UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DMAT
INICIAÇÃO CIENTÍFICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E CONTROLE

Primeiro relatório de projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Iniciação Científica do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

Aluno: Daniel Alves de Lima

Professor orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho

Janeiro
2022

Conteúdo

1 Resumo

Os tópicos inicialmente estudados pelo aluno Daniel Alves foram uma introdução em Equações Diferenciais Ordinárias para que este pudesse obter conhecimento necessário para compreender os conceitos e aplicações no estudo de Controle. Este estudo tem por objetivo analisar o problema de determinar como e quando um estado específico pode ser atingindo por um sistema a partir da escolha de uma estratégia de controle.

2 Apresentação

Neste relatório será abordado os principais tópicos estudados em Equações Diferenciais Ordinárias para o estudo de Controle. O tema principal é Equações Lineares Não Autônomas, cujo objetivo é compreender melhor a obtenção de soluções de equações do tipo $x' = A(t)x + b(t)$, que será estudado em controle. Veremos que as soluções dessas equações são únicas para cada condição inicial através do estudo em Espaços Métricos. Abordaremos Matriz fundamental e Resolvente, necessário para obtenção de soluções, na forma explicita, dessas equações lineares. Finalmente, faremos um estudo em Exponencial de Matrizes, onde definiremos este conceito e estabelecer propriedades que são necessárias para a resolução de problemas em Controle utilizando o Critério da Integral quando a matriz $A(t)$, numa equação linear $x' = A(t)x + Bu$, não depende do tempo.

Por fim, definiremos Controlabilidade e veremos alguns exemplos.

3 Descrição de atividades

As atividades são através de seminários semanais onde o aluno faz uma exposição do que foi estudado durante a semana de acordo com a ementa e orientações dadas pelo professor. O estudo é realizado através de livros-texto e apostilas recomendadas pelo orientador de modo que um complemente o outro para que o entendimento dos assuntos seja o melhor possível.

4 Análise dos Resultados

4.1 Equações Lineares Não Autônomas

Considere a equação diferencial ordinária linear

$$x' = A(t)x + b(t)$$

em $\mathbb{R}^n$, onde $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

- Uma solução de $x' = A(t)x + b(t)$ é uma função derivável $x : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação para cada $t \in I$.

- Qualquer solução x é de classe C^1 no $\mathbb{R}^n$.

- Uma condição inicial da equação se representa fixando $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ de modo que $x(t_0) = x_0$.

Sejam um espaço métrico M e uma aplicação $\omega : M \to M$. Definimos as iteradas de um ponto $x \in M$ indutivamente por $x_0 = x$ e $x_{n+1} = \omega(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Iteradas também são denominadas aproximações sucessivas. Note que $x_n = \omega^n(x),\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Um ponto $a \in M$ é um ponto atrator de ω se $\lim \omega(x_n) = a$ para as aproximações sucessivas de qualquer ponto $x \in M$.

Sejam M um espaço métrico e uma aplicação $\omega : M \to M$. Um ponto $a \in M$ é um ponto fixo de ω se $\omega(a) = a$.

Uma aplicação $\omega : M \to M$ (de um espaço métrico (M, d)) é uma contração se ω é lipschitziana de constante $\lambda < 1$,isto é, existe $\lambda > 0$ tal que $d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda d(x, y),\ \forall x, y \in M$ com $\lambda < 1$. Dizemos que neste caso λ é um fator de contração de ω.

Considere o seguinte resultado.

Teorema. *Sejam um espaço métrico (M, d) e uma aplicação $\phi : M \to M$ tal que exista uma iterada de ϕ que é uma contração (isto é, ϕ^k é uma contração para algum inteiro $k \geq 1$). Então existe um único ponto fixo atrator de ϕ, ou seja, um único ponto $a \in M$ tal que $\lim \phi^n(x) = a$ para todo $x \in M$.*

A demonstração deste teorema é muito extensa e segue do teorema do ponto fixo de contrações. Mas, está fora do escopo de estudo.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

onde $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua no aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variavel espacial em $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, se existe $k > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$ para todo $(t, x), (t, y) \in U$ de mesma primeira coordenada t.

