UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Milena Monique de Santana Gomes

Boa colocação e controlabilidade da equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso

Recife
2020

Milena Monique de Santana Gomes

Boa colocação e controlabilidade da equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso

Este trabalho foi apresentado à Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho.

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G633b Gomes, Milena Monique de Santana
Boa colocação e controlabilidade da equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso / Milena Monique de Santana Gomes. – 2020.
60 f.: il., fig.

Orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Equações. I. Capistrano Filho, Roberto de Almeida (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 126

MILENA MONIQUE DE SANTANA GOMES

BOA COLOCAÇÃO E CONTROLABILIDADE DA EQUAÇÃO DE KAWAHARA EM ESPAÇOS DE SOBOLEV COM PESO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovada em: 14 / 08 / 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Loayza Fidêncio (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Fernando Andres Gallego Restrepo (Examinador Externo)
Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

AGRADECIMENTOS

"A felicidade consiste em poder unir o princípio com o fim", é com esta frase emprestada de Pitágoras que expresso a felicidade e gratidão por ter concluído mais um ciclo. A concretização desse fato só foi possível por haver apoio de diversas pessoas queridas e presentes.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me guiar e ensinar a durante toda a minha vida.

Ao meu companheiro Tiago Amorim, por ter me incentivado, auxiliado e ter sido sempre presente nessa trajetória e muito paciente. Obrigada por tudo, essa conquista é nossa!

Ao Professor Adriano Regis, o grande incentivador, que desde a graduação acreditou em mim e sempre se propôs a me ajudar nesta caminhada da vida acadêmica.

Aos meus professores do mestrado, em especial, ao professor Airton Castro que me recebeu de braços abertos no departamento de matemática da UFPE, ele foi o responsável por plantar sempre esperança nas fases difíceis, assim como comemorar comigo os meus pequenos avanços como aluna recém ingressante no mestrado. Meu muito obrigada!

Agradeço a todos os meus professores do Doutorado, em especial a Miguel Loayza que sempre prezou pelo diálogo e incentivo.

Agradeço imensamente ao professor Roberto Capistrano, que aceitou ser meu orientador de tese de doutorado em um período conturbado e avançado no tempo, por ter se disponibilizado a ajudar em todas as circunstâncias. Sem a atuação ativa e persistente do professor Roberto, este trabalho, certamente, não seria possível. Obrigada por todos os ensinamentos!

Aos meus irmãos, Albert Einstein e Luana Maria, a pura existência deles fazem tudo isso ter sentido.

Aos incontáveis amigos e colegas que durantes todos esses anos dividiram comigo momentos de apoio, desesperos e realizações. Em especial, ao meu super amigo Lucas Calado, com quem dividi períodos árduos, mas também de muitas felicidades. Obrigada por tanto carinho e cuidado!

Agradeço aos membros da banca avaliadora, pela disponibilidade e contribuições.

Agradeço também ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Milena Monique de Santana Gomes

RESUMO

Neste trabalho, vamos considerar a equação de Kawahara, uma equação de quinta ordem do tipo Korteweg-de Vries, em um intervalo limitado. O primeiro resultado diz respeito à boa colocação em espaços L^2 com peso. Para demonstrarmos o resultado de boa colocação utilizaremos uma versão geral do Teorema de Lax-Milgram. Com este resultado em mãos, iremos provar dois resultados de controle. Primeiro, se a região de controle for uma vizinhança do ponto final será estabelecido um resultado controlabilidade exata em espaços L^2 com peso. Também mostraremos que a equação de Kawahara é controlável por regiões em espaços de Sobolev padrão, a chamada *controlabilidade regional*, isto é, a solução é exatamente controlada na parte esquerda do complemento da região de controle e controlável a zero na parte direita do complemento da região de controle. Por fim, com o desenvolvimento deste trabalho, algumas questões foram surgindo naturalmente que podem ser vistas como propostas de estudos no futuro, como controlabilidade da equação de Kawahara em domínio ilimitado, ou ainda em domínio limitado mas usando uma proposta diferente, como a de Faminskii.

Palavras-chave: equação de Kawahara; controlabilidade nula; controlabilidade exata; controlabilidade regional; teorema de Lax-Milgram; espaços de Sobolev com peso.

ABSTRACT

We will consider the Kawahara equation, a fifth order Korteweg-de Vries type equation, posed on a bounded interval. The first result is related about the well-posedness in a weighted L^2–space, which one we used a general version of the Lax–Milgram Theorem to show this result. With respect the control problem, we prove two results. First, if the control region is a neighborhood of the right endpoint, an exact controllability result in a weighted L^2–space is established. Second, we will show that the Kawahara equation is controllable by regions on L^2 Sobolev spaces, the so-called *regional controllability*, that is, the state function is exact controlled on the left part of the complement of the control region and null controlled on the right part of the complement of the control region. Finally, with the development of this work, some questions have arisen naturally that can be seen as proposals for future studies, such as controllability of the Kawahara equation in an unlimited domain, or even in a limited domain but using a different proposal, such as Faminskii's .

Keywords: Kawahara equation; null controllability; exact controllability; regional controllability; Lax-Milgram theorem; weighted Sobolev space.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho trataremos a boa colocação e controlabilidade da equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso. Contudo, inicialmente, abordaremos o contexto histórico da equação de Korteweg-de Vries (KdV), até chegarmos na origem da equação que aqui estudaremos. Por fim, faremos uma exposição simplificada da teoria de controle, evidenciando apenas resultados essenciais do trabalho.

1.1 Revisão histórica

Em 1834, John Scott Russell, um engenheiro naval escocês, estava observando o Canal da União, na Escócia, quando inesperadamente testemunhou um fenômeno físico muito especial que ele chamou de onda de translação [57]. Ele viu uma onda específica viajando por esse canal sem perder sua forma ou velocidade, e ficou tão fascinado por esse evento que concentrou sua atenção nesse tipo de fenômeno por vários anos e pediu à comunidade matemática que encontrasse um modelo matemático específico para descrevê-lo. Mais precisamente, suas palavras foram:

"Eu estava observando o movimento de um barco que foi rapidamente puxado ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou subitamente - não que a massa de água no canal foi posta em movimento; ela se acumulou ao redor da proa da embarcação em um estado de agitação violenta, e então repentinamente a deixou para trás, e avançou para frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma elevação solitária larga, um monte de água arredondado, suave e bem definido, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente, sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e a ultrapassei quando ela ainda se movia a uma velocidade de cerca de oito ou nove milhas por hora, preservando sua figura original com cerca de dezoito metros de comprimento e um pé a um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, após uma perseguição de uma ou duas milhas, perdi-a nos ventos do canal. Tal foi, no mês de agosto de 1834, a minha primeira chance de visualizar aquele fenômeno singular e belo que chamei de Onda de Translação... "

Russell ficou fascinado com sua descoberta, a ponto de não apenas construir tanques de ondas d'água em sua casa, mas também fazer pesquisas práticas e teóricas sobre esses tipos de ondas. Seus experimentos, conhecidos como *"The wave line system of hull construction"*, consistiam em elevar uma área do fluido atrás de um obstáculo e depois removê-lo para que uma longa onda, em forma de pilha, se propagasse pelo canal. Seus estudos revolucionaram a arquitetura naval no século XIX, e ele recebeu a medalha de ouro da Sociedade Real de Edimburgo por seu trabalho em 1837. Os experimentos de Russell contradiziam conjecturas físicas importantes como a teoria das ondas de água de G. B. Airy [2], na qual a onda viajante não poderia existir porque ela eventualmente modificava sua velocidade e forma, a Teoria de G. G. Stokes [61], onde ondas de amplitude finita e de forma fixa eram possíveis, mas apenas em águas profundas e em forma periódica. No entanto, Stokes estava ciente do estado inacabado da teoria de Russell:

"É a opinião do Sr. Russell que a onda solitária é um fenômeno sui generis. Seus experimentos parecem tornar esta conclusão provável. Caso esteja correto, o caráter analítico de uma onda solitária contínua pode vir a ser descoberto."

Consequentemente, para convencer a comunidade física, Scott Russell desafiou a comunidade matemática a provar teoricamente a existência do fenômeno que ele testemunhou:

"Tendo verificado que ninguém havia conseguido prever o fenômeno que me atrevi a chamar de onda da translação, (...) não era de se supor que, depois que sua existência fosse descoberta e seus fenômenos determinados, não seriam feitos esforços ... para mostrar como deveria ter sido previsto a partir das equações gerais conhecidas do movimento dos fluidos. Em outras palavras, agora caberá ao matemático prever a descoberta após a ocorrência, ou seja, dar uma demonstração a priori a posteriori."

Vários pesquisadores aceitaram o desafio de Russell. O primeiro a responder foi o francês Joseph Boussinesq [10], um físico-matemático que obteve resultados importantes em 1871. Em 1876, o físico inglês Lord Rayleigh obteve um resultado diferente [54], e em 1895 os matemáticos holandeses D. J. Korteweg e seu aluno G. de Vries deram o último resultado significativo do século XIX [42]. De fato, Boussinesq considerou um modelo de ondas longas, incompressíveis e sem rotação em um canal raso com seção transversal retangular, negligenciando o atrito ao longo da fronteira, e obteve a equação

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right), \tag{1.1}$$

onde (t, x) são as coordenadas de uma partícula fluida no momento t, h é a amplitude da onda, H é a altura da água em equilíbrio e g é a constante gravitacional.

Rayleigh considerou, independentemente, o mesmo fenômeno e acrescentou a hipótese da existência de uma onda estacionária desaparecendo no infinito. Ele considerou apenas dependência espacial e capturou o comportamento desejado na equação

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{3}{H^3}h^2\left(h - h_0\right) = 0, \tag{1.2}$$

com h_0 sendo a crista da onda e os outros parâmetros definidos como anteriormente. Esta equação tem uma solução explícita dada por

$$h\left(x\right) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}}x\right).$$

Em 1876, Rayleigh escreveu em seu artigo [54]:

"Ultimamente, tenho visto um livro de memórias de J. Boussinesq, Comptes Rendus, Vol. LXXII, no qual está contida uma teoria da onda solitária muito semelhante à deste artigo. Portanto, tanto quanto nossos resultados são comuns, o crédito de prioridade pertence, é claro, a J. Boussinesq."

Em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que relata uma modelagem matemática essencial sobre Ondas Solitárias observado por Russell. A forma original da equação principal do artigo é:

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx}\right)_x,$$

onde η é a elevação da superfície de líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propução linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade ρ, constante e positiva.

Podemos dizer que tais equações que descrevem os movimentos de ondas, são uma das mais familiares nas quais os efeitos dispersivos estão presentes. De modo simples, podemos dizer que a dispersão de uma onda é o fenômeno no qual a velocidade de onda depende da sua amplitude (ou na frequência, no caso de um envelope de ondas), veja [26] ou [45] para mais detalhes.

Com a importância da equação KdV detalhada anteriormente, vamos agora apresentar um outro sistema dispersivo muito interessante. O sistema dado por:

$$\left|\begin{array}{l} u_t + [(1+\alpha u)\, w]_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} = 0, \\ u_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2} w_{xxt} = 0, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

descreve a propagação unilateral das ondas dispersivas na superfície de um líquido e foi descoberto por Boussinesq. Sua dedução pode ser encontrada em [4] ou [6]. Fisicamente, as variáveis redimensionadas u e w estão relacionadas à amplitude e comprimento de onda, respectivamente. A fim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se algumas mudanças de variáveis em (1.3) e obteve-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com pequenas amplitudes, a saber

$$\left|\begin{array}{ll} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0 & \text{KdV}, \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0 & \text{BBM}. \end{array}\right.$$

A primeira das equações é a equação de Korteweg-de Vries (KdV) e a segunda é a BBM, em homenagem aos matemáticos Benjamim, Bona e Mahony, para detalhes veja [4], [6], [7] ou [9].

Para análise matemática, é conveniente modificar os termos α e β relacionados à amplitude máxima e comprimento de onda, respectivamente. Para isto, podemos fazer $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\beta = 6$. Assim, podemos reescrever as equações KdV e BBM como

$$\left| \begin{array}{ll} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{KdV}, \\ u_t + u_x + uu_x + u_{xxt} = 0 & \text{BBM}. \end{array} \right.$$

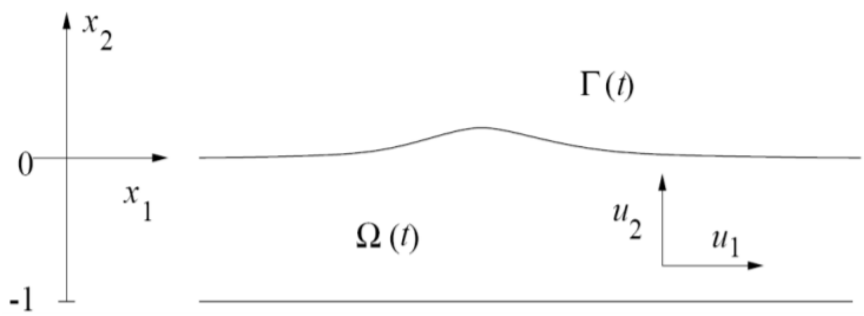
Existem vários artigos que estudam diversos aspectos dessas equações, dentre eles podemos destacar [7, 9, 24, 27, 39, 40, 44, 45, 52, 55, 56] e, mais recentemente, em [17], Coclite e di Ruvo provaram a boa colocação das soluções clássicas para o problema de Cauchy associadas a equação do tipo Kawahara–Korteweg–de Vries.

No que diz respeito as equações do tipo Kawahara–Korteweg–de Vries em 1972, Takuji Kawahara, em seu artigo [38] "Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media", generalizou a equação KdV, denominada equação de Kawahara ou equação KdV generalizada. Equações diferenciais dispersivas de quinta ordem descrevem a propagação de ondas de pequenas amplitudes em uma dimensão. Problemas relacionados a fluidos e física de plasmas são, em geral, formulações físicas que são representadas pela equação de Kawahara, que pode ser escrita como

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxxxx} = 0.$$

Tal equação difere da KdV por possuir um termo a mais, a derivada de quinta ordem. Uma, dentre muitas, das formulações da equação de Kawahara foi desenvolvida através do modelo que estuda ondas de gravidade capilar em um canal de comprimento longo e de fundo plano veja [37] e [58] (ver figura).

Figura 1 – O problema onda-água



Fonte: Capistrano Filho (2010)

Para tal estudo considera-se um fluxo irrotacional de um fluido viscoso incompressível em um canal "infinitamente" longo de profundidade fixa com fundo impermeável sob a influência da gravidade e tensão superficial.

O interesse de estudar problemas de valores iniciais e de contorno da equação de Kawahara foi iniciado em [21], [22], [39] e [45]. Contudo, é importante destacar que os métodos para estudo de tais problemas, nas equações de KdV e Kawahara, diferem-se entre si por pelo menos dois tipos de problemas: problemas colocados em um quarto do plano [8, 19, 28, 62] e problemas de valores iniciais e de fronteira sobre um intervalo finito [3, 5, 14, 15, 29, 43], que é o caso que atraí o interesse neste trabalho.

