r}$$

Assim:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \vec{r}$$

$$mr^2\dot{\theta} = 0$$

Dessa forma, pode-se considerar a conservação do momento angular

$$mr^2\ddot{r} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = l$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{dX}{d\theta}$$

## 6 Referências

DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. Equações diferenciais aplicadas. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

HÖNIG, Claim S. Aplicações de Topologia à Análise. Instituto de Física e Matemática, 1961.

LIMA, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.

SOTOMAYOR, Jorge. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.