Suponhamos que $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contém $I \times \mathbb{R}^n$, para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e um ponto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

qualquer. Então, um caminho derivável $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema de valor inicial se, e somente se, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall t \in I$. Isto, motiva a definição de uma função $\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R}^n)$ (conjunto das funções contínuas de I para $\mathbb{R}$) tal que

$$\mathcal{L} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall t \in I$$

.

Se I é um intervalo compacto, então $(\mathcal{F}, d)$ é um espaço métrico completo com métrica

$$d(\mu, \upsilon) = \sup_{t \in I} |\mu(t) - \upsilon(t)|$$

.

Lema. *Se $k > 0$ é uma constante de lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$, então $|\mathcal{F}^m(\mu)(t) - \mathcal{F}^m(\upsilon)(t)| \leq \frac{k^m}{m!}|t - t_0|^m d(\mu, \upsilon)$ para quaisquer $\mu, \upsilon \in \mathcal{F}, \ m \geq 0$ e $t \in I$.*

Demonstração. Evidente para $m = 0$ pela definição de $d(\mu, \upsilon)$. Dadas funções $\mu, \upsilon \in \mathcal{F}$, temos que

$$\mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\upsilon)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \mu(s))ds - (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \upsilon(s))ds) =$$

$$\int_{t_0}^{t} (f(s, \mu(s)) - f(s, \upsilon(s)))ds$$

Então, para cada $t \in I$,

$$|\mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\upsilon)(t)| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, \mu(s)) - f(s, \upsilon(s))|ds| \leq k|\int_{t_0}^{t} |\mu(s) - \upsilon(s)|ds| \leq$$

$$kd(\mu, \upsilon)|\int_{t_0}^{t} ds| \leq kd(\mu, \upsilon)|t - t_0|$$

onde $k > 0$ é uma constante de lipschitz de f. O lema está provado para n=1. Aplicando $\mathcal{L}(\mu)$ e $\mathcal{L}(\upsilon)$ em vez de μ e υ na desigualdade $|\mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\upsilon)(t)| \leq k|\int_{t_0}^{t} |\mu(s) - \upsilon(s)|ds| \leq kd(\mu, \upsilon)|t - t_0|$ temos que

$$|\mathcal{L}^2(\mu)(t) - \mathcal{L}^2(\upsilon)(t)| \leq k|\int_{t_0}^{t} |\mathcal{L}(\mu)(s) - \mathcal{L}(\upsilon)(s)|ds| \leq k^2 d(\mu, \upsilon)|\int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds| =$$

$$k^2 d(\mu, \upsilon)\frac{1}{2}|t-t_0|^2$$

que prova o lema para n=2. O lema segue por indução repetindo várias vezes as mesmas etapas. $\square$

Teorema. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se $[a,b]\times\mathbb{R}^n \subset U$ e f é lipschitziana em $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $t_0 \in [a,b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida no intervalo $[a,b]$.

Demonstração. Tome $l = b-a$. Como a série $\sum \frac{1}{m!}(kl)^m = e^{kl}$ é convergente, seu termo geral tende a zero, isto é, $\lim_{m\to 0} \frac{(kl)^m}{m!} = 0$. Portanto, podemos escolher m grande tal que $\frac{k^m}{m!}|t-t_0|^m \leq \frac{(kl)^m}{m!} = \eta < 1$, onde $k > 0$ é uma constante de lipschitz de f. Pelo lema anterior, tem-se

$$d(\mathcal{L}^m(\mu), \mathcal{L}^m(\upsilon)) = \sup_{t\in I} |\mathcal{L}^m(\mu)(t) - \mathcal{L}^m(\upsilon)(t)| \leq \nu d(\mu, \upsilon)$$

onde vemos que $\mathcal{L}^m$ é uma contração do espaço métrico completo $\mathcal{F} = C(I, \mathbb{R})$. Pelo teorema acima, existe um único ponto fixo $x \in \mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$, isto é, $\mathcal{L}(x) = x$. Mas, isto significa que x é a única solução do P.V.I. acima. $\square$

Teorema. *Se $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então para quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação $x' = A(t)x + b(t)$ possui uma única solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração. Seja $[a,b] \subset I$. A aplicação $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ é contínua em $I \times \mathbb{R}^n$ e satisfaz