A partir de agora estaremos concentrados em estudar problemas de boa colocação e controle para equação de Kawahara. Provaremos que usando as técnicas desenvolvidas em [13], resultados de boa colocação e controle são verificados, ou seja, incorporando um termo forçante f na equação, a saber,

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = f, \quad t \in [0, T],\ x \in [0, L], \tag{1.4}$$

com condições de contorno apropriadas. Nosso principal objetivo é verificar se há soluções em espaços de Sobolev com peso, e se é possível forçar que as soluções de (1.4) tenham certas propriedades desejadas, escolhendo uma entrada de controle apropriada f. Vamos considerar o seguinte problema de controle:

Dado um estado inicial u_0 e um estado final u_1 em um determinado espaço, é possível encontrar uma função controle f tal que a equação (1.4) admita uma solução u satisfazendo $u(0, x) = u_0$ e $u(T, x) = u_1$?

1.2 Controlabilidade para EDPs: métodos utilizados

Estamos interessados em obter resultados de controlabilidade para sistemas governados por equações diferenciais parciais (EDPs) do tipo dispersiva (intuitivamente, uma EDP é dispersiva se suas soluções ondulatórias se espalham no espaço à medida que o tempo varia, quando nenhuma condição inicial de fronteira é imposta). Iremos neste trabalho estudar um dos principais problemas relacionados a teoria de controle: a controlabilidade interna.

Os vários conceitos de controlabilidade, que concordam em dimensão finita, mas não em geral para uma EDP, são introduzidos e depois caracterizados graças à abordagem clássica de dualidade (ver [23, 47]). Por exemplo, a controlabilidade exata de um sistema é equivalente à observabilidade do sistema adjunto. A prova aqui apresentada é baseada no Método da Unicidade de Hilbert (HUM) devido a Lions (ver, por exemplo [47–49]). Os testes de controlabilidade fornecidos aqui podem ser vistos como extensões naturais do critério de classificação de Kalman, como mostrado em [20].

Antes de abordar os problemas de controle, vamos apresentar algumas notações. Denote por $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ um operador diferencial, com $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ e

$$\mathcal{D} = (-i\partial_t, -i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_n}).$$

Por exemplo, se considerarmos $\mathcal{P} = -\tau^2 + |\xi|^2$ temos o operador onda $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \partial_t^2 - \Delta$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado (suficientemente suave), cuja fronteira $\partial\Omega$ é denotado por Γ.

1.2.1 Problema de controle interno

Seja $\omega \subset \Omega$ aberto, com fronteira suave Γ e condições de contorno $\mathcal{B}(\mathcal{D})\, z = 0$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})\, z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathcal{D})\, z = 0 & t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0, x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Aqui, $f = f(t,x)$ é o controle interno, $z = z(t,x)$ é a função desconhecida e $\mathcal{X}_\omega$ é função característica, tal que vale 1 se $x \in \omega$ e 0 se $x \notin \omega$. Para o problema de controle, dados z_0 e z_1 em algum espaço funcional H, buscamos um controle $f \in L^2(0,T;U)$ (U sendo outro espaço funcional) tal que a solução z do sistema (1.5) satisfaz $z(T,x) = z_1(x)$.

1.2.2 Conceitos de controlabilidade

Para certo $z_0 \in H$, $u \in L^2(0,T;U)$, A e B operadores lineares, consideramos a solução $z : [0,T] \to H$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Lembrando que para qualquer $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u \in W^{1,1}(0,T;U)$, o problema de Cauchy (1.6) admite uma única solução clássica $z \in C([0,T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0,T;H)$ dada pela fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t)\, z_0 + \int_0^t S(t-s)\, Bu(s)\, ds, \; \forall t \in [0,T],$$

onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador A. Para $z_0 \in H$ e $u \in L^1(0,T;U)$, a expressão acima define uma *solução suave* de (1.6), para mais detalhes veja [53].

Definição 1.2.1. *O sistema (1.6) é exatamente controlável no tempo T se para quaisquer $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução z de (1.6) satisfaça $z(T) = z_T$;*

Definição 1.2.2. *O sistema (1.6) é controlável a zero (ou nulamente controlável) no tempo T se para qualquer $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução z de (1.6) satisfaça $z(T) = 0$.*

Temos também o conceito de controlabilidade aproximada, que é formulado para os casos em que estar "próximo" de um determinado objetivo é aceitável, ou seja, queremos conduzir a função estado para as proximidades de um determinado dado no tempo final.

Definição 1.2.3. *O sistema (1.6) é aproximadamente controlável se para cada dado inicial z_0, para $\epsilon > 0$ e um dado final z_1, existe controle $u \in L^2(0,T;U)$ tal que $||z(T) - z_1|| < \epsilon$.*

Seja o operador $\mathcal{L}_T : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$ definido por

$$\mathcal{L}_T u = \int_0^T S(T-t)\,Bu(s)\,ds.$$

Então,

$$\text{controle exato no tempo } T \Leftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{L}_T = H; \tag{1.7}$$

$$\text{controle nulo no tempo } T \Leftrightarrow S(T)\,H \subset \operatorname{Im}\mathcal{L}_T. \tag{1.8}$$

1.2.3 Operadores adjuntos

Como mencionado anteriormente, problemas de controle exigem a prova de uma desigualdade de observabilidade para a solução do sistema adjunto, quando usado o método da unicidade de Hilbert (HUM). Portanto, a seguinte definição será necessária.

Definição 1.2.4. *O adjunto do operador limitado $B \in \mathcal{L}(U,H)$ é o operador $B^* \in \mathcal{L}(H,U)$ definido por $(B^*z, u)_U = (z, Bu)_H$ para todo $z \in H$ e $u \in U$. Denotamos o adjunto do operador (ilimitado) A pelo operador ilimitado A^* com domínio*

$$\mathcal{D}(A^*) := \{z \in H \mid \exists h \in H : (Ay, z) = (y, h)\ \forall y \in \mathcal{D}(A)\}$$

o vetor h é unicamente determinado por z, temos $h = A^*z$. Então

$$(Ay, z) = (y, A^*z)\,,\ \forall y \in \mathcal{D}(A)\,,\ \forall z \in \mathcal{D}(A^*)\,.$$

Portanto, A^* também gera um semigrupo contínuo $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ cumprindo $e^{tA^*} = S^*(t)$, $\forall t \geq 0$, para mais detalhes, veja [53]. Se $A^* = A$ (resp. $A^* = -A$) o operador A é chamado de auto-adjunto (resp. anti-adjunto).

1.2.4 Testes de controlabilidade

As provas dos resultados aqui citados são clássicas e podem ser encontradas, por exemplo, em [20,47,64,65]. Tais provas são baseadas no método *HUM- Hilbert Uniqueness Method*, devido a Lions [47]. Um primeiro resultado que garante a controlabilidade pode ser dado da seguinte maneira:

Teorema A: O sistema (1.6) é *exatamente controlável no tempo* $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)\,y_0\|_U^2\,dt \geq c\,\|y_0\|_H^2\,,\ \forall y_0 \in H. \tag{1.9}$$

A desigualdade (1.9) é chamada *desigualdade de observabilidade*. Tal desigualdade significa que a aplicação

$$\Upsilon : y_0 \longmapsto B^* S^* (\cdot)\, y_0,$$

é limitada e inversível, ou seja, temos a chamada *propriedade de observabilidade*, isto quer dizer que é possível recuperar completamente informações sobre o estado inicial y_0, sobre uma medida em $[0, T]$, na saída dos dados $B^* [S^* (t)\, y_0]$.

Um outro resultado relacionado a desigualdade de observabilidade, porém em um sentido mais fraco, é dado pela chamada *desigualdade de observabilidade fraca*, nos garantirá a controlabilidade nula do sistema (1.6) e pode ser formulado como segue.

Teorema B: O sistema (1.6) é *controlável a zero* ou *nulamente controlável* no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^* (t)\, y_0\|_U^2 \, dt \geq c \, \|S^* (T)\, y_0\|_H^2 \,, \; \forall y_0 \in H. \tag{1.10}$$

A desigualdade acima tem sentido fraco pelo fato de que a mesma nos diz que as informações de $S^\star(T)y_0$ podem ser recuperadas, não podendo recuperar informações sobre o estado inicial do sistema y_0

1.2.5 Método da unicidade de Hilbert

O método da unicidade de Hilbert (H.U.M), desenvolvido por J. L. Lions é uma ferramenta de grande importância para o estudo de controlabilidade de sistemas governados por EDPs. Se considerarmos um problema de valor inicial e de contorno

$$\Sigma \qquad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z\,(0) = z_0, \end{cases}$$

e o seu problema adjunto, obtido tomando a distribuição adjunta do operador $\partial_t - A$, isto é, $-\partial_t - A^*$:

$$\Sigma^* \qquad \begin{cases} \dot{y} = -A^* y, \\ y\,(T) = y_T. \end{cases}$$

Note que o problema Σ^* está sem controle e retrocede no tempo. Para algum $y_T \in H$, a solução y do problema Σ^* é dada por $y\,(t) = S^* (T - t)\, y_T$.

Podemos assumir a seguinte *identidade chave*:

$$(z\,(t)\,, y_T)_H = \int_0^T (u, B^* y)_U \, dt,$$

e garantir a equivalência entre desigualdade de observabilidade e controlabilidade do sistema Σ. Além disso, podemos concluir que:

1. A equação de evolução do *problema adjunto* $\dot{y} = -A^* y$ difere de um *operador adjunto* $\dot{y} = A^* y$ por um sinal de menos. Uma simples transformação $t \to T - t$ faz com que as soluções do operador sejam soluções de problema adjunto;

2. O método HUM prova que o operador $\Lambda : z_T \longmapsto u$ nos dar o controle;

3. Em geral, não precisamos explicitar B e B^*. Os elementos importantes para o método são: a *identidade chave* e a *desigualdade de observabilidade*.

1.3 Resultados obtidos

Afim de motivar a teoria apresentada neste trabalho, apresentaremos um breve resumo dos problemas aqui estudados. Tais resultados estão submetidos e podem ser encontrados na forma submetida em [12].

A equação estudada neste trabalho pode ser escrita da seguinte forma

$$u_t + u_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxxx} + uu_x = 0, \tag{1.11}$$

onde $u = u(t, x)$ é uma função com valor real de duas variáveis reais t e x, α e β são constantes reais. Considerando na equação (3.2), $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, T. Kawahara [38] introduziu uma equação diferencial parcial dispersiva que descreve a propagação unidimensional de ondas longas de pequena amplitude em vários problemas de dinâmica dos fluidos e física do plasma, a chamada equação de Kawahara, já citada nesta introdução.

Neste trabalho nos preocuparemos com as propriedades de boa colocação e de controle da equação de Kawahara, onde o controle age através de um termo f incorporado na equação:

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = f, \quad t \in [0, T], \ x \in [0, L], \tag{1.12}$$

com condições de contorno apropriadas. Nosso principal objetivo é verificar se existem soluções da equação (1.12) em espaços de Sobolev apropriados. Em caso afirmativo, estamos também interessados em estudar o seguinte problema clássico de controle, já mencionado anteriormente:

Dado um estado inicial u_0 e um estado final u_1, em um determinado espaço, é possível encontrar um controle apropriado f, tal que a equação (1.12) *admita uma solução u que seja igual a u_0 no tempo $t = 0$ e u_1 no tempo $t = T$?*

Sempre que for possível encontrar uma função controle f para guiar o sistema descrito por (1.12) de qualquer estado inicial u_0 para qualquer estado final u_1, diremos que o sistema é *exatamente controlável* . Se o sistema (1.12) puder ser acionado, por meio de um controle f, de qualquer estado para origem (ou seja, $u_1 \equiv 0$), então dizemos que o sistema é *nulo controlável*.

Do exposto acima, o objetivo deste trabalho é abordar a questão da controlabilidade para a equação de Kawahara em um domínio finito com controle distribuído. O principal problema que abordamos está relacionado com a controlabilidade interna do seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = f & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{1.13}$$

Assim, o primeiro resultado deste trabalho é o seguinte.

Teorema 1.3.1. *Sejam* $T > 0$ *e* $\omega = (l_1, l_2) = (L-\nu, L)$*, onde* $0 < \nu < L$*. Então existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $u_0, u_1 \in L^2_{(L-x)^{-1}dx}$ *com*

$$\|u_0\|_{L^2_{(L-x)^{-1}dx}} \leq \delta \quad e \quad \|u_1\|_{L^2_{(L-x)^{-1}dx}} \leq \delta,$$

pode-se encontrar um controle

$$f \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$$

com supp$(f) \subset (0,T)\times\omega$*, tal que a solução do sistema (1.13)*

$$u \in C^0([0,L];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$$

satisfaz

$$u(T,\cdot) = u_1 \ \text{ em } \ (0,L) \quad e \quad u \in C^0([0,T];L^2_{(L-x)^{-1}dx}).$$

Além disso,

$$f \in L^2_{(T-t)dt}(0,T;L^2(0,L)).$$

A seguir, daremos uma breve descrição de como o resultado é obtido, mas antes é importante explicitar que os espaços de Sobolev com peso, que definiremos mais adiante, são espaços que nos oferecem vários resultados de regularidades e nesse caso por terem pesos, contribuirão nas principais estimativas quando se está trabalhando com controle cujo suporte está próximo a fronteira. Resumidamente são espaços convenientes para o nosso trabalho. Dito isto, investigaremos a boa colocação do sistema linearizado associado a (1.13) no espaço $L^2_{(L-x)^{-1}dx}$ e a boa colocação do sistema adjunto no espaço dual $L^2_{(L-x)dx}$. A prova deste resultado é baseada em uma versão geral do Teorema de Lax-Milgram (veja [47]). Com isto em mãos, o resultado de controlabilidade se verifica se conseguirmos provar uma desigualdade de observabilidade associada ao sistema adjunto do sistema (1.13). Tal desigualdade é obtida por um argumento de unicidade-compacidade. Finalmente, o controle exato é estendido para o sistema não linear usando o Teorema do ponto fixo de Banach. Vale ressaltar que em meio aos processos de estimativas, serão essenciais as desigualdades de tipo Hardy apresentadas em [41].

Apresentaremos agora o segundo resultado desta tese, que chamamos de *"controlabilidade regional"*.

Teorema 1.3.2. *Sejam $T > 0$ e $\omega = (l_1, l_2)$, com $0 < l_1 < l_2 < L$. Escolha qualquer número $l_1' \in (l_1, l_2)$. Então, existe um número $\delta > 0$, tal que para todo $u_0, u_1 \in L^2(0,L)$ satisfazendo*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq \delta \quad e \quad \|u_1\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

pode-se encontrar um controle $f \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$ com $supp(f) \subset (0,T)\times\omega$, de modo que a solução do sistema (1.13)

$$u \in C^0([0,T];L^2(0,L) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$$

satisfaz

$$u(T,x) = \begin{cases} u_1(x) & se\ x \in (0,l_1'), \\ 0 & se\ x \in (l_2,L). \end{cases}$$

Em linhas gerais, usaremos como alicerce o resultado em [16, Theorem 1.1], juntamente, com um resultado de controlabilidade na fronteira obtido em [33]. Veremos mais a frente que a questão de u ser controlável no intervalo (l_1', l_2) está em aberto (e o motivo), ou seja, o que falta para darmos uma resposta completa sobre a controlabilidade interna da equação de Kawahara.

Quanto a organização do nosso trabalho, está dividido da seguinte maneira: o Capítulo 2 é voltado para notações e alguns resultados clássicos que necessitamos no desenvolver do texto. No Capítulo 3 faremos o estudo da boa colocação em espaços de Sobolev com peso. Nos Capítulos 4 e 5 mostraremos os principais resultados da tese, a saber, os Teoremas 1.3.1 e 1.3.2, respectivamente. Por fim, no Capítulo 6, fecharemos o trabalho expondo alguns problemas em aberto que irão servir para a continuidade da pesquisa em controle para equações diferenciais parciais do tipo dispersivas.

2 NOTAÇÕES E PRELIMINARES

Neste capítulo reuniremos notações, definições e resultados que usaremos no decorrer do trabalho.

2.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω.

Um exemplo clássico de uma função $C_0^\infty(\Omega)$ é o seguinte.

Exemplo 2.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\}$ compactamente contido em Ω. Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & se\ \ \|x\| < 1 \\ 0 & se\ \ \|x\| \geq 1 \end{array} \right.$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x. Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e supp$(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é, $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 2.1.1. *Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *Existe um compacto K de Ω tal que supp$(\varphi) \subset K$ e supp$(\varphi_n) \subset K$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,.*

(ii) *$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definidas pelos itens (i) e (ii) da definição 2.1.1, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O seguinte exemplo de distribuição desempenha um papel fundamental.

Exemplo 2.1.2. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver [51]). Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 2.1.2. *Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 2.1.3. *Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições, de ordem $|\alpha|$) é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2.1.1. *Decorre da Definição 2.1.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 2.1.2. *$D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, quando $n \to \infty$.*

Observação 2.1.3. *Vê-se em [50] que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m, sobre Ω, das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que

$D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, qualquer que seja $1 \leq p \leq \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \, |D^{\alpha}u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (para detalhes veja [50]).

Observação 2.1.4. *Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^{m}(\Omega)$, o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^{m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x) \, D^{\alpha}v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^{p}(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0, T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_{X}^{p}$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^{p}(0,T;X)} = \left(\int_{0}^{T} \|u(t)\|_{X}^{p} \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^{\infty}(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0, T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_{X}$ possui supremo essencial finito em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} ess \, \|u(t)\|_{X}.$$

Observação 2.1.5. *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^{2}(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u, v)_{L^{2}(0,T;X)} = \int_{0}^{T} (u(t), v(t))_{X} \, dt.$$

Então consideremos o espaço $L^{p}(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, faremos as seguintes identificações duais (veja com mais detalhe em [48])

$$[L^{p}(0, T; X)]' \approx L^{q}(0, T; X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^{1}(0, T; X)\right]' \approx L^{\infty}(0, T; X').$$

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de *Espaço das distribuições vetoriais sobre* $(0,T)$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.1.4. *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 2.1.3. *Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

é dita integral de Bochner em X. T é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j = 1, ..., m \right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| u^{(j)} \right\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

O espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 2.1.6. *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, o qual, munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho em $H^m(0,T;X)$ de $\mathcal{D}(0,T;X)$, e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

Daremos a seguir alguns resultados que serão utilizados no decorrer do texto.

Lema 2.1.1 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$.

(*ii*) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(*iii*) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Aqui o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Prova: veja [11].

Lema 2.1.2 (Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(*i*) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right[$.

(*ii*) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(*iii*) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Aqui o símbolo $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.

Prova: veja [11].

Teorema 2.1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *O conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca* $\sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.*

Prova: veja [11].

Lema 2.1.3 (Lema de Lions). *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ e g funções de $L^q(\mathcal{O})$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\|g_m\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C \quad e \quad g_m \to g \text{ q.s. em } \mathcal{O}.$$

Então $g_m \to g$ fracamente em $L^q(\mathcal{O})$.

Prova: veja [46].

Lema 2.1.4 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Prova: veja [50].

Definição 2.1.5. *Uma superfície $\phi(x) = \phi(x_0)$, onde $\phi \in C^0$ e $grad(\phi) \neq 0$, é dita ser característica em x_0 com relação ao operador diferencial P de ordem m se $P_m(grad\phi) = 0$ em x_0. Se podemos encontrar uma ψ tal que $P_m(grad(\phi + \varepsilon\psi))$ não é da ordem de ε^2 em x_0 quando $\varepsilon \to 0$, a superfície é dita ser de característica simples.*

Veja em [36], definição 1.8.5.

Teorema 2.1.2 (Teorema de Unicidade de Holmgren)**.** *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Seja u solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Suponha $u = 0$ em Q_2, onde Q_2 é um subconjunto aberto e não vazio de Q_1. Então $u = 0$ em Q_3, onde Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2 e tal que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_2.*

Prova: veja [36].

2.2 Teoremas auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados que serão determinantes nas demonstrações dos principais teoremas deste trabalho.

Definição 2.2.1. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma função $f : M \longrightarrow M$ é chamada de contração sobre M se existe um número real positivo $k < 1$, tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

para todo $x, y \in M$.

Teorema 2.2.1 (Teorema do ponto fixo de Banach)**.** *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.*

Prova: veja [11].

Teorema 2.2.2 (Lax-Milgram generalizado)**.** *Sejam $W \subset V \subset H$ três espaços de Hilbert imersos densamente e continuamente. Seja $a(v, w)$ uma forma bilinear definida em $V \times W$ que satisfaz*

i) (continuidade) Existe $M > 0$ tal que $|a(v, w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_W$, $\forall v \in V, w \in W$,

ii) (coercividade) Existe $m > 0$ tal que $a(w, w) \geq m\|w\|_V^2$, $\forall w \in W$.

Então para todo $f \in V'$ (espaço dual de V) existe $v \in V$ tal que

$$(v, w) = f(w), \quad \forall w \in W. \tag{2.1}$$

Se, além de i) e ii), $a(v, w)$ satisfaz

iii) (Regularidade) $\forall g \in H$, toda solução $v \in V$ de (2.1) com $f(w) := (g, w)$ pertence a W,

então (2.1) tem única solução $v \in W$.

Prova: veja [46].

Lema 2.2.1 (Aubin-Lions). *Sejam A, B e X espaços de Banach tais que $A \subset X \subset B$. Suponha que*

1. *A e B são reflexivos;*
2. *$A \hookrightarrow X$ compactamente;*
3. *$X \hookrightarrow B$ continuamente.*

Então, para quaisquer $1 < a, b < \infty$, a inclusão

$$W := \Big\{ v \,|\, v \in L^a(0,T;A), v' \in L^b(0,T;B) \Big\} \subset L^a(0,T;X)$$

é compacta.

Prova: veja [59].

2.3 Desigualdades importantes

Listaremos a seguir algumas desigualdades importantes utilizadas nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho.

2.3.1 Desigualdades de Hardy

Neste trabalho estudamos o problema de valor inicial para a equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso e, por ser uma equação de quinta ordem, surgiram dificuldades no processo da existência de soluções onde foram fundamentais as desigualdades apresentadas em [41], que a partir de agora as identificaremos como *desigualdades tipo Hardy*.

Primeiro introduziremos algumas notações. Sejam $I = (0, L)$, $L^p(I)$, com $p \in [1, \infty]$, e $H^k(I)$, $k \in [1, \infty)$ os espaços de Sobolev usuais. Seja ainda $H_0^k(I)$ o completamento de $C_0^\infty(I)$, munido da norma usual em H^k. Para um peso não negativo $\omega(x)$, definimos:

$$
\begin{aligned}
L^2_{\omega(x)} &= \left\{ u \in L^1_{loc}(I), \int_I u(x)^2 \omega(x) dx < \infty \right\}, &(2.2)\\
V(I) &= \left\{ u \in H_0^2(I) : u_{xx} \in L^2_{\omega'} \right\}, &(2.3)\\
W(I) &= \left\{ u(I), u_{xxx} \in L^2_{\frac{\omega^2}{\omega'}} \right\}. &(2.4)
\end{aligned}
$$

Com o objetivo de eliminar os termos de fronteira, escolhemos convenientemente, $\omega(x) = \frac{L+x}{L-x}$. Então, $\omega'(x) = \frac{2L}{(L-x)^2}$ e $\frac{\omega^2(x)}{\omega'(x)} = \frac{(L+x)^2}{2L}$. Além disso, denotaremos por $H(I)$ o espaço L^2_ω e denotamos o produto interno em H por $(\cdot,\cdot)_H$.

Lema 2.3.1. *Sejam V e W espaços de Hilbert com as seguintes normas, respectivamente, $||u_{xx}||_{L^2_{\omega'}}$, $||u_{xxx}||_{L^2_{\frac{\omega^2}{\omega'}}}$ e relação de imersão dada por*

$$C_0^\infty \hookrightarrow W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$$

contínuas e densas, então as seguintes desigualdade de Hardy são válidas:

$$\int_I \frac{u^2}{(L-x)^6}dx \leq \frac{4}{25}\int_I \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx, \quad \int_I \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx \leq \frac{4}{9}\int_I \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^2}dx \quad \forall u \in V, \quad (2.5)$$

$$r^2\int_I \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - (2r+3qr-q^2)\int_I \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx + (1-5q+20r)\int_I \frac{u^2}{(L-x)^6}dx \geq 0 \quad (2.6)$$

para todo número real r e q, e

$$\int_I \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^2}dx \leq \int_I u_{xxx}^2(L+x)^2dx, \quad \forall u \in W. \quad (2.7)$$

Prova: veja [35] e [41].

2.3.2 Outras desigualdades

Lema 2.3.2 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $z(t)$ uma função real contínua em $[0,a[$ tal que para todo $t \in [0,a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s)\,ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t$, $\forall\, t \in [0,a[$.

Prova: veja [18] ou [51].

Lema 2.3.3 (Desigualdade diferencial de Gronwall)**.** *Seja $u(t)$ uma função não negativa e diferenciável em $[0,T]$, satisfazendo*

$$u'(t) \leq f(t)\,u(t) + g(t),$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis em $[0,T]$. Então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)\,e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau}ds\right], \forall t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções não negativas, então a expressão torna-se

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)\,ds\right], \forall t \in [0,T].$$

Prova: veja [18] ou [25].

Lema 2.3.4 (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

para todo $u \in H\hat{\ }1_0(\Omega)$

Prova: veja [1] ou [11].

Lema 2.3.5 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: veja [11].

Lema 2.3.6 (Desigualdade de Young generalizada)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\epsilon > 0$ qualquer. Então,*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$. No caso particular que $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Prova: veja [11].

2.4 Teoria de semigrupo

Nesta seção vamos expor os principais resultados de semigrupo úteis ao trabalho. Para toda a teoria de semigrupo lineares as referências bases são [34, 53, 63]. Lembrando que $A : D(A) \longrightarrow X$ denotará um operador A com domínio $D(A) \subset X$ e contradomínio X e $R(A) \subset X$ conjunto imagem.

Definição 2.4.1 ([53], definition 1.1.1)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ é espaço dos operadores lineares de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

1. *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*
2. *$S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Diz-se que o semigrupo é de classe C^0 ou simplesmente fortemente contínuo se:

3. *$\lim\limits_{t \to 0^+} \| (S(t) - I)x \| = 0, \forall x \in X$.*

Proposição 2.4.1 ([53], theorem 1.2.4). *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

Definição 2.4.2 ([53], definition 1.1.1). *Dado um semigrupo $S(t)$. O operador $A : D(A) \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 2.4.2 ([53], corollary 1.2.5). *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 é um operador linear fechado e seu domínio é um espaço vetorial denso em X.*

Proposição 2.4.3 ([53], theorem 1.2.4). *Sejam S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A), \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 2.4.3 ([34], lemma 2.13). *Sejam S um semigrupo de classe C^0 e A seu gerador infinitesimal. Colocando $A_0 = I$, $A_1 = A$ e supondo que A_{k-1} esteja definido, vamos definir A_k por*

$$D(A_k) = \{x \in D(A_{k-1}) : A_{k-1}x \in D(A)\},$$

$$A_k x = A(A_{k-1}x), \forall x \in D(A_k).$$

Proposição 2.4.4 ([53], theorem 1.2.7). *Sejam S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal. Então*

1. *$D(A_k)$ é um subespaço de X e A_k é um operador linear de X;*
2. *Se $x \in D(A_k)$, então $S(t)x \in D(A_k)$, $t \geq 0$ e*

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A_k S(t)x = S(t)A_k x, \forall k \in \mathbb{N};$$

3. *$\bigcap_k D(A_k)$ é denso em X.*

Lema 2.4.1 ([34], lemma 11.3). *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in D(A_k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A_j x\|$$

temos que o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A_k)$, e $D(A_k)$ munido dessa norma é um espaço de Banach.

Definição 2.4.4 ([34], lemma 11.3)**.** *A norma definida no Lema anterior é chamada norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A_k)$ desta norma será representado por $[D(A_k)]$.*

Definição 2.4.5 ([34], section 4.1)**.** *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Sejam X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, além disso

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 2.4.6 ([34], definition 4.10)**.** *Diz-se que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 2.4.1 ([53], Hille-Yosida, theorem 1.3.1)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\| S(t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{wt}$$

com $M > 0$

2. *A é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de A contém (w, ∞) e*

$$\| (\lambda - A)^{-n} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - w)^{-n},$$

$\forall \lambda \geq w$ com $n = 1, 2, ...$

Teorema 2.4.2 ([53], Lumer-Phillips, theorem 1.4.3)**.** *Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C^0, então:*

1. *A é dissipativo;*

2. *$R(\lambda I - A) = X$, $\lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

1. *$D(A)$ é denso em X;*

2. *A é dissipativo;*

3. *$R(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C^0.

Corolário 2.4.1 ([53], corollary 1.4.4)**.** *Seja A um operador linear, fechado e densamente definido tal que o domínio $D(A)$ e a imagem $R(A)$ estão ambos num espaço de Banach X. Se A e seu operador dual A^* são ambos dissipativos, então A gera um semigrupo de contrações de classe C^0.*

Por fim, considere o seguinte problema semilinear de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt}u + Au(t) = f(t, u(t)), \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{array} \right. \tag{2.8}$$

onde A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$, de classe C^0, num espaço de Banach X e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em u. Com isto temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4.3 ([60], theorem 2.23)**.** *Seja $f : [t_0, T] \times X \to X$ contínua em $t \in [t_0, T]$ e uniformemente Lipschitz em X. Se $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$ de classe C^0, em X, então para todo $u_0 \in X$ o problema de valor inicial (2.8) possui uma única solução $u \in C([t_0, T]; X)$. Além disso, a função $u_0 \mapsto u$ é Lipschitz contínua de X em $C([t_0, T]; X)$.*

Corolário 2.4.2 ([60], theorem 2.23)**.** *Sejam S e f satisfazendo as condições do Teorema 2.4.3. Então para toda $g \in C([t_0, T]; X)$ a equação integral*

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, w(s))\, ds,$$

possui uma única solução $w \in C([t_0, T]; X)$.