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|$$

onde $k = \sup_{t\in[a,b]} ||A(t)|| < \infty$ pois $A(t)$ é limitado pela compacidade $[a,b]$ e continuidade da função $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$. O teorema anterior garante existência e unicidade de solução em $[a,b]$. Se o intervalo I é compacto, há nada para provar. Se o intervalo I for qualquer, fixemos $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tomando uma sequência crescente de intervalos fechados $[a_m, b_m]$ tais que $a_m \leq t_0 \leq b_m$ e $I = \cup[a_m, b_m]$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, obtém-se uma solução $x_m(t)$ em $[a_m, b_m]$ tal que $x_m(t_0) = x_0$. Pondo, em todo $t \in I$, $x(t) = x_m(t)$, a solução x vale para todo intervalo I por unicidade. $\square$

4.1.1 Espaço de Soluções

Agora, veremos que o espaço vetorial S_0 das soluções $x' = (t)x$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$ e que $dim S_0 = n$, para podermos obter n soluções $x_1, \cdots, x_n \in S_0$ linearmente independentes e definir matriz fundamental. É com esta matriz que iremos definir o resolvente de $x' = A(t)x$ e obter uma solução explicita para $x' = A(t)x + b(t)$. Mas antes, vejamos que o conjunto S de todas as soluções de $x' = A(t)x + b(t)$ é um espaço vetorial afim em $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ (conjunto de funções de classe C^1).

Seja $S_0 \subset C^1(I, \mathbb{R})$ o conjunto de todas soluções de $x' = A(t)x$. Note que, $x = 0$ é trivialmente solução. Dados $x_1, x_2 \in S_0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, temos que $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução. Com efeito, para cada $t \in I$ vale $(c_1x_1 + c_2x_2)' = c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) = c_1A(t)x_1 + c_2A(t)x_2 = A(t)(c_1x_1 + c_2x_2)(t)$. Logo, S_0 é subespaço vetorial de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Vejamos que S é afim. Sejam $x_p \in S$ e $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, vejamos que $S = x_p + S_0$. Com efeito, se $x \in S$ então para todo $t \in I$, $(x - x_p)'(t) = x'(t) - x_p'(t) = A(t)x(t) + b(t) - A(t)x_p(t) - b(t) = A(t)(x - x_p)(t)$, ou seja, $x - x_p \in S_0$. Então, $S - x_p \in S_0$. Reciprocamente, se $x - x_p \in S_0$ então $x'(t) = (x - x_p)'(t) + x_p'(t) = A(t)(x - x_p)(t) + A(t)x_p(t) + b(t) = A(t)x(t) + b(t)$ para todo $t \in I$, ou seja, $x \in S$. Então, $S_0 \subset S - x_p$ Logo, $S_0 = S - x_p$ ou seja $S = x_p + S_0$ para qualquer solução particular $x_p \in S$.

Fica provado então que S é um espaço vetorial afim. Note que, para encontrar todas as soluções de $x' = A(t)x + b(t)$, basta encontrar uma solução particular sua e qualquer solução de $x' = A(t)x$.

Teorema. *O espaço vetorial S_0 é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e $dim S_0 = n$. Precisamente, para qualquer $t_0 \in T$ fixo, $T(x) = x(t_0)$ define um isomorfismo $T : S_0 \to \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. É fácil ver que T é uma transformação linear. Vejamos que T é uma bijeção. A existência de soluções com $x(t_0) = x_0$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer, garante que T é sobrejetora. Pela unicidade das soluções, temos que se $x, y \in S_0$ com $x(t_0) = y(t_0)$ então $x = y$. Portanto, T é injetora. Logo, T é um isomorfismo. $\square$

Pelo teorema, as soluções $x_1, \cdots, x_n \in S_0$ são L.I. se, e somente se, para algum $t_0 \in I$, os vetores $x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0) \in \mathbb{R}^n$ são L.I..

4.1.2 Matriz Fundamental e Resolvente

Uma equação diferencial matricial é escrita na forma $X' = A(t)X$ onde X é uma matriz $n \times n$.

- Uma solução de $X' = A(t)X$ é uma função derivável $X : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que satisfaz $X'(t) = A(t)X(t)$ para cada $t \in I$. Toda solução é de classe C^1 em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- Fixando $(t_0, x_0) \in I \times M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $X(t_0) = x_0$, temos uma condição inicial.