Teorema 2.4.4 ([60], theorem 2.25)**.** *Seja $f : [t_0, \infty) \times X \to X$ contínua em t para $t \geq 0$, localmente Lipschitz em u e uniformemente contínua em t em intervalos limitados. Se $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$, de classe C^0, em X, então para todo $u_0 \in X$ existe $t_{\max} \leq \infty$ tal que o problema de valor inicial (2.8) possui uma única solução $u \in [0, t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < \infty$ então*

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

3 BOA COLOCAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os resultados de boa colocação da equação (3.2), isto é, garantiremos a existência e unicidade de solução, bem como dependência linear contínua dos dados iniciais da equação de Kawahara em espaços de Sobolev com peso.

Assim, para qualquer função mensurável $w : (0, L) \to (0, +\infty)$ (não necessariamente $L^1(0, L)$), introduziremos o espaço L^2- com peso

$$L^2_{w(x)dx} = \{u \in L^1_{loc}(0, L);\ \int_0^L u(x)^2 w(x)dx < \infty\}.$$

Espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2_{w(x)dx}} = \int_0^L u(x)v(x)w(x)dx.$$

Primeiro provaremos a boa colocação do sistema linear

$$\begin{cases} u_t + u_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxxx} = 0 & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_x(t, 0) = u_x(t, L) = u_{xx}(t, L) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } (0, L), \end{cases} \tag{3.1}$$

nos dois espaços L^2_{xdx} e $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$, onde α e β são constantes reais. Precisaremos do Teorema de Lax-Milgram generalizado 2.2.2. Na última seção trataremos do sistema não linear.

3.1 Sistema linear: boa colocação em ${L^2}_{xdx}$

Esta seção é dedicada à boa colocação do sistema 3.1 em L^2_{xdx}, por questão de simplicidade, vamos considerar o operador

$$A_1 u = -u_{xxxxx} - u_{xxx}.$$

Observação 3.1.1. *Lembre que a equação estudada neste trabalho pode ser escrita da seguinte forma*

$$u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = 0, \tag{3.2}$$

onde $u = u(t, x)$ é uma função com valor real de duas variáveis reais t e x.

Assim, para o operador A_1, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1. *Seja $A_1 u = -u_{xxxxx} - u_{xxx}$ com domínio*

$$D(A_1) = \{u \in H^4(0, L) \cap H^2_0(0, L); u_{xxxxx} \in L^2_{xdx}; u_{xx}(L) = 0\} \subset L^2_{xdx}.$$

Então o operador A_1 gera um semigrupo fortemente contínuo em L^2_{xdx}.

Demonstração. Sejam

$$H = L^2_{xdx}, \quad V = H^2_0(0,L), \quad W = \{w \in H^2_0(0,L),\, w_{xxx} \in L^2_{x^2dx}\},$$

com as seguintes normas

$$\|u\|_H := \|\sqrt{x}u\|_{L^2(0,L)}, \quad \|v\|_V := \|v_{xx}\|_{L^2(0,L)}, \quad \|w\|_W := \|xw_{xxx}\|_{L^2(0,L)}.$$

É imediato que $V \subset H$ é uma imersão contínua e densa. Por outro lado temos que

$$\|w_{xx}\|_{L^2} \leq c\|xw_{xxx}\|_{L^2} \quad \forall w \in W. \tag{3.3}$$

Com efeito, primeiro note que para $w \in \mathcal{T} := C^\infty([0,L]) \cap H^2_0(0,L)$ e $p \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^L (xw_{xxx} + pw_{xx})^2 dx \\ &= \int_0^L (x^2 w_{xxx}^2 + 2pxw_{xx}w_{xxx} + p^2 w_{xx}^2) dx \\ &= \int_0^L x^2 w_{xxx}^2 + (p^2 - p)\int_0^L w_{xx}^2 dx + pLw_{xx}^2(L). \end{aligned}$$

Fazendo $p = \dfrac{1}{2}$ resulta que

$$\int_0^L w_{xx}^2 dx \leq 4\int_0^L x^2 w_{xxx}^2 dx + 2L|w_{xx}(L)|^2. \tag{3.4}$$

A estimativa (3.4) é verdadeira para $w \in W$, visto que $\mathcal{T}$ é denso em W. Vamos agora provar (3.3) por contradição. Suponha que (3.3) não se verifique. Então, existe uma sequência $\{w^n\}_{n\geq 0}$ em W tal que

$$1 = \|w^n_{xx}\|_{L^2} \geq n\|xw^n_{xxx}\|_{L^2} \quad \forall n > 0.$$

Extraindo uma subsequência, podemos assumir que

$$\begin{gathered} w^n \rightharpoonup w \text{ em } H^2_0(0,L) \\ xw^n_{xxx} \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L) \end{gathered}$$

então $xw_{xxx} = 0$, seguindo que

$$w(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3,\ x \in (0,L]$$

Visto que $w \in H^2_0(0,L)$, inferimos que $w \equiv 0$. Como w^n é limitado em $H^3(L/2,L)$, extraindo uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $w^n_{xx}(L)$ converge em $\mathbb{R}$. Por (3.4) temos que w^n é uma sequência de Cauchy em $H^2_0(0,L)$. Daí

$$w^n \longrightarrow w \text{ em } H^2_0(0,L),$$

e portanto

$$\|w_{xx}\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|w^n_{xx}\|_{L^2} = 1.$$

Isto contradiz o fato de $w \equiv 0$. Assim, (3.3) se verifica. Portanto $\|\cdot\|_W$ é uma norma em W, que é claramente um espaço de Hilbert e $W \subset V$ sendo tal imersão contínua e densa.

Defina a seguinte forma bilinear em $V \times W$

$$a(v,w) = \int_0^L v_{xx}\left((xw)_{xxx} + (xw)_x\right)dx,$$

$v \in V$, $w \in W$.

Vamos checar que $a(v,w)$ satisfaz (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.2.2. Para $v \in V$ e $w \in W$, segue que

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| \leq & \|v_{xx}\|_{L^2}\|xw_{xxx} + 3w_{xx} + (xw)_x\|_{L^2}\\
\leq & \|v_{xx}\|_{L^2}(\|xw_{xxx}\|_{L^2} + C\|(xw)_x)\|_{L^2}\\
\leq & C\|v\|_V\|w\|_W.
\end{aligned}$$

Daí, temos $|a(v,w)| \leq c\|v\|_V\|w\|_W$, devido a desigualdade de Poincaré (2.3.4) e a estimativa (3.3). Isto prova que a forma bilinear é bem definida e contínua em $V \times W$ e, portanto, (i) está verificado.

Para (ii), primeiro escolhemos $w \in \mathcal{T}$ para obter

$$\begin{aligned}
a(w,w) &= \int_0^L w_{xx}(3w_{xx} + xw_{xxx})dx + \int_0^L w_{xx}(xw)_x dx\\
&= \frac{5}{2}\int_0^L w_{xx}^2 dx + \left[\frac{xw_{xx}^2}{2}\right]_0^L - \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2 dx\\
&\geq \frac{5}{2}\int_0^L w_{xx}^2 dx - \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2 dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré (2.3.4)

$$\int_0^L w_x^2(x)dx \leq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^L w_{xx}^2(x)dx,$$

e portanto

$$a(w,w) \geq \left(\frac{5}{2} - \frac{3L^2}{2\pi^2}\right)\int_0^L w_{xx}^2 dx.$$

Isso mostra a coercividade quando $L < \pi\sqrt{\frac{5}{3}}$. Quando $L \geq \pi\sqrt{\frac{5}{3}}$, devemos considerar, em vez de a, a forma bilinear $a_\lambda(v,w) := a(v,w) + \lambda(v,w)_H$ para $\lambda \gg 1$. De fato, pelas desiguadades de Cauchy-Schwarz e desigualdade tipo Hardy (2.5) , obtemos

$$\begin{aligned}
||w||_{L^2}^2 &\leq ||x^{\frac{1}{2}}w||_{L^2}||x^{-\frac{1}{2}}w||_{L^2}\\
&\leq \sqrt{L}||w||_H||x^{-1}w||_{L^2}\\
&\leq \varepsilon||w_{xx}||_{L^2}^2 + C_\varepsilon||w||_{L^2}^2
\end{aligned}$$

e, portanto, usando duas vezes a desigualdade de Poincaré (2.3.4), segue que

$$a_\lambda(w,w) \geq \left(\frac{5}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)||w||_V^2 + \left(\lambda - \frac{C_\varepsilon}{2}\right)||w||_V^2.$$

Assim, se $\varepsilon < 5$ e $\lambda > C_\varepsilon/2$, então a_λ é uma forma bilinear contínua e coerciva.

Para provar a regularidade, seja $g \in H$, vamos considerar $v \in V$ tal que

$$a_\lambda(v,w) = (g,w)_H \qquad \forall w \in W,$$

mais precisamente,

$$\int_0^L v_{xx}((xw)_{xxx} + (xw)_x)dx + \lambda \int_0^L v(x)w(x)xdx = \int_0^L g(x)w(x)xdx.$$

Tomando qualquer $w \in \mathcal{D}(0,L)$ temos

$$\langle x(-v_{xxxxx} - v_{xxx} + \lambda v), w\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle xg, w\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \qquad \forall w \in \mathcal{D}(0,L),$$

e portanto

$$-v_{xxxxx} - v_{xxx} + \lambda v = g \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,L). \tag{3.5}$$

Sejam $v \in H_0^2(0,L)$ e $g \in L^2_{xdx}$, temos que $v \in H^5(\varepsilon, L)$, devido a (3.5), para todo $\varepsilon \in (0,L)$ e $v_{xxxxx} \in L^2_{xdx}$. Tomando qualquer $w \in \mathcal{T}$ e $\varepsilon \in (0,L)$, e multiplicando (3.5) por xw e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^L v_{xx}((xw)_{xxx} + (xw)_x)dx + [-v_{xxxx}(xw) - v_{xx}(xw)]_\varepsilon^L \\ + [v_{xxx}(xw)_x - v_{xx}(xw)_{xx}]_\varepsilon^L = \int_\varepsilon^L (g - \lambda v)xwdx.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e comparando com (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}&Lv_{xx}(L)w_{xx}(L) = \\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\varepsilon v_{xxxx}(\varepsilon)w(\varepsilon) + \varepsilon v_{xx}(\varepsilon)w(\varepsilon) - v_{xxx}(\varepsilon)(\varepsilon w_x(\varepsilon) + w(\varepsilon)) + v_{xx}(\varepsilon)(2w_x(\varepsilon) + \varepsilon w_{xx}(\varepsilon))\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $v_{xxxxx} \in L^2_{xdx}$, segue que

$$|v_{xxxx}(\varepsilon) - v_{xxxx}(L)| \leq \left(\int_\varepsilon^L x|v_{xxxxx}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\varepsilon^L x^{-1}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C|\log\varepsilon|^{-1}, \tag{3.7}$$

$$|v_{xx}(\varepsilon)| \leq C \tag{3.8}$$

e

$$|v_{xxx}(\varepsilon)| \leq C, \tag{3.9}$$

para alguma constante $C > 0$ e todo $\varepsilon \in (0,L)$. Inferimos de (3.7) que $v \in H^4(0,L)$, e portanto $v \in W$. Além disso, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.6) e usando (3.7) e (3.8), obtemos $v_{xx}(L) = 0$, visto que $w_{xx}(L)$ foi escolhido arbitrariamente. Concluímos que $v \in \mathcal{D}(A_1)$. Por outro lado, é claro que o operador $A_1 - \lambda$ aplica $\mathcal{D}(A_1)$ em H injetivamente, mais ainda sobrejetivamente em H pelos cálculos anteriores. Portanto $A_1 - \lambda$ gera um semigrupo de contração forte em H pelo Teorema 2.4.2. □

Observação 3.1.2. *Analogamente, podemos usar a mesma abordagem para obter a Proposição 3.1.1 usando o operador $Au = u_{xxxxx} - u_{xxx} - u_x$. De fato, para isso basta considerar a seguinte forma bilinear em $V \times W$ definida por*

$$a(v,w) := \int_0^L v_{xx}(-(wx)_x + (xw)_{xxx})dx - \int_0^L v_x(xw)dx, \qquad v \in V,\ w \in W.$$

3.2 Sistema linear: Boa colocação em $L^2_{(L-x)^{-1}dx}$

Nesta subseção, estamos interessados em mostrar a boa colocação do sistema (3.1) em $L^2_{(L-x)^{-1}dx}$. Mais uma vez, por uma questão de simplicidade, vamos considerar o operador $A_2u = -u_{xxxxx} + \beta u_{xxx}$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Assim, o seguinte resultado pode ser provado.

Proposição 3.2.1. *Let $A_2u = -u_{xxxxx} + \beta u_{xxx}$ com domínio*

$$\mathcal{D}(A_2) = \{u \in H^5(0,L) \cap H_0^2(0,L);\ u_{xxxxx} \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx} \text{ e } u_{xx}(L) = 0\} \subset L^2_{\frac{1}{L-x}dx}.$$

Então A_2 gera um semigrupo fortemente contínuo $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$, para $\beta > -3/80$.

Demonstração. Usaremos o Teorema de Hille-Yosida e, parcialmente, o Teorema 2.2.2. Vamos considerar

$$H = L^2_{\frac{1}{L-x}dx}, \quad V = \{u \in H_0^2(0,L),\ u_{xx} \in L^2_{\frac{1}{(L-x)^2}dx}\}, \quad W = H_0^3(0,L), \tag{3.10}$$

munidos, respectivamente, com as normas

$$||u||_H = ||(L-x)^{-\frac{1}{2}}u||_{L^2}, \quad ||u||_V = ||(L-x)^{-1}u_{xx}||_{L^2}, \quad ||u||_W = ||u_{xxx}||_{L^2}. \tag{3.11}$$

Usando as estimativas do Lema 2.3.1, sabemos que V dotado com o produto interno $||\cdot||_V$ é um espaço de Hilbert e que as seguintes desigualdades são válidas

$$\int_0^L \frac{u^2}{(L-x)^6}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{25}\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}\mathrm{d}x \qquad \forall u \in V \tag{3.12}$$

e

$$\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^L \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^2}\mathrm{d}x \qquad \forall u \in V. \tag{3.13}$$

Além disso, a seguinte estimativa é fornecida pelo Lema 2.3.1

$$r^2\int_0^L \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^2}\mathrm{d}x - \left(2r + 3qr - q^2\right)\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}\mathrm{d}x + (1 - 5q + 20r)\int_0^L \frac{u^2}{(L-x)^6}\mathrm{d}x \geqslant 0, \tag{3.14}$$

para qualquer número real r e q.

Usando as desigualdades (3.12) e (3.13), obtemos

$$||u||_H \leq L^{\frac{5}{2}}||(L-x)^{-3}u||_H \leq \frac{16}{225}L^{\frac{5}{2}}||u||_V \qquad \forall u \in V. \tag{3.15}$$

Portanto $V \subset H$ sendo tal inclusão uma imersão contínua. Pela desigualdade de Poincaré (2.3.4), temos que $||\cdot||_W$ é uma norma em W equivalente a norma H^3. Por outro lado, novamente pela desigualdade de Hardy

$$\int_0^L \frac{v_{xx}^2}{(L-x)^2}dx \leq C\int_0^L v_{xxx}^2 dx, \tag{3.16}$$

para todo $v \in H^2(0,L)$, com $v_{xx}(L)=0$. Portanto, temos que

$$||v||_V \le C||v||_W, \qquad \forall v \in W, \tag{3.17}$$

que implica $W \subset V$ sendo tal inclusão uma imersão contínua. Pode-se verificar que $\mathcal{D}(0,L)$ é denso em H, V e W. Agora, defina, para $\beta \in \mathbb{R}$ a seguinte forma bilinear em $V \times W$:

$$a(v,w) = \int_0^L \left[v_{xx}\left(\frac{w}{L-x}\right)_{xxx} - \beta v_{xx}\left(\frac{w}{L-x}\right)_x \right] dx, \qquad (v,w) \in V \times W.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\le \left| \int_0^L v_{xx}\left(\frac{w_{xxx}}{L-x} + 3\frac{w_{xx}}{(L-x)^2}\right) dx \right| \\
&\quad + \left| \int_0^L v_{xx}\left(6\frac{w_x}{(L-x)^3} + 6\frac{w}{(L-x)^4} - \beta\frac{w_x}{L-x} - \beta\frac{w}{(L-x)^2}\right) dx \right| \\
&\le ||w_{xxx}||_{L^2} \left|\left| \frac{v_{xx}}{L-x} \right|\right|_{L^2} + 3\left|\left| \frac{w_{xx}}{L-x} \right|\right|_{L^2} \left|\left| \frac{v_{xx}}{L-x} \right|\right|_{L^2} \\
&\quad + \left|\left| \frac{v_{xx}}{L-x} \right|\right|_{L^2} \left(6\left|\left| \frac{w_x}{(L-x)^2} \right|\right|_{L^2} + 6\left|\left| \frac{w}{(L-x)^3} \right|\right|_{L^2} + \beta\left|\left| \frac{w}{(L-x)^2} \right|\right|_{L^2} + ||w_x||_{L^2} \right) \\
&\le C||v||_V ||w||_W
\end{aligned}$$

por (3.12), (3.13), (3.15) e (3.17). Isto mostra que a está bem definido e é contínuo.

Vamos provar a coercividade de a. Para isso, reescrevemos a da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
a(v,w) &= \int_0^L v_{xx}\left(\frac{w_{xxx}}{L-x} + 3\frac{w_{xx}}{(L-x)^2} + 6\frac{w_x}{(L-x)^3}\right) dx \\
&\quad + \int_0^L v_{xx}\left(6\frac{w}{(L-x)^4} - \beta\frac{w_x}{L-x} - \beta\frac{w}{(L-x)^2}\right) dx,
\end{aligned}$$

para $\beta \in \mathbb{R}$ e $(v,w) \in V \times W$. Assim, para qualquer $w \in \mathcal{D}(0,L)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
a(w,w) &= \int_0^L w_{xx}\left(\frac{w_{xxx}}{L-x} + 3\frac{w_{xx}}{(L-x)^2} + 6\frac{w_x}{(L-x)^3}\right) dx \\
&\quad + \int_0^L w_{xx}\left(6\frac{w}{(L-x)^4} - \beta\frac{w_x}{L-x} - \beta\frac{w}{(L-x)^2}\right) dx \\
&= \frac{5}{2}\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - 15\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx + 60\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6}dx \\
&\quad + \frac{3}{2}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx - 3\beta\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^4}dx.
\end{aligned}$$

Vamos dividir a prova da coercividade em dois casos.

Caso 1: $\beta \ge 0$.

Neste caso, aplicando (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx - 3\beta\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^4}dx &\ge \frac{3}{2}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx - \frac{4}{3}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx \\
&= \frac{\beta}{6}\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a(w,w) \geq \frac{\beta}{6}\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx + \frac{5}{2}\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - 15\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx + 60\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6}dx,$$

ou equivalentemente,

$$2a(w,w) \geq \frac{\beta}{3}\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx + 5\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - 30\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx + 120\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6}dx.$$

Agora, ignorando o primeiro termo da desigualdade anterior e aplicando (3.14), com $r = 0.4$ e $q = 1$, obtemos

$$a(w,w) \geq 0.2\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx.$$

O resultado também é válido para qualquer $w \in W$, por densidade. Mostrando assim que a forma bilinear contínua $a(v,w)$ é coerciva para $\beta \geq 0$, provando o primeiro caso.

Caso 2: $\beta < 0$.

Mais uma vez, aplicando (3.12) e (3.13), temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx - 3\beta\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^4}dx &\geq \frac{3}{2}\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2}dx \geq 6\beta\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx \\ &\geq \frac{8}{3}\beta\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx. \end{aligned}$$

Portanto, para $\beta < 0$,

$$a(w,w) \geq \left(\frac{5}{2} + \frac{8}{3}\beta\right)\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - 15\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx + 60\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6}dx,$$

equivalentemente,

$$2a(w,w) \geq \left(5 + \frac{16}{3}\beta\right)\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx - 30\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4}dx + 120\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6}dx.$$

Aplicando (3.14) com q e r satisfazendo

$$1 - 5q + 20r = 4(2r + 3qr - q^2) > 0,$$

obtem-se

$$2a(w,w) \geq \left(5 + \frac{16}{3}\beta - \frac{30r^2}{2r + 3qr - q^2}\right)\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2}dx.$$

Para a ser coercivo, β tem que satisfazer

$$\beta > \frac{15}{16}\left(\frac{6r^2}{2r + 3qr - q^2} - 1\right).$$

Finalmente, considerando $r = 1/10$ e $q = 11/20$, temos o seguinte intervalo de otimalidade da coercividade, ou seja,

$$\beta > -\frac{3}{80}.$$

Daí, segue que

$$a(w,w) \geq \left(\frac{1}{5} + \frac{16}{3}\beta\right) \int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2} dx \geq \gamma ||w||_V^2, \tag{3.18}$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{10} + \frac{8}{3}\beta, \tag{3.19}$$

concluindo o segundo caso. O resultado também é válido para qualquer $w \in W$, por densidade. Então, dos casos acima temos que a forma bilinear contínua $a(v,w)$ é coerciva para $\beta > -\frac{3}{80}$.

Agora, para finalizar a prova, vamos mostrar que $-A_2$ é maximal dissipativo. Primeiro, dado $g \in H$, pelo Teorema 2.2.2, existe uma solução $v \in V$ de

$$a(v,w) = (g,w)_H \qquad \forall w \in W. \tag{3.20}$$

Considere $v \in V$ uma solução, vamos provar que $v \in \mathcal{D}(A_2)$. Tomando qualquer $w \in \mathcal{D}(0,L)$ em (3.20) tem-se

$$-v_{xxxxx} + \beta v_{xxx} = g \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,L). \tag{3.21}$$

Como $g \in L^2(0,L)$ e $v \in H^2(0,L)$, temos que $v_{xxxxx} \in L^2(0,L)$, e $v \in H^5(0,L)$, devido a (3.21). Por fim, considere w da forma

$$w(x) = x^3(L-x)^3\overline{w}(x),$$

onde $\overline{w} \in C^\infty([0,L])$ escolhido arbitrariamente. Observe que $w \in W$ e que

$$\frac{w}{(L-x)} \in H_0^2(0,L) \cap C^\infty([0,L]).$$

Por simplicidade, considere $\beta = 1$ em (3.21). Multiplicando (3.21) por $w/(L-x)$ e integrando por partes em $(0,L)$, obtemos comparando com (3.20) que

$$\begin{aligned} 0 &= v_{xx}\left(\frac{w}{L-x}\right)_{xx}\Big|_0^L \\ &= -v_{xx}\Big(6x(L-x)\overline{w}(L+x) + 2x^2(L-x)\overline{w}_x(3L-5x) + x^3(2\overline{w} + (L-x)^2\overline{w}_{xx})\Big)\,\Big|_0^L \end{aligned}$$

isto é,

$$0 = 2L^3 v_{xx}(L)\overline{w}(L).$$

Como $\overline{w}(L)$ pode ser escolhido arbitrariamente, concluímos que $v_{xx}(L) = 0$. Usando (3.16) inferimos que $v_{xxx} \in H$, e portanto $v_{xxxxx} = -g + \beta v_{xxx} \in H$. Assim, $v \in \mathcal{D}(A_2)$. Daí segue que $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \to H$ é sobrejetiva.

Por fim, vamos verificar que $-A_2$ também é dissipativo em H. Seja $w \in \mathcal{D}(A_2)$. Após integrar por partes, obtemos

$$\begin{aligned} (-A_2 w, w)_H &= (w_{xxxxx} - \beta w_{xxx}, w)_H \\ &= -\frac{5}{2}\int_0^L \frac{w_{xx}^2}{(L-x)^2} dx + 15\int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^4} dx - \frac{3}{2}\beta \int_0^L \frac{w_x^2}{(L-x)^2} dx \\ &\quad -60\int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^6} dx + 3\beta \int_0^L \frac{w^2}{(L-x)^4} dx - \frac{w_{xx}^2(0)}{2L}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\beta \geq 0$, usando o Caso 1, temos

$$(-A_2 w, w)_H \leq -0.1||w||_W^2 - \frac{w_{xx}^2(0)}{2L} \leq 0.$$

Por outro lado, se $\beta < 0$, usando o Caso 2, obtemos

$$(-A_2 w, w)_H \leq -\gamma||w||_W^2 - \frac{w_{xx}^2(0)}{2L} \leq 0,$$

para γ definido por (3.19). Portanto, concluímos que $-A_2$ é maximal dissipativo para $\beta > -3/80$, e, portanto, gera um semigrupo de contração fortemente contínuo em H pelo Teorema de Hille-Yosida, demonstrando o resultado. □

O resultado a seguir garante um efeito de regularização tipo Kato, como é bem conhecido na equação de Kawahara [3, 41].

Proposição 3.2.2. *Dado $T > 0$. Sejam H e V definidos por*

$$H = L^2_{\frac{1}{L-x}dx}, \quad V = \{u \in H_0^2(0, L),\ u_{xx} \in L^2_{\frac{1}{(L-x)^2}dx}\}, \quad W = H_0^3(0, L),$$

munidos, respectivamente, com as normas

$$||u||_H = ||(L-x)^{-\frac{1}{2}}u||_{L^2}, \quad ||u||_V = ||(L-x)^{-1}u_{xx}||_{L^2}, \quad ||u||_W = ||u_{xxx}||_{L^2}.$$

Então existe alguma constante $C = C(L, T)$ tal que para qualquer $u_0 \in H$, a solução $u(t) = e^{tA_2}u_0$ de (3.1) satisfaz

$$||u||_{L^\infty(0,T,H)} + ||u||_{L^2(0,T,V)} \leq C||u_0||_H.$$

Demonstração. Primeiro, notamos que $\mathcal{D}(A_2)$ é denso em H, assim é suficiente provar o resultado quando $u_0 \in \mathcal{D}(A_2)$. Observe que a estimativa $||u||_{L^\infty(0,T,H)} \leq C||u_0||_H$ é uma consequência da teoria clássica de semigrupos (2.4.3). Assuma $u_0 \in \mathcal{D}(A_2)$, de modo que $u_t = -A_2 u$ no sentido clássico. Tomando o produto interno em H com u tem-se

$$(u_t, u)_H = -a(u, u) \leq -C||u||_V^2,$$

como feito em (3.18). Finalmente, um integração sobre $(0, T)$ completa a prova da estimativa de $||u||_{L^2(0,T,V)}$. □

Observação 3.2.1. *Analogamente, podemos usar a mesma abordagem para obter as Proposições 3.2.1 e 3.2.2 para o operador Kawahara, $Au = u_{xxxxx} - u_{xxx} - u_x$. De fato, os resultados seguem considerando a seguinte forma bilinear em $V \times W$*

$$a(v, w) := \int_0^L v_{xx} \left(-\left(\frac{w}{L-x} \right)_x + \left(\frac{w}{L-x} \right)_{xxx} \right) dx - \int_0^L v_x \left(\frac{w}{L-x} \right) dx, \tag{3.22}$$

para $v \in V$ e $w \in W$.

3.3 Sistema não homogêneo

Consideramos nesta seção a boa colocação do sistema de Kawahara não homogêneo.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = f(x,t) & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{3.23}$$

Mais precisamente, estamos interessados em provar a existência de uma solução, quando $f \in L^2(0,T,H^{-2}(0,L))$.

Proposição 3.3.1. *Sejam* $u_0 \in L^2_{xdx}$ *e* $f \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$. *Então existe uma única solução* $u \in C([0,T],L^2_{xdx}) \cap L^2(0,T,H^2(0,L))$ *para* (3.23). *Além disso, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$||u||_{L^\infty(0,T,L^2_{xdx})} + ||u||_{L^2(0,T,H^2(0,L))} \leq C\Big(||u_0||_{L^2_{xdx}} + ||f||_{L^2(0,T,H^{-2}(0,L))}\Big). \tag{3.24}$$

Demonstração. Assuma primeiro que $u_0 \in \mathcal{D}(A_1)$ e $f \in C^0([0,T],\mathcal{D}(A_1))$. Multiplicando (3.23) por xu e integrando sobre $(0,\tau)\times(0,L)$, onde $0<\tau<T$, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^L x|u(\tau,x)|^2dx - \frac{1}{2}\int_0^L x|u_0(x)|^2dx + \frac{5}{2}\int_0^\tau\int_0^L |u_{xx}|^2dxdt \\ + \frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^L |u_x|^2dxdt - \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^L |u|^2dxdt = \int_0^\tau\int_0^L xuf dxdt. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Denotamos $<\cdot,\cdot>_{H^{-2},H_0^2}$ a dualidade entre $H^{-2}(0,L)$ e $H_0^2(0,L)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$\int_0^\tau\int_0^L xuf dxdt = \int_0^\tau \langle f, xu\rangle_{H^{-2},H_0^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_0^L u_x^2 dxdt + C_\varepsilon\int_0^\tau ||f||^2_{H^{-2}}dt.$$

O último termo no lado esquerdo de (3.25) é decomposto da seguinte maneira

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^L |u|^2dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\sqrt{\varepsilon}}^L |u|^2dxdt =: I_1 + I_2.$$

As seguintes desigualdades são verificadas:

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_0^L |u_x|^2dxdt \tag{3.26}$$

e

$$I_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\tau\int_0^L x|u|^2dxdt. \tag{3.27}$$

De fato, como (3.27) é de fácil verificação, provaremos (3.26). Note que $u(0,t)=0$, assim, temos

$$|u(x,t)| \leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u_x|dx \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}}\Big(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

para $(t,x) \in (0,T) \times (0,\sqrt{\varepsilon})$. Portanto

$$\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u|^2 dx \leq \varepsilon \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u_x|^2 dx,$$

que dá (3.26) depois de integrar em $t \in (0,\tau)$.