- Uma função X é solução se, e somente se, cada coluna de X é solução de $x' = A(t)x$. De fato, pondo $X = (x_1, \cdots, x_n)$ em colunas $x_i = Xe_i \in \mathbb{R}^n$ ($\{e_i\}_{i=1}^{i=n}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$), temos $(x_1', \cdots, x_n') = X' = A(t)X = A(t)(x_1, \cdots, x_n) = (A(t)x_1, \cdots, A(t)x_n)$. Assim, $X' = A(t)X$ equivale a um sistema de n equações

$$X' = A(t)X \iff \begin{cases} x_1' = A(t)x_1, \\ x_2' = A(t)x_2, \\ \vdots \\ x_n' = A(t)x_n \end{cases}$$

  Portanto, existem e são únicos as soluções de $X' = A(t)X$.

Uma matriz fundamental da equação $x' = A(t)x$ é uma solução $X : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de $X' = A(t)X$ que possui colunas $x_1, \cdots, x_n$ linearmente independentes em $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Teorema. *Seja $X : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma solução da equação matricial $X' = A(t)X$ com colunas dadas por $x_1, \cdots, x_n : I \to \mathbb{R}^n$. Equivalem as afirmações:*

1. *X é uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$.*

2. *$detX(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$.*

3. *$x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)$ é uma base do $\mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$.*

4. *$detX(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Demonstração. Primeiro, note que uma matriz X é invertível se, e somente se, possui colunas linearmente independentes. Portanto, valem as seguintes equivalências: X é matriz fundamental $\iff$ $x_1, \cdots, x_n$ são L.I. em $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ $\iff$ $\exists t_0 \in I$; $x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)$ são L.I. em $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $\exists t_0 \in I$; $X(t_0)$ possui colunas L.I. $\iff$ $\exists t_0 \in I$; $X(t_0)$ é invertível $\iff$ $\exists t_0 \in I$; $\det X(t_0) \neq 0$. Então, as três primeiras afirmações são equivalentes. Suponhamos que não vale a quarta afirmação, isto é, existe $t^* \in I$ tal que $X(t^*) = 0$. Pela unicidade, X é a solução trivial donde $X(t) = 0$, $\forall t \in I$. Em particular, $X(t_0) = 0$ contradizendo a segunda afirmação. Logo, a quarta afirmação deve valer. □

Pondo $X(t_0) = I_d$ onde $\det I_d \neq 0$, vemos que toda equação homogênea $x' = A(t)x$ possui matriz fundamental.

Seja $X : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$. O resolvente de $x' = A(t)x$ é uma função $R : I \times I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, onde $R(t,u) = X(t)(X(u))^{-1}$.

Propriedades do Resolvente:

- $R(t,t) = I_d,\ \forall t \in I$
  Prova: $R(t,t) = X(t)(X(t))^{-1} = I_d$

- $R(t,u)R(u,z) = R(t,z)$
  Prova: $R(t,u)R(u,z) = X(t)(X(u))^{-1}X(u)(X(z))^{-1} = X(t)I_d(X(z))^{-1} = X(t)(X(z))^{-1} = R(t,z)$

- $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial t} = A(t)R(t,u)$
  Prova: $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial t} = \dfrac{\partial (X(t)(X(u))^{-1})}{\partial t} = X'(t)(X'(u))^{-1} = A(t)X(t)(X(u))^{-1} = A(t)R(t,u)$

- $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial u} = -R(t,u)A(u)$
  prova: Derivando $X(t)(X(t))^{-1} = I_d$, temos que $X(t)(X(t)^{-1})' = -X'(t)(X(t))^{-1} \implies (X(t)^{-1})' = -(X(t))^{-1}X'(t)(X(t))^{-1}$. Então, $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial u} = \dfrac{\partial (X(t)(X(u))^{-1})}{\partial u} = -X(t)(X(u))^{-1}X'(u)(X(u))^{-1} = -R(t,u)A(u)$.