Substituindo (3.26) e (3.27) em (3.25), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L x|u(\tau,x)|^2 dx + \frac{5}{2}\int_0^\tau\!\!\int_0^L |u_{xx}|^2 dxdt + (\frac{3}{2}-\varepsilon)\int_0^\tau\!\!\int_0^L |u_x|^2 dxdt \\ \leq \frac{1}{2}\int_0^L x|u_0(x)|^2 dx + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\tau\!\!\int_0^L x|u|^2 dxdt + C_\varepsilon \int_0^\tau ||f||^2_{H^{-2}} dt,\end{aligned}$$

para $0 < \varepsilon < L^2$. Tomando $\varepsilon \in (L^2, \min\{0, 3/2\})$ e aplicando o Lema de Gronwall, segue que

$$||u||^2_{L^\infty(0,T,L^2_{xdx})} + ||u_{xx}||^2_{L^2(0,T,L^2(0,L))} \leq C(T)\Big(||u_0||^2_{L^2_{xdx}} + ||f||^2_{L^2(0,T,H^{-2}(0,L))}\Big).$$

O que prova a desigualdade (3.24) para $u_0 \in D(A_1)$ e $f \in C^0([0,T], D(A_1))$. Um argumento de densidade nos permite construir uma solução $u \in C([0,T], L^2_{xdx}) \cap L^2(0,T,H^2(0,L))$ de (3.23) satisfazendo (3.24) para $u_0 \in L^2_{xdx}$ e $f \in L^2(0,T,H^{-2}(0,L))$. Por fim, a unicidade é consequência da teoria clássica de semigrupos (2.4.3). □

Nosso objetivo, na próxima proposição, é obter um resultado semelhante nos espaços H e V definidos por (3.10)-(3.11). Para isso, nos limitamos à situação onde $f = (\rho(x)h)_{xx}$ com $h \in L^2(0,T,L^2(0,L))$. Considere $Au = u_{xxxxx} - u_{xxx} - u_x$ com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^5(0,L) \cap H^2_0(0,L);\ u_{xxxxx} \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx} \text{ e } u_{xx}(L) = 0\} \subset L^2_{\frac{1}{L-x}dx}.$$

Proposição 3.3.2. *Sejam $u_0 \in H$, $h \in L^2(0,T,L^2(0,L))$ e defina $f := (\rho(x)h)_{xx}$. Então existe uma solução única*

$$u \in C([0,T],H) \cap L^2(0,T,V)$$

do sistema (3.23)*. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||u||_{L^\infty(0,T,H)} + ||u||_{L^2(0,T,V)} \leq C\Big(||u_0||_H + ||h||_{L^2(0,T,L^2(0,L))}\Big). \quad (3.28)$$

Demonstração. Assuma que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $h \in C_0^\infty((0,T)\times(0,L))$, de modo que $f \in C^1([0,T],H)$. Tomando o produto interno de $u_t - Au - f = 0$ com u em H tem-se

$$(u_t,u)_H = -a(u,u) + (f,u)_H \leq 15\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx + \frac{3}{2}\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^2}dx + (f,u)_H, \quad (3.29)$$

onde $a(v,w)$ é definido por (3.22). Portanto

$$\begin{aligned}
|(f,u)_H| &= |\int_0^L (\rho(x)h)_x \frac{u}{L-x}dx| \\
&= |\int_0^L \rho(x)h\Big(\frac{u_x}{L-x} + \frac{u}{(L-x)^2}\Big)dx| \\
&\leq C||h||_{L^2}(||\frac{u_x}{L-x}||_{L^2} + ||\frac{u}{(L-x)^2}||_{L^2}) \\
&\leq C||h||_{L^2}(||u||_V + ||u||_H),
\end{aligned}$$

onde usamos (3.13) para obter a última desigualdade. Assim, temos que

$$|(f,u)_H| \leq \frac{C}{2}||u||_V^2 + \frac{C}{2}||u||_H^2 + C'||h||_{L^2}^2.$$

Além disso, usando uma desigualdade do tipo Hardy, obtemos

$$\begin{aligned}
15\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx + \frac{3}{2}\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^2}dx &\leq C(L)\int_0^L \frac{u_x^2}{(L-x)^4}dx \\
&\leq C(L)\left(\int_0^L \frac{u_{xx}^2}{(L-x)^4}dx + \int_0^L \frac{u^2}{(L-x)^6}dx\right) \\
&\leq C||u||_H + C||u||_V,
\end{aligned}$$

que ao combinarmos com (3.29) e integrando em $(0,\tau)$, para $0<\tau<T$, obtemos

$$||u(\tau)||_H^2 + C\int_0^\tau (||u||_V^2 + ||u||_H^2)dt \leq ||u_0||_H^2 + C''\Big(\int_0^\tau (||u||_H^2 + ||u||_V^2)dt + \int_0^\tau\int_0^L |h|^2 dxdt\Big).$$

Aplicando o Lema de Gronwall obtemos (3.28) para $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $h \in C_0^\infty((0,T)\times(0,L))$. Argumetando por densidade, nos permite construir uma solução $u \in C([0,T],H)\cap L^2(0,T,V)$ de (3.23) que satisfaça (3.28) para $u_0 \in H$ e $h \in L^2(0,T,L^2(0,L))$. A unicidade decorre da teoria clássica de semigrupos (2.4.3). $\square$

3.4 Sistema não linear

Nesta seção provaremos a existência de solução para o seguinte problema não linear:

$$\begin{cases}
u_{2,t} + u_{2,x} + u_{2,xxx} - u_{2,xxxxx} = g(t,x) & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\
u_2(t,0) = u_2(t,L) = u_{2,x}(t,0) = u_{2,x}(t,L) = u_{2,xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\
u_2(0,x) = 0 & \text{em } (0,L),
\end{cases} \tag{3.30}$$

com $g = g(t,x) = -u_2 u_{2,x}$.

O resultado a seguir será útil para estudar a controlabilidade exata do sistema não homogêneo (3.30).

Proposição 3.4.1. *Considere H e V definidos como em* (3.10)-(3.11).

(i) Se $u, v \in L^2(0,T;V)$*, então* $uv_x \in L^1(0,T;H)$*. Além disso, a aplicação*

$$(u,v) \in L^2(0,T;V)^2 \to uv_x \in L^1(0,T;H)$$

é contínua e existe uma constante $c > 0$ *tal que*

$$\|uv_x\|_{L^1(0,T;H)} \le c\,\|u\|_{L^2(0,T;V)}\,\|v\|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{3.31}$$

(ii) Para $g \in L^1(0,T;H)$*, a solução suave* u *de* (3.30)*, dada pela fórmula de Duhamel, satisfaz*

$$u_2 \in C([0,T]\,;H) \cap L^2(0,T;V)$$

e vale a seguinte estimativa

$$||u_2||_{L^\infty(0,T,H)} + ||u_2||_{L^2(0,T,V)} \le C||g||_{L^1(0,T,H)}. \tag{3.32}$$

Demonstração. Para facilitar a demonstração iremos explicitar os espaços H e V

$$H = L^2_{\frac{1}{L-x}dx} \text{ e } V = \{u \in H_0^2(0,L),\ u_{xx} \in L^2_{\frac{1}{(L-x)^2}dx}\},$$

munidos com suas respectivas normas

$$||u||_H = ||(L-x)^{-\frac{1}{2}}u||_{L^2} \text{ e } ||u||_V = ||(L-x)^{-1}u_{xx}||_{L^2}.$$

Para $u, v \in V \subset H$, temos

$$\begin{aligned} ||uv_x||^2_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} &= \int_0^L (uv_x)^2 \frac{1}{L-x} dx \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,L]} u^2 \int_0^L \frac{v_x^2}{L-x} . \frac{(L-x)^3}{(L-x)^3} \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,L]} u^2 L^3 \int_0^L \frac{v_x^2}{(L-x)^4} \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,L]} u^2 \frac{4L^3}{9} \int_0^L \frac{v_{xx}^2}{(L-x)^2}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto,

$$||uv_x||_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} \le C||u||_{L^2}||v||_V,$$

com $C = \frac{4L^3}{9}$ e (i) está provado.

Para (ii), primeiro assumimos

$$g \in C^1([0,T], H),$$

de modo que

$$u_2 \in C^1([0,T], H) \cap C^0([0,T], \mathcal{D}(A_2)).$$

Tomando o produto interno de $u_{2,t} = A_2 u_2 + g$ com u_2 em H produz

$$(u_{2,t}, u_2)_H \leq -C||u_2||_V^2 + C'||u_2||_H^2 + (g, u_2)_H$$

onde C, C' denotam algumas constantes positivas. Integrando sobre $(0, T)$ e usando a estimativa clássica

$$||u_2||_{L^\infty(0,T,H)} \leq C||g||_{L^1(0,T,H)},$$

pela teoria dos semigrupos, obtemos (ii) quando $g \in C^1([0, T], H)$. O caso geral ($g \in L^1(0, T, H)$) segue por densidade. $\square$

4 CONTROLABILIDADE EXATA PARA EQUAÇÃO DE KAWAHARA

Considere $\rho \in C^{\infty}(0,L)$ satisfazendo

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < x < L - \nu, \\ 1 & \text{se} \quad L - \frac{\nu}{2} < x < L, \end{cases} \tag{4.1}$$

para algum $\nu \in (0,L)$. Nesta seção iremos estudar a controlabilidade exata do seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = (\rho(x)h)_{xx} & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{4.2}$$

O objetivo é encontrar um controle $h \in L^2(0,T;L^2(0,L))$. Na verdade, com $(\rho(x)h(t,x))_{xx}$ em algum espaço de funções, para guiar o sistema descrito por (4.2) no intervalo de tempo $[0,T]$ de qualquer dado inicial (pequeno) u_0 em $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$ para algum dado final (pequeno) u_T no mesmo espaço. Primeiro, consideramos o sistema linearizado, e depois prosseguimos para o não linear. Para provar o principal teorema, precisaremos dos resultados envolvendo espaços de Sobolev com peso que foram provados nos capítulos anteriores.

4.1 Controlabilidade exata: sistema linearizado

Nossa atenção nesta seção está relacionada às propriedades de controle do sistema linear

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = (\rho(x)h)_{xx} & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{4.3}$$

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. *Sejam $T > 0$, $\nu \in (0,L)$ e $\rho(x)$ definido por* (4.1)*. Então, existe um operador linear contínuo*

$$\Gamma : L^2_{\frac{1}{L-x}dx} \to L^2(0,T,L^2(0,L)) \cap L^2_{(T-t)dt}(0,T,H^2(0,L))$$

tal que para qualquer $u_1 \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$, a solução u do sistema (4.3) *com $u_0 = 0$ e $h = \Gamma(u_1)$ satisfaz $u(T,x) = u_1(x)$ em $(0,L)$.*

Demonstração. Utilizaremos o método de HUM introduzido por J.-L. Lions [47]. Consideremos o seguinte sistema adjunto associado a (4.3):

$$\begin{cases} -v_t + v_{xxxxx} - v_{xxx} - v_x = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,0) = v_x(t,L) = v_{xx}(t,0) = 0 & \text{em } (0,T), \\ v(T,x) = v_T(x). & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{4.4}$$

Se $u_0 \equiv 0$, $v_T \in \mathcal{D}(0,L)$ e $h \in \mathcal{D}((0,T)\times(0,L))$, multiplicando (4.3) por v e integrando sobre $(0,T)\times(0,L)$, temos

$$\int_0^L u(T,x)v_T(x)dx = \int_0^T\int_0^L (\rho(x)h)_{xx}vdxdt = \int_0^T\int_0^L \rho(x)hv_{xx}dxdt.$$

Considerando as mudanças de variáveis usuais $x \to L-x$, $t \to T-t$ e usando a Proposição 3.3.1, obtemos

$$||v||_{L^\infty(0,T,L^2_{(L-x)dx})} + ||v||_{L^2(0,T,H^2(0,L))} \leq C||v_T||_{L^2_{(L-x)dx}}.$$

Por um argumento de densidade, segue que para todo $h \in L^2(0,T,L^2(0,L))$ e $v_T \in L^2_{(L-x)dx}$,

$$\langle u(T,\cdot), v_T\rangle_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx},L^2_{(L-x)dx}} = \int_0^T (h, \rho(x)v_{xx})_{L^2}dt,$$

onde u e v denotam as soluções de (4.3) e (4.4), respectivamente, e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx},L^2_{(L-x)dx}}$ denota a dualidade entre $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$ e $L^2_{(L-x)dx}$. Teremos que provar a seguinte desigualdade de observabilidade

$$||v_T||^2_{L^2_{(L-x)dx}} \leq C\int_0^T\int_0^L |\rho(x)v_{xx}|^2dxdt \tag{4.5}$$

ou, equivalentemente, fazendo $w(t,x) = v(T-t, L-x)$,

$$||w_0||^2_{L^2_{xdx}} \leq C\int_0^T\int_0^L |\rho(L-x)w_{xx}|^2dxdt, \tag{4.6}$$

onde w é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} w_t - w_{xxxxx} + w_{xxx} + w_x = 0, \\ w(t,0) = w(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = w_{xx}(t,L) = 0, \\ w(0,x) = w_0(x). \end{cases} \tag{4.7}$$

Multiplicando (4.7) por wq, com $q(t,x) = (T-t)b(x) \in C^\infty([0,T]\times[0,L])$ e $b \in C^\infty([0,L])$ sendo uma função não decrescente definida por

$$b(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ 0 < x < \nu/4, \\ 1 & \text{se } \ \nu/2 < x < L, \end{cases}$$

integrando por partes, segue que

$$-\int_0^T\int_0^L (q_t + q_x + q_{xxx} - q_{xxxxx})\frac{w^2}{2}dxdt + \int_0^L (q\frac{w^2}{2})(T,x)dx - \int_0^L (q\frac{w^2}{2})(0,x)dx$$
$$+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L q_xw_x^2dxdt + \frac{5}{2}\int_0^T\int_0^L q_xw_{xx}^2dxdt + \int_0^T \left(q\frac{w_{xx}^2}{2}\right)(t,0)dt = 0.$$