Proposição. *Seja $X : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$ e sejam $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dados. Então,*

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u)b(u)du,\ \forall t \in I$$

é a unica solução de $x' = A(t)x + b(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Demonstração. Seja x a função definida como acima. Para $t = t_0$, temos que $x(t_0) = R(t_0,t_0)x_0 = x_0$. Derivando x em relação a variável t, temos que para todo $t \in I$ vale $x'(t) = A(t)R(t,t_0)x_0 + R(t,t)b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)R(t,u)b(u)du$ pela regra da cadeia. Mas, $\int_{t_0}^{t} A(t)R(t,u)b(u)du = x(t) - R(t,t_0)x_0 \implies \int_{t_0}^{t} A(t)R(t,u)b(u)du = A(t)x(t) - A(t)R(t,t_0)x_0$. Então, $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ verificando a existência de solução. A unicidade segue do fato de haver solução trivial apenas quando $x_0 = 0$ □

4.2 Exponencial de Matrizes

Considere uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e a norma euclideana $|\cdot|$ de $\mathbb{R}^n$. A norma de operador é definida por

$$||A|| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax|$$

Note que $Ax \in \mathbb{R}^n$, pois $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \simeq M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Vamos verificar que esta é realmente uma norma: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| \leq 1$.

1. $|(\lambda A)x| = |\lambda(Ax)| = |\lambda||Ax| \implies \|(\lambda A)x|| = |\lambda|||Ax||$
2. $|(A+B)x| = |Ax+Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\| \implies \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
3. $\|A\| = 0 \implies |Ax| = 0 \implies Ax = 0 \implies Ae_j = 0,\ j = 1, \cdots, n \implies A = 0$.

   $A = 0 \implies Ae_j = 0 \implies Ax = A(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i (Ae_i) = \sum \alpha_i 0 = 0 \implies |Ax| = 0 \implies \|A\| = 0$. Então, $\|A\| = 0 \iff A = 0$.

Lema. *Dados $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, valem*

1. $|Ax| \leq \|A\||x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Demonstração.

1. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$, tem-se $|\dfrac{x}{|x|}| = 1$. Então, $\dfrac{|Ax|}{|x|} = |A\frac{x}{|x|}| \leq \|A\| \implies |Ax| \leq \|A\||x|$.
2. $|(AB)x| = |A(Bx)| \leq \|A\||Bx| \leq \|A\|\|B\||x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Se $|x| \leq 1$, então $|(AB)x| \leq \|A\|\|B\|$. Tomando o supremo, vale $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. □

Pondo $B = A$ e aplicando a segunda afirmação acima repetidas vezes, vale $\|A^m\| \leq \|A\|^m,\ \forall m \in \mathbb{N}$, onde escrevemos $A^0 = I_d,\ A^1 = A$ e $A^{m+1} = A^m A$. Com efeito, temos $\|A^0\| = \|I\| = \|A\|^0 = 1$. Supondo $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, segue-se $\|A^{m+1}\| = \|A^m A\| \leq \|A^m\|\|A\| \leq \|A\|^m\|A\| = \|A\|^{m+1}$.

A matriz exponencial de uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é

$$e^A = I_d + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

Para que isto fique bem definido precisamos saber se esta série converge.

Dizemos que uma série $\sum x_n$ em $\mathbb{R}^n$ (ou $M_{n\times m}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nm}$) é absolutamente convergente segundo a norma $|\cdot|$ se a série numérica $\sum |x_n|$ é convergente. Toda série absolutamente convergente é convergente. Vejamos que $\sum \dfrac{1}{j!}A^j$ é absolutamente convergente. Pondo $S_n = \sum_{j=0}^{j=n} \|\dfrac{1}{j!}A^j\|$, usando as propriedades acima, temos $S_n \leq \sum_{j=0}^{j=n} \dfrac{1}{j!}\|A\|^j$. Como o termo á direita da desigualdade converge com $\lim \sum \dfrac{1}{j!}\|A\|^j = e^{\|A\|}$, temos que S_n é limitada. Então, S_n é uma sequência monótona e limitada, logo convergente. Portanto, podemos concluir que $\sum \dfrac{1}{j!}A^j$ é absolutamente convergente segundo a norma $\|\cdot\|$, ou seja $\sum \dfrac{1}{j!}A^j$ converge. Assim, a exponencial e^A está bem definida para qualquer matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo: Calculo da exponencial de uma matriz diagonal

$$D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que $D^j = diag(\lambda_1^j, \cdots, \lambda_n^j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Assim, $e^D = \sum \dfrac{1}{j!}D^j = \sum \dfrac{1}{j!}diag(\lambda_1^j, \cdots, \lambda_n^j) = diag(\sum \dfrac{1}{j!}\lambda_1^j, \cdots, \sum \dfrac{1}{j!}\lambda_n^j) = diag(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$. Em particular, $e^0 = I_d$ e $e^{I_d} = diag(e, \cdots, e) = eI_d$.

Proposição. *Dados uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \to e^{tA}$ em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $t \to e^{tA}x_0$ em $\mathbb{R}^n$ são deriváveis com*

$$\frac{d(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ e \ \frac{d(e^{tA}x_0)}{dt} = Ae^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Precisaremos de dois resultados para demonstrar a proposição:

1. Para cada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, valem $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$, $\|e^A - I_d\| \leq e^{\|A\|} - 1 \leq \|A\|e^{\|A\|}$ e $\|e^A - I_d - A\| \leq e^{\|A\|} - 1 - \|A\| \leq \|A\|^2 e^{\|A\|}$.

   Demonstração. Temos que,

   - $S_n \leq \sum_{j=0}^{j=n} \dfrac{1}{j!}\|A\|^j \implies \lim S_n \leq e^{\|A\|}$

- $\|\sum_{j=0}^{j=n} A^j\| \leq \sum_{j=0}^{j=n}\|\frac{1}{j!}A^j\| = S_n$

Segue-se, $\|e^A\| = \|\lim \sum \frac{1}{j!}A^j\| = \lim\|\sum \frac{1}{j!}A^j\| \leq \lim S_n \leq e^{\|A\|}$.

Vejamos que $\|e^A - I_d\| \leq e^{\|A\|} - 1 \leq \|A\|e^{\|A\|}$. Tem-se, $\|\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!}A^j - I_d\| \leq \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j!}\|A\|^j = \sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!}\|A\|^j - 1 = \|A\| \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j!}\|A\|^{j-1} \leq \|A\| \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{(j-1)!}\|A\|^{j-1}$ pois $\frac{1}{j!} \leq \frac{1}{(j-1)!}$. "Passando"o limite, temos $\|e^A - I_d\| \leq e^{\|A\|} - 1 \leq \|A\|e^{\|A\|}$. A última desigualdade se mostra de modo análogo. □

2. Seja $X : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ um caminho contínuo de matrizes que é derivável em $0 \in \mathbb{R}$. Suponha que $X(0) = I_d$ e $X(t+u) = X(t)X(u)$, $\forall t, u \in \mathbb{R}$. Então, X é derivável em cada $t \in \mathbb{R}$ com $X'(t) = X'(0)X(t)$.

   Demonstração. Dado $t \in \mathbb{R}$, temos $X'(t) = \lim_{u\to 0} \frac{X(u+t) - X(t)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{X(u)X(t) - X(0)X(t)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{X(u) - X(0)}{u}X(t) = X'(0)X(t)$. □

Demonstração da proposição: Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $t \in R$. Escrevendo $X(t) = e^{tA}$, temos $X(0) = e^0 = I_d$. Afirmamos que, $X(t+u) = X(t)X(u)$, $\forall t, u \in \mathbb{R}$. Com efeito, pela lei do binômio, temos

$$\frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \frac{1}{j!}(t+u)^j A^j = (\sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!}\frac{u^s}{s!})A^j = \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!}A^r \frac{u^s}{s!}A^s$$

e portanto, $e^{tA+uA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r+s=j} \frac{1}{r!}(tA)^r \frac{1}{s!}(uA)^s$. Então, e^{tA+uA} é o produto de Cauchy das matrizes absolutamente convergentes $e^{tA} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(tA)^r$ e $e^{uA} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}(uA)^s$, ou seja, e^{tA+uA} converge e $e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA}$. Assim, vale $X(t+u) = e^{(t+u)A} = e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA} = X(t)X(u)$. Agora, vejamos que $X'(0) = A$. Considere $0 < |t| < 1$. Pelo primeiro item, temos que $\|\frac{1}{t}(e^{tA} - I_d) - A\| = \frac{1}{|t|}\|e^{tA} - I_d - tA\| \leq \frac{1}{|t|}\|tA\|^2 e^{\|A\|} = |t|\|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \leq |t|\|A\|^2 e^{\|A\|}$ pois $e^{|t|\|A\|} \leq e^{\|A\|}$. "Passando"o limite, segue que $X'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{X(t) - X(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tA} - I_d}{t} = A$. Pelo segundo item, X é derivável e $X'(t) = AX(t)$, ou seja, $\dfrac{d(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA}$. Por outro lado, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a função $x(t) = X(t)x_0 = e^{tA}x_0$ é derivável com $x'(t) = X'(t)x_0 = AX(t)x_0 = Ae^{tA}x_0$.