Devido a escolha de $q(t,x)$ e $b(x)$, tem-se que

$$\begin{aligned} ||w_0||^2_{L^2_{xdx}} &\leq C(L,\nu)\int_0^L b(x)w_0^2(x)dx \\ &\leq C(T,L,\nu)\left(\int_0^T\int_0^{\frac{\nu}{2}} w_x^2dxdt + \int_0^T\int_0^{\frac{\nu}{2}} w_{xx}^2dxdt + \int_0^T\int_0^L w^2dxdt\right) \\ &\leq C(T,L,\nu)\left(\int_0^T\int_0^{\frac{\nu}{2}} w_{xx}^2dxdt + \int_0^T\int_0^L w^2dxdt\right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

Afirmamos que

$$||w_0||^2_{L^2_{xdx}} \leq C \int_0^T \int_0^{\frac{\nu}{2}} w^2_{xx} dxdt, \tag{4.9}$$

ocorre. Note que se (4.9) não ocorrer, então podemos encontrar uma sequência $\{w^n_0\} \subset L^2_{xdx}$ tal que

$$1 = ||w^n_0||^2_{L^2_{xdx}} > n \int_0^T \int_0^{\frac{\nu}{2}} |w^n_{xx}|^2 dxdt, \tag{4.10}$$

onde w^n é solução de (4.7) com w_0 substituído por w^n_0. Por (3.24) e (4.10), $\{w^n\}$ é limitado em $L^2(0,T,H^2(0,L))$, portanto, também em $H^1(0,T,H^{-3}(0,L))$ devido a equação (4.7). Extraindo uma subsequência, se necessário, o Lema de Aubin-Lions 2.2.1 garante que

$$w^n \to w \qquad \text{em } L^2(0,T,H^2(0,L)).$$

Assim, usando (4.8) e (4.10), temos que w^n_0 é uma sequência de Cauchy L^2_{xdx}, e, portanto, converge forte neste espaço. Denotamos w_0 o limite de w^n_0 em L^2_{xdx}, e w a solução de (4.7). Então

$$||w_0||_{L^2_{xdx}} = 1$$

e

$$w^n \to w \qquad \text{em } L^2(0,T,H^2(0,L)).$$

Mas $w^n_{xx} \to 0$ em $L^2(0,T,L^2(0,\nu/2))$ por (4.10). Portanto, $w_{xx} \equiv 0$ em $(0,T) \times (0,\nu/2)$, logo $w(t,x) = xg(t)+c(t)$ em $(0,T)\times(0,\nu/2)$. Como w resolve (4.7), inferimos de $w(t,0) = w_x(t,0) = 0$ que $w \equiv 0$ em $(0,T) \times (0,\nu/2)$. Pelo Teorema de Holmgren 2.1.2, temos que $w \equiv 0$ em $(0,T) \times (0,L)$, que implica $w(0,x) = 0$, o que contradiz o fato de $||w_0||_{L^2_{xdx}} = 1$. Portanto (4.9) está provado e (4.6) se verifica.

Vamos agora aplicar o "Hilbert Uniqueness Method". Considere o seguinte operador

$$\Lambda : L^2_{(L-x)dx} \to L^2_{(L-x)dx}$$

definido por

$$\Lambda(v_T) = (L-x)^{-1}u(T,\cdot) \in L^2_{(L-x)dx},$$

onde u é solução de (4.3) com $h = \rho(x)v_{xx}$. Note que Λ é contínuo. Além disso, por (4.5), temos que

$$\Big(\Lambda(v_T), v_T\Big)_{L^2_{(L-x)dx}} = \langle u(T,\cdot), v_T\rangle_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}, L^2_{(L-x)dx}} = \int_0^T ||\rho(x)v_{xx}||^2_{L^2} dt \geq C||v_T||^2_{L^2_{(L-x)dx}},$$

e segue que a aplicação $v_T \to \Lambda(v_T)$ é inversível em $L^2_{(L-x)dx}$.

Defina a aplicação

$$\Gamma : \ L^2_{\frac{1}{L-x}dx} \to L^2(0,T,L^2(0,L)),$$

por $\Gamma(u_1) = h := \rho(x)v_{xx}$, onde v é solução de (4.4) com $v_T = \Lambda^{-1}((L-x)^{-1}u_1)$. Primeiramente, note que, Γ é contínua, e a solução u, de (4.3), com $u_0 = 0$ e $h = \Gamma(u_1)$, satisfaz

$u(T,\cdot) = u_1$. Para provar Γ é contínua de $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$ em $L^2_{(T-t)dt}(0,T,H^2(0,L))$, é suficiente mostrar a seguinte estimativa

$$\int_0^T ||v(t)||^2_{H^3}(T-t)dt \leq C||v_T||^2_{L^2_{(L-x)dx}},$$

para a solução de (4.4) ou, equivalentemente,

$$\int_0^T ||w||^2_{H^3}\, tdt \leq C||w_0||^2_{L^2_{xdx}}, \tag{4.11}$$

para a solução de (4.7). Pela Proposição 3.3.1, temos

$$\int_0^T ||w||^2_{H_0^2(0,L)}dt \leq C||w_0||^2_{L^2_{xdx}}, \tag{4.12}$$

que produz

$$\int_0^T ||w||^2_{H_0^2(0,L)}dt \leq C||w_0||^2_{L^2}, \tag{4.13}$$

para $w_0 \in L^2(0,L)$. Assuma agora que $w_0 \in \mathcal{D}(A)$ e seja $u_0 = Aw_0 = w_{0,xxxxx} - w_{0,xxx} - w_{0,x}$. Denote por w (resp. u) a solução de (4.7) com dado inicial w_0 (resp. u_0). Então

$$Aw = w_{xxxxx} - w_{xxx} - w_x = u \in L^2(0,T,H_0^2(0,L)),$$

e portanto temos que $w \in L^2(0,T,H^7(0,L))$. Argumentos de interpolação garantem que

$$w \in L^2(0,T,H^3(0,L)),$$

se $w_0 \in H_0^2(0,L)$, com uma estimativa da forma

$$\int_0^T ||w||^2_{H^3(0,L)}dt \leq C||w_0||^2_{H_0^2(0,L)}. \tag{4.14}$$

As diferentes constantes C em (4.12)-(4.14) podem ser tomadas independentemente de T com $0 < T < T_0$. Assim, finalmente, usando o Teorema de Fubini, temos

$$\int_0^T s||w(s)||^2_{H^3}ds = \int_0^T\left(\int_t^T ||w(s)||^2_{H^3}ds\right)dt \leq C\int_0^T ||w(t)||^2_{H_0^2(0,L)}dt \leq C||w_0||^2_{L^2_{xdx}}.$$

Isto completa a prova de (4.4), consequentemente, do teorema. □

Observação 4.1.1. *É importante notar que o termo forçante*

$$f = (\rho(x)h)_{xx} \in L^2_{(T-t)dt}(0,T,L^2(0,L))$$

é de fato suportado em $(0,T) \times (L-\nu, L)$.

4.2 Controlabilidade exata: sistema não linear

Vamos provar a controlabilidade exata local em $L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$ do sistema (4.2). Note que a solução de (4.2) pode ser escrita como

$$u = u_L + u_1 + u_2, \tag{4.15}$$

onde u_L é a solução do problema linear dado por (3.1) com dado inicial $u_0 \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$, u_1 é solução de

$$\begin{cases} u_{1,t} + u_{1,x} + u_{1,xxx} - u_{1,xxxxx} = (\rho(x)h)_{xx} & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u_1(t,0) = u_1(t,L) = u_{1,x}(t,0) = u_{1,x}(t,L) = u_{1,xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u_1(0,x) = 0 & \text{em } (0,L) \end{cases} \tag{4.16}$$

com $h = h(t,x) \in L^2(0,T;L^2(0,L))$, e u_2 é solução

$$\begin{cases} u_{2,t} + u_{2,x} + u_{2,xxx} - u_{2,xxxxx} = g(t,x) & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u_2(t,0) = u_2(t,L) = u_{2,x}(t,0) = u_{2,x}(t,L) = u_{2,xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u_2(0,x) = 0 & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{4.17}$$

com $g = g(t,x) = -u_2 u_{2,x}$.

Sejam $\Theta_1(h) := u_1$ e $\Theta_2(g) := u_2$, onde u_1 (resp. u_2) denotam a solução de (4.16) (resp. (4.17)). Então

$$\Theta_1 : L^2(0,T;L^2(0,L)) \to \mathcal{G} : C([0,T];H) \cap L_2(0,T;V) \tag{4.18}$$

e

$$\Theta_2 : L^1(0,T;L^2_{\frac{1}{L-x}dx}) \to \mathcal{G} \tag{4.19}$$

são operadores contínuos bem definidos, devido às Proposições 3.3.2 e 3.4.1.

Estamos em posição de provar o principal resultado desta seção, ou seja, a controlabilidade exata (local) do sistema (4.2).

Teorema 4.2.1. *Seja $T > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que para algum u_0, $u_1 \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$ satisfazendo*

$$\|u_0\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} \leq \delta \quad e \quad \|u_1\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} \leq \delta,$$

pode-se encontrar uma função controle $h \in L^2(0,T;L^2(0,L))$ tal que a solução $u \in \mathcal{G}$ de (4.2) satisfaz $u(T,\cdot) = u_1$ em $(0,L)$.

Demonstração. Para mostrar o resultado, utilizaremos o Teorema do ponto fixo de Banach 2.2.1. Seja $\mathcal{F}$ uma aplicação não linear

$$\mathcal{F} : L^2(0,T;V) \to \mathcal{G},$$

definida por

$$\mathcal{F}(u) = u_L + \Theta_1 \circ \Gamma(u_T - u_L(T,\cdot) + \Theta_2(uu_x)(T,\cdot)) + \Theta_2(-uu_x),$$

u_L solução de (3.1) com dado inicial $u_0 \in L^2_{\frac{1}{L-x}dx}$, Θ_1, Θ_2 definidos em (4.18) e (4.19), e finalmente, Γ dado pelo Teorema 4.1.1.

Observe que se u é um ponto fixo de $\mathcal{F}$, então u é uma solução de (4.2) com o controle

$$h = \Gamma(u_T - u_L(T,\cdot) + \Theta_2(uu_x)(T,\cdot)),$$

e satisfaz

$$u(T,\cdot) = u_T,$$

como desejado. Para provar a existência de um ponto fixo de $\mathcal{F}$, aplicaremos o Teorema de ponto fixo de Banach à restrição de $\mathcal{F}$ em alguma bola fechada $\overline{B(0,R)}$ contida em $L^2(0,T;V)$.

(i) $\mathcal{F}$ *é contração.*

Considere quaisquer $u, \tilde{u} \in \overline{B(0,R)}$. Usando (3.28), (3.31) e (3.32), temos

$$\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\tilde{u})\|_{L^2(0,T;V)} \leq 2CR\,\|u - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;V)}\,, \tag{4.20}$$

para alguma constante $C > 0$, independente de u, $\tilde{u}$ e R. Portanto, $\mathcal{F}$ é contração se R satisfaz

$$R < \frac{1}{4C}, \tag{4.21}$$

onde C é a constante em (4.20).

(ii) $\mathcal{F}$ *é injetiva em* $\overline{B(0,R)}$.

Usando a Proposição 3.2.2 e a continuidade dos operadores Γ, Θ_1 e Θ_2, inferimos a existência de uma constante $C' > 0$ tal que para algum $u \in \overline{B(0,R)}$, temos

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2(0,T;V)} \leq C'(\|u_0\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} + \|u_T\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}} + R^2).$$

Assim, tomando R satisfazendo (4.21),

$$R < 1/(2C')$$

e assumindo que $\|u_0\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}}$ e $\|u_T\|_{L^2_{\frac{1}{L-x}dx}}$ suficientemente pequenos, obtemos que o operador $\mathcal{F}$ é injetivo em $\overline{B(0,R)}$. Portanto, a aplicação $\mathcal{F}$ tem um ponto fixo em $\overline{B(0,R)}$, pelo Teorema do ponto fixo de Banach 2.2.1, portanto a prova é completa. □

Observação 4.2.1. *Como no caso linear, o termo forçante* $f = (\rho(x)h)_{xx}$ *de fato é uma função em*

$$L^2_{(T-t)dt}(0,T,L^2(0,L))$$

suportada em $(0,T) \times (L-\nu, L)$.

5 CONTROLABILIDADE REGIONAL PARA EQUAÇÃO DE KAWAHARA

Nesta seção, provaremos a controlabilidade regional do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = f & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{5.1}$$

Em detalhes, provaremos que o controle interno da equação de Kawahara fornece um controle do tipo hiperbólico na direção esquerda e um controle do tipo parabólico na direção direita, que significa, respectivamente, um comportamento de controlabilidade exata a esquerda e controlabilidade nula a direita. Antes de apresentar o resultado, destacamos que, a existência de soluções para o sistema (5.1) em espaços Sobolev foi mostrado em [32] (veja também [16]).

Agora, vamos exibir e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 5.0.1. *Sejam $T > 0$ e $\omega = (l_1, l_2)$ com $0 < l_1 < l_2 < L$. Considere $l_1' \in (l_1, l_2)$. Então existe um número $\delta > 0$ tal que para algum $u_0, u_1 \in L^2(0,L)$ satisfazendo*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq \delta \quad e \quad \|u_1\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

pode-se encontrar um controle $f \in L^2(0,T,H^{-2}(0,L))$, com supp$(f) \subset (0,T)\times\omega$, tal que a solução $u \in C^0([0,T],L^2(0,L)) \cap L^2(0,T,H^2(0,L))$ do sistema (5.1) satisfaz

$$u(T,x) = \begin{cases} u_1(x) & se \ \ x \in (0,l_1'); \\ 0 & se \ \ x \in (l_2,L). \end{cases} \tag{5.2}$$

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração, vamos enunciar [16, Theorem 1.1] e [33, Theorem 1] respectivamente:

Teorema 5.0.2 (Controlabilidade nula - Mo Che)**.** *Existe uma constante $\delta_1 > 0$ tal que para qualquer $u_0 \in L^2(I)$ satisfazendo*

$$||u_0||_{L^2(I)} \leq \delta_1,$$

pode-se encontrar um controle $f \in L^2(Q)$ tal que a solução u de 5.1 satisfaz

$$u(\cdot,T) = 0 \ em \ I.$$

Além disso, o controle pode ser escolhido da seguinte forma

$$||f||_{L^2(Q)} \leq C||u_0||_{L^2(I)}$$

com $C = C(L,T,\omega)$ constante positiva.

Teorema 5.0.3 (Controlabilidade exata - O. Glass e S. Guerrero)**.** *Seja* $T > 0$. *Seja* $\overline{u} \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(0, 1))$ *uma trajetória de*

$$u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + P'(u)u_x = 0 \tag{5.3}$$

onde α, β, μ *e* δ *são constantes reais e* P *uma polinomial cúbica, com condições de fronteiras*

$$\overline{u}_{|x=0} = \overline{u}_{x|x=0} = \overline{u}_{xx|x=0} = 0.$$

Existe $\epsilon > 0$ *tal que para qualquer* $u_0 \in L^2(0, 1)$ *tal que*

$$||u_0 - \overline{u}(0, \cdot)||_{L^2(0,1)} \leq \epsilon,$$

existem dois controle v_2 *e* $v_4 \in L^2(0, T)$ *tal que a solução* u *de 5.3 com condição inicial* $u_{t=0} = u_0$ *e condições de fronteiras*

$$u_{|x=0} = v_1,\ u_{|x=1} = v_2,\ u_{x|x=0} = v_3,\ u_{x|x=1} = v_4,\ u_{xx|x=0} = v_5$$

com controle $(0, v_2, 0, v_4, 0)$ *em* $C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$ *e satisfaz*

$$u_{|t=T} = \overline{u}(T, \cdot).$$

Por [16, Theorem 1.1], se δ é suficientemente pequeno, podemos encontrar um controle $f \in L^2(0, T/2, L^2(0, L))$, com $\text{supp}(f) \subset (0, T) \times \omega$, tal que a solução de (5.1) satisfaz $u(T/2, .) \equiv 0$ em $(0, L)$, onde ω é um subconjunto de $(0, L)$.

Vamos considerar qualquer número $l_2' \in (l_1', l_2) \subset (0, L)$. Por [33, Theorem 1], se δ é suficientemente pequeno, podemos escolher duas funções $g, h \in L^2(T/2, T)$ tal que a solução

$$y \in C^0([T/2, T], L^2(0, l_2')) \cap L^2(T/2, T, H^2(0, l_2'))$$

do sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xxxxx} + y_{xxx} + y_x + y y_x = 0 & \text{em } (T/2, T) \times (0, l_2'), \\ y(t, 0) = y_x(t, 0) = y_{xx}(t, l_2') = 0, \quad y(t, l_2') = g(t), \quad y_x(t, l_2') = h(t) & \text{em } (T/2, T), \\ y(T/2, x) = 0 & \text{em } (0, l_2') \end{cases}$$

satisfaz $y(T, x) = u_1(x)$ para $0 < x < l_2'$.

Defina $\mu \in C^\infty([0, L])$ sendo

$$\mu(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x < l_1', \\ 0 & \text{se } x > \frac{l_1' + l_2'}{2}, \end{cases}$$

e escolha para $T/2 < t \leq T$

$$u(t, x) = \begin{cases} \mu(x) y(t, x) & \text{se } x < l_2', \\ 0 & \text{se } x > l_2'. \end{cases}$$

Note que, para $T/2 < t < T$, $u_t - u_{xxxxx} + u_{xxx} + u_x + uu_x = f$ sendo

$$\begin{aligned} f &= -(\mu'''''y + 5\mu''''y_x + 10\mu'''y_{xx} + 10\mu''y_{xxx} + 5\mu'y_{xxxx}) \\ &\quad +(\mu'''y + 3\mu''y_x + 3\mu'y_{xx} + \mu'y) + \mu\mu'y^2 + \mu(\mu-1)yy_x. \end{aligned}$$

Como

$$||y||^4_{L^4(0,T,L^4(0,l_2'))} \leq C||y||^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}||y||^2_{L^2(0,T,H^2(0,L))},$$

segue que

$$f \in L^2(0,T,H^{-2}(0,L))$$

com $\mathrm{supp}(f) \subset (0,T) \times (l_1,l_2)$. Além disso, $u \in C([0,T],L^2(0,L)) \cap L^2(0,T,H^2(0,L))$ é solução de (5.1) e satisfaz (5.2), provando o resultado. $\square$

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

6.1 Conclusão

Neste trabalho, tratamos da boa colocação e controlabilidade da equação de Kawahara, uma equação do tipo KdV de quinta ordem, em um domínio limitado. Precisamente, mostramos quase todos os casos possíveis da controlabilidade interna da equação de Kawahara. O problema que ainda permanece em aberto, usando essa abordagem, e que já foi mencionado na introdução pode ser formulado da seguinte maneira:

Problema $\mathcal{A}$: É possível controlar a equação Kawahara no intervalo (l_1', l_2)?

Note que esta pergunta fica sem resposta devido a formulação usada para função controle, istó é, que foi definida a partir de função corte específica da qual não temos informações viáveis sobre seu comportamento no intervalo (l_1', l_2), e portanto, não obtemos resultado de controle por meio desta técnica.

De qualquer forma, outros problemas sobre a controlabilidade interna podem ser estudados usando novas técnicas e argumentos. Dessa forma, abaixo, nosso plano é apresentar alguns problemas interessantes do ponto de vista matemático. Mais precisamente, apresentamos questões em aberto sobre controlabilidade interna da equação de Kawahara com uma condição integral em domínios ilimitados e limitados.

6.2 Perspectivas

Com base no trabalho desenvolvido nesta tese, algumas questões surgem naturalmente. Portanto, descreveremos nesta seção alguns problemas que podem nos interessar posteriormente.

6.2.1 Controlabilidade da equação de Kawahara: domínio ilimitado

No contexto do controle de domínios ilimitados, Faminskii [30], considerou os problemas de valores de contorno inicial, colocados em domínios ilimitados para a equação de Korteweg-de Vries. Precisamente, ele elegeu uma função f_0 no lado direito da equação como uma função desconhecida, considerada como um controle. Assim, o autor provou que esta função deve ser escolhida de forma que a solução correspondente satisfaça certa condição integral adicional.

Portanto, acreditamos que essas técnicas possam ser aplicadas à equação de Kawahara colocada na semi reta direita

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = f_0(t)v(x,t), & (t,x) \in (0,T)\times(0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,\infty), \\ u(t,0) = h(t),\ u_x(t,0) = g(t), & t \in (0,T), \end{cases} \tag{6.1}$$

ou na semi reta esquerda

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = f_0(t)v(x,t), & (t,x) \in (0,T)\times(-\infty,0), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (-\infty,0), \\ u(t,0) = h(t),\ u_x(t,0) = g(t),\ u_{xx}(t,0) = k(t) & t \in (0,T), \end{cases} \tag{6.2}$$

onde v é uma função dada f_0 é uma função de controle desconhecida. Desse modo, o seguinte problema surge:

Problema $\mathcal{B}$: Podemos encontrar um par $\{f_0, u\}$, satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^+} u(t,x)w(x)dx = \varphi(t) \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}^-} u(t,x)w(x)dx = \varphi(t),$$

tal que as funções w e φ são dadas e u é a solução de (6.1) ou (6.2)?

6.2.2 Controlabilidade da equação de Kawahara: domínio limitado

Com relação à controlabilidade em domínio limitado, uma nova abordagem, diferente da usada neste trabalho, foi introduzida recentemente por Faminskii [31]. Ele estabeleceu resultados para a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado, sob uma condição integral a ser determinada. Mais precisamente, com condições suficientemente pequenas dos dados de entrada ou no intervalo de tempo, o autor mostrou a controlabilidade quando o controle possui uma forma especial.

Nesse sentido, acreditamos que o seguinte problema parece muito interessante. Considere a equação de Kawahara da seguinte maneira:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + uu_x = f_0(t)v(x,t), & (t,x) \in (0,T)\times(0,L), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,L), \\ u(t,0) = h_1(t),\ u(t,L) = h_2(t), & t \in (0,T), \\ u_x(t,0) = h_3(t),\ u_x(t,L) = h_4(t), & t \in (0,T), \\ u_{xx}(t,L) = h_5(t) & t \in (0,T). \end{cases} \tag{6.3}$$

Problema $\mathcal{C}$: Dadas as funções u_0 e h_i, $i = 1,2,3,4,5$, podemos encontrar uma função f_0 tal que a solução u do sistema (6.3) satisfaz uma condição integral a ser determinada

$$\int_0^L u(t,x)w(x)dx = \varphi(x), \quad t \in (0,T)$$

onde w e φ são funções conhecidas?

REFERÊNCIAS

1 R. A. Adams, *Sobolev Space*, Academic Press, London, 1975.

2 G. B. Airy, *Tides and waves. Encyclopedia Metropolitana*, 5, 1841.

3 F. D. Araruna, R. A. Capistrano-Filho and G. G. Doronin, *Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain*, J. Math. Anal. Appl., **385** (2) (2012) 743–756.

4 T. B. Benjamim, *Lectures on Nonlinear Wave Motion*, Lectures Notes in Applied Mathematics 15 (1974), 3-47.

5 J. L. Bona, *An Initial- and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves,* Journal of Mathematical Analysis and Applications 75 (2) (1980), 503–522.

6 J. L. Bona, *Nonlinear Wave Phenomena*, 51 Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

7 J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Comm. Partial Differential Equations, **28** (2003) 1391–1436.

8 J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *Boundary smoothing properties of the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane and applications*, Dyn. Partial Differ. Equ., 3 (2006), 1–69.

9 J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain II*, J. Differential Equations, **247** (9) (2009), 2558–2596.

10 J. V. Boussinesq, *Théorie de lintumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.*

11 H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications,* Dunod, Paris, (1999).

12 R. A. Capistrano-Filho and M. de S. Gomes. *Well-posedness and controllability of Kawahara equation in weighted Sobolev space.* Submitted. Link:https://arxiv.org/pdf/1905.08625.pdf.

13 R. A. Capistrano-Filho, A. F. Pazoto and L. Rosier, *Internal controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optimization and Calculus Variations, **21** (2015) 1076–1107.

14 R. A. Capistrano-Filho, S.-M. Sun, B.-Y. Zhang, *General boundary value problems of the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain,* Math. Cont. and Relat. Fields, 8 (3-4), (2018) 583-60.

15 R. A. Capistrano-Filho, S.-M. Sun, B.-Y. Zhang, *Initial boundary value problem for Korteweg–de Vries equation: a review and open problems,* São Paulo J. Math. Sci. (13) (2019) , 402-417.

16 M. Chen, *Internal controllability of the Kawahara equation on a bounded domain*, Nonlinear Analysis, **185** (2019) 356–373.

17 G. M. Coclite and L. di Ruvo *Well-posedness of the classical solutions for a Kawahara–Korteweg–de Vries-type equation*, J. Evol. Equ (2020). https://doi.org/10.1007/s00028-020-00594-x

18 E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, (1955).

19 T. Colin and M. Gisclon, *An initial-boundary-value problem that approximate the quarter-plane problem for the Korteweg-de Vries equation*, Nonlinear Anal., 46 (2001), 869–892.

20 J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Vol. 136, 2007.

21 Sh. Cui and Sh. Tao, *Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation*, J. Math. Anal. Appl., 304 (2005), 683–702.

22 S. B. Cui, D. G. Deng and S. P. Tao, *Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equation with L_2 initial data*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **22** (2006), 1457–1466.

23 S. Dolecki and D. L. Russell, *A general theory of observation and control*, SIAM J. Control Optimization 15 (1977), 185–220.

24 G. G. Doronin and N. A. Larkin, *KdV Equation in Domains with Moving Boundaries*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 503-515.

25 E. Emmrich, *Discrete versions of Gronwall's Lemma and their Applications to the Numerical Analysis of Parabolic Problems,* Preprinto No 637, Jully 1999, Preprint Reihe Mathematik Techniche Universität Berlin, Fachbereich Mathematik.

26 L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

27 A. V. Faminskii, *On an initial boundary value problem in a bounded domain for the Generalized Korteweg-de Vries Equation*, Funct. Diff. Eq. 8 (2001) 1-2, 183-194.

28 A. V. Faminskii, *An initial boundary-value problem in a half-strip for the Korteweg-de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces*, Comm. Partial Differential Equations, 29 (2004), 1653–1695.

29 A. V. Faminskii and N. A. Larkin, *Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval,* Electron. J. Differential Equations, (1) (2010), 1-20.

30 A. V. Faminskii, *Control Problems with an Integral Condition for Korteweg–de Vries Equation on Unbounded Domains,* Journal of Optimization Theory and Applications, (180) (2019), 290–302

31 A. V. Faminskii, *Controllability Problems for the Korteweg–de Vries Equation with Integral Overdetermination*, Diff Equat 55 (2019), 126-–137 .

32 O. Glass and S. Guerrero, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*, Asymptot. Anal. (60) no. 1-2 (2008), 61–100.

33 O. Glass and S. Guerrero, *On the controllability of the fifth-order Korteweg–de Vries equation*, Ann. I. H. Poincaré **26** (2009) 2181—2209.

34 A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).

35 O. Goubet and J. Shen, *On the dual Petrov-Galerkin formulation of the KdV equation on a finite interval*, Adv. Differential Equations (12) 2 (2007), 221–239.

36 L. Hörmander, *Linear Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1969.

37 T. Iguchi, *A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara Equations*, Academia Sinica (New Series), **2** (2), (2007), 179–220.

38 T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, **33** (1972), 260–264.

39 C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 527-620.

40 V. V. Khablov, *Some Well-Posed Boundary Value Problems for the Korteweg-De Vries Equation*, Preprint, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Acad. Nauk SSSR, Novosibirsk, *1979.*

41 N. Khanal, J. Wu and J.-M. Yuan, *The Kawahara equation in weighted Sobolev space*, Nonlinearity, **21** (2008), 1489–1505.

42 D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag., 39 (1895), 422–443.

43 N. A. Larkin, *Korteweg-de Vries Equation in Bounded Domains,* Bol Soc. Paran. Mat. vol 22 (2004), 30-37 .

44 N. A. Larkin, *Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains*, J. Math. Anal. Appl. 297(1) (2004), 169-185.

45 F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear Dispersive Equations,* Editora IMPA, 2006.

46 J.-L. Lions, Sur Les Problemes Aux Limites Du Type Derivee Oblique, Ann. Math. (64) (1956), 207-239

47 J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988.

48 J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Review, (30) (1988), 1–68.

49 J. -L. Lions and E. Magenes, *Probléms aux limites non homogènes et applications.* Vol 1, Travaux et Recherches Mathemátiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

50 L. A. Medeiros e P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

51 L. A. Medeiros e M. Milla Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

52 G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of Appl. Math., LX (1) (2002), 111-129.

53 A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

54 Rayleigh, (J.W. Strutt) *On waves.* Phil. Mag., 1:257-271, 1876

55 L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Cal. Var., **2** (1997), 33–55.

56 L. Rosier and B. Y. Zhang, *Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Preprint 2000.

57 J. S. Russell, *Report on waves.* Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.5.

58 G. Schneider and C. E. Wayne, *The Rigorous Approximation of Long-Wavelength Capillary-Gravity Waves*, Arch. Rational Mech. Anal. 162 (2002) 247–285.

59 S. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed Appicata CXLXVI *IV*, (1987) 65-96

60 J. A. Soriano, M. Moreira e V. N. Domingos, *Semigrupos lineares e não lineares e aplicações*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1999)

61 G. G. Stokes, *On the theory of oscillatiory waves.* Trans. Camb. Philos. Soc, 1:8:441-55, 1847.

62 B. A. Ton, *Initial boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation*, J. Differential Equations, 25 (1977), 288–309.

63 K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin (1969).

64 J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

65 E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Rev., vol. 47, n 2, p. 197-243 (electronic), 2000.