Teorema. *Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. O caminho $x(t) = e^{tA}x_0$, $t \in \mathbb{R}$, define a única solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$.*

Teorema. *Se $A, B, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ são tais que $AQ = QB$, então $e^AQ = Qe^B$. Em particular, se Q é invertível, então $A = QBQ^{-1}$ e $e^A = e^{QBQ^{-1}} = Qe^BQ^{-1}$.*

Demonstração. Primeiro, vejamos que $A^jQ = QB^j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Temos, $AQ = B$ e $A^jQ = QB^j \implies A^{j+1}Q = A^jAQ = A^jQB = QB^jB = QB^{j+1}$ logo vale por indução. Segue-se, $e^AQ = (\sum \frac{1}{j!}A^j)Q = \sum \frac{1}{j!}A^jQ = \sum \frac{1}{j!}QB^j = Q(\sum \frac{1}{j!}b^j) = Qe^B$. □

Os teoremas acima são necessários para estabelecer propriedades para exponencial de matrizes de modo análogo ao usual em $\mathbb{R}$, como $e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$ e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Corolário. *Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, temos:*

1. *Se $AB = BA$, então $e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$.*
2. *A matriz e^A é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$. Se $AB = BA$, então $B(tA) = t(BA) = t(AB) = (tA)B$, e pelo teorema anterior, temos $Be^{tA} = e^{tA}B$. Fixando $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos $x(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$. Pela regra da derivada do produto, $x'(t) = Ae^{ta}e^{tB}x_0 + e^{tA}Be^{tB}x_0 = Ax(t) + Bx(t) = (A+B)x(t)$. Então, $x(t)$ é solução de $x' = (A+B)x$ com condição inicial $x(0) = x_0$. Pelo teorema acima, $x(t) = e^{t(A+B)}x_0 = e^{tA}e^{tB}x_0$. Tomando $t = 1$, vale $e^{A+B}x_0 = e^Ae^Bx_0$. Pondo $x_0 = e_j$, fica evidente que as colunas de e^{A+B} e e^Ae^B são as mesmas, isto é, que e^{A+B} e e^Ae^B são a mesma matriz e $e^{A+B} = e^Ae^B$.

Em particular, $e^Ae^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_d$, ou seja, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. □

4.3 Controlabilidade

Sejam $A, B : [0, T] \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ funções contínuas no intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Diremos que o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \ \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é controlável se para todo $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, existe função $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ contínua tal que $x(T) = x_T$, onde $x = x(t)$ é a solução do sistema. Chamaremos u de controle e diremos que u leva o sistema do estado inicial x_0 em $t = 0$ para o estado final x_T em $t = T$.

Exemplo: Seja uma função $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(t) \neq 0, \ \forall t \in [0,T]$.

$$\begin{cases} x' = f(t)u \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Então, o sistema é controlável. Com efeito, dado $x_T \in [0,T]$ tome $u = \dfrac{x_T - x_0}{Tf(t)}$. Então, $x(T) - x_0 = \int_0^T f(t)u(t)dt = \int_0^T \dfrac{x_T - x_0}{T}dt = T\dfrac{x_T - x_0}{T} = x_T - x_0 \implies x(T) = x_T$. Logo, o sistema é controlável.

Exemplo: Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema $x' = Ax + Bu$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u \\ x_2' = x_{2_0}e^t \end{cases}$$

com dado inicial (x_{1_0}, x_{2_0}). Este sistema não é controlável pois qualquer controle u que escolhermos não influencia no comportamento de x_2 que é determinado por x_{2_0}.

5 Trabalhos Futuros

Os próximos passos serão estudar dois resultados importantes na teoria de Controle tais como o Critério da Integral e o Critério de Kalman. Em seguida, o aluno estudará Controle Ótimo nos tópicos Problema de Tempo Mínimo e Princípio do Máximo de Pontryagin, e finalmente, o exemplo do carro com dois motores.

Bibliografia

E. CERPA, P. GAJARDO, Control y optimización de sistemas dinámicos.
C. I. Doering, A. O. Lopes, Equações Diferenciais Ordinárias.
J.-M. Coron, Control and Nonlinearity.
J. Baumeister, A. Leitão, Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica.