• **Projeto:** Equações Diferenciais Ordinárias, Introdução à Teoria do Controle e Análise Funcional

• **Orientador**: Roberto de A. Capistrano Filho -

CPF: 008.167.044-30

• **Instituição**: Universidade Federal de Pernambuco,

Campus: Recife.

• **Centro**: Centro de Ciências Exatas e da Natureza

• **Departamento**: Departamento de Matemática

• **Bolsista**: Mateus Ferreira de Melo - CPF: 110.588.484-88

• **Vigência do projeto**: 08/02/2018 à 08/11/2019

• **e-mail**: capistranofilho@dmat.ufpe.br

RESUMO DO TRABALHO.

O presente estudo dedica-se a expor os resultados assimilados pelo bolsista durante a vigência do projeto. Como principal objetivo, o aluno empenhou-se em apresentar uma releitura dos principais conceitos sobre o tema abordado.

O primeiro conceito estudado é o de espaço métrico. Aqui, analisa-se suas propriedades gerais, de modo a abordar o caso de um espaço métrico completo, cujo estudo em conjuntos mais particulares gera o conceito de Espaços de Banach e Espaços de Hilbert.

Dentre outros resultados importantes que trataremos está o Teorema de Hahn-Banach, o qual permite que funcionais lineares definidos em um subespaço de um espaço vetorial sejam estendidos a todo o espaço. Além disso, estudaremos transformações lineares em espaços de Hilbert, com o intuito de estudarmos o famoso Teorema da Representação de Riesz.

Ainda mais, é apresentado o conceito de espaços reflexivos e suas características em espaços previamente estudados. Por fim, o Teorema da Categoria de Baire é apresentado, o qual enuncia que espaços métricos completos não são magros. Tal resultado gera inúmeras consequências em Análise Funcional, e dentre estas, este relatório expõe o Teorema da Limitação Uniforme, que apresenta hipóteses para que uma sequência de operadores seja limitada em um espaço de Banach.

SUMÁRIO (índice)

INTRODUÇÃO (relevância do trabalho e revisão da literatura)

Análise funcional é o ramo da análise matemática que trata do estudo de espaços vetoriais munidos de certas estruturas (por exemplo, normas, produtos internos e topologias) e funções lineares definidas nesses espaços que respeitem tais estruturas em um certo sentido. Sua importância deriva do fato de ser uma grande ferramenta no estudo de equações diferenciais e integrais, de modo que o entendimento do aluno no assunto mostra-se útil para seu futuro acadêmico.

OBJETIVOS (geral e específicos)

Do ponto de vista científico, o objetivo deste projeto é o estudo de modelos matemáticos que possuem como representação uma Equação Diferencial Parcial (EDP). Contudo, para um entendimento preciso dessas equações alguns pontos básicos devem ser estudados pelos aluno. Assim, de forma entender bem as EDP's, o bolsista estudará um ramo da matemática conhecido por Análise Funcional. A Análise Funcional trata do estudo de espaços de funções e faz uso de muitos conceitos de Álgebra Linear, com ênfase para espaços vetoriais de dimensão infinita.

Tal projeto não possui somente objetivos do ponto de vista científico. Do ponto de vista socioeconômico, a ideia do coordenador do projeto é acompanhar o aluno, desde o início da graduação, para consequentemente, ao final de seu curso, tentar compreender quais foram as dificuldades enfrentadas por ele e se este alunos está apto a ingressar em uma pós-graduação. Como, em Recife e região, temos um número baixo de alunos formados em matemática anualmente, a ideia do projeto é acompanhar o aluno bolsista até o final de seu bacharelado e com isso garantir que Recife e região possuam professores mais qualificados e aptos a atuarem em escolas públicas ou privadas, bem como em universidades públicas e privadas da região.

METODOLOGIA DO TRABALHO

Os seminários foram apresentados semanalmente pelo bolsista para o orientador e discutidos baseando-se fortemente em [1] e [2]. Os demais livros foram usados como leitura complementar para o aluno.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

1 Espaços Métricos

Definição *Dado um conjunto X, um espaço métrico é um par (X, d), em que $d: X \times X \to \mathbb{R}$ é uma métrica, ou seja, uma função que cumpre as seguintes propriedades:*

Para quaisquer $x, y, z \in X$, temos:

1. $d(x, y) \geqslant 0$ e $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (Definida positiva)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria)
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade Triangular).

Exemplos:

• Seja s o espaço das sequências com valores reais. Dados $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em s, definimos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}\right)$$

onde o fator $\frac{1}{2^n}$ é para que a série convirja.

Definição *Dado um espaço métrico X, um elemento $x \in X$ e $r > 0$, a bola aberta de raio r é o conjunto*

$$B(x; r) = \{y \in X: d(x, y) < r\}$$

e a *bola fechada de raio r*

$$\bar{B}(x; r) = \{y \in X: d(x, y) \leqslant r\}$$

1.1 Espaços Métricos Completos

Definição *Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço métrico X é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ se } n, m \geqslant N$$

Dizemos que (x_n) é *convergente* em X se existe $x \in X$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ se } n \geqslant N$$

Neste caso escrevemos $x_n \to x$ e dizemos que x é o limite da sequência (x_n).

Proposição 1 *O limite de uma sequência em um espaço métrico X é único.*

Demonstração. Seja (x_n) em X com $x_n \to x$ e $x_n \to y$, sendo $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N_1$$
$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N_2$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, vale pela Desigualdade Triangular:

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_N) + d(x_N, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, segue que $d(x, y) = 0$ e $x = y$.

Proposição 2 *Toda sequência convergente em um espaço métrico X é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X com $x_n \to x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N$$

Assim

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ se } n, m \geqslant N$$

Definição *Um espaço métrico X é completo se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.*

Sabemos que o espaço $\mathbb{R}$ dotado da métrica $d(x, y) = |x - y|$ é completo.

Proposição 3 *Seja X um espaço métrico completo e Y um subconjunto fechado de X. Então Y é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em Y. Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Mas por definição, temos que $x \in \bar{Y} = Y$, logo toda sequência de Cauchy em Y é convergente em Y e este é completo.

2 Espaços de Banach e Hilbert

Definição *Seja X um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função* $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ *satisfazendo, para quaisquer* $x, y, z \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

1. $||x|| > 0$ e $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Nesse caso, X é dito espaço vetorial normado.

Já um *produto interno* em X é uma função $<\cdot,\cdot>: X \times X \to \mathbb{K}$ satisfazendo:

1. $< x, x >= 0$ e $< x, x >= 0 \ \leftrightarrow x = 0$;
2. $< \lambda x, y >= \lambda \cdot < x, y >$;
3. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$;
4. $< x, y >= \overline{< y, x >}$.

Note que em um espaço vetorial com produto interno, podemos definir a norma induzida

$$||x|| = \sqrt{< x, x >}$$

Em um espaço vetorial normado por sua vez, podemos definir uma métrica induzida

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Assim todo espaço munido de produto interno é um espaço normado, que por sua vez é um espaço métrico.

Se uma norma é proveniente de um produto interno, ela deve satisfazer a lei do paralelogramo:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

A verificação é imediata.

É válido também em X a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, em que, para quaisquer $x, y \in X$ vale

$$< x, y > \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Definição *Um espaço vetorial normado é um espaço de Banach se for um espaço métrico completo com a métrica induzida. Já um espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de produto interno que se torna um espaço de Banach com a norma induzida.*

Lema 1 *Todo produto interno é uma função contínua. Isto é, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $< x_n, y_n > \to < x, y >$.*

Demonstração. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} | < x_n, y_n > - < x, y > | &= | < x_n, y_n > - < x_n, y > + < x_n, y > - < x, y > | \\ &\leqslant | < x_n, y_n - y > | + | < x_n - x, y > | \\ &\leqslant ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Definição *Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear. T é dito limitada se existe um número real c tal que*

$$||T(x)|| \leqslant c||x||, \forall x \in X$$

Se T é uma transformação linear limitada, a *norma* de T é dada por

$$||T|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||T(x)||$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} &||T(x)|| \leqslant ||T|| \cdot ||x||, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X} \\ &||T_1 \circ T_2|| \leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2|| \end{aligned}$$

Lema 2 *Se $T: X \to Y$ é um operador linear, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T é limitado;
2. T é lipschtziano (ou seja, existe $c > 0$ tal que para todos $x, y \in X$ temos $||T(x) - T(y)|| \leqslant c||x - y||$) ;
3. T é contínuo.

Demonstração. • $i) \Rightarrow ii)$

Seja $c \in \mathbb{R}$ com $||T(x)|| \leqslant c||x||, \forall x \in X$. Em particular temos

$$||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)|| \leqslant c||x - y||, \forall x, y \in X$$

• $ii) \Rightarrow iii)$

Seja $c \in \mathbb{R}$ com $||T(x) - T(y)|| \leqslant c||x - y||, \forall x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon/c$. Então, fixado $x \in X$, temos

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(y)|| < c||x - y|| < c\delta = \varepsilon$$

O que implica que T é contínua em x. Como x era arbitrário, vale o resultado.

• $iii) \Rightarrow i)$

Em particular, temos que T é contínuo em 0. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x|| \leqslant \delta \Rightarrow ||T(x)|| \leqslant \varepsilon$$

Tome $y \in X$ não nulo e ponhamos

$$x = \frac{\delta}{||y||} \cdot y$$

Daí, $||x|| = \delta$ e temos $||T(x)|| \leqslant \varepsilon$. Mas

$$||T(x)|| = \left|\left|T\left(\frac{\delta}{||y||} \cdot y\right)\right|\right| = \frac{\delta}{||y||} \cdot ||T(y)||$$

Então

$$||T(x)|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow ||T(y)|| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} ||y||$$

Pondo $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$, obtemos o resultado.

Dado um espaço de Hilbert H, definimos o espaço normado

$$H' = \{f : H \to \mathbb{R} \mid \text{f é funcional linear limitado}\}$$

E fixado $y \in H$, definimos $\phi_y \in H'$ por $\phi_y(x) = < x, y >, \forall x \in H$. Note que ϕ_yé de fato limitada pois

$$||\phi_y(x)|| = || < x, y > || \leq ||x|| \cdot ||y||, \forall x \in H,$$

de modo que $||\phi_y|| \leq |||y||$. Com isso, definimos a função

$$\begin{aligned} A: H &\to H' \\ y &\mapsto \phi_y \end{aligned}$$

Proposição 4 (Teorema da Representação de Riesz) *A função A é uma isometria, ou seja, uma bijeção que preserva distâncias.*

Demonstração. • A preserva distâncias, i.e, $||\phi_y|| = ||y||, \forall y \in H$

Já sabemos que $||\phi_y|| \leqslant ||y||$. Para obter a desigualdade reversa, basta notar que

$$||\phi_y(y)|| = ||y||^2 \Rightarrow ||\phi_y|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||\phi_y(x)||}{||x||} \geqslant ||y||$$

• A é injetiva: A linearidade do produto interno na primeira coordenada implica a linearidade de A. Como $A(v) = 0$ implica $||v|| = ||A(v)|| = 0$, segue que $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ e portanto A é injetiva.

• A é sobrejetiva: O núcleo

$$M = \mathcal{N}(\phi)$$

de qualquer $\phi \in H'$ é um subespaço fechado. Com efeito, seja (x_n) uma sequência em M com $x_n \to x \in H$. Como ϕ é limitada, é contínua e segue que

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Logo, $x \in M$.

Se $M = H$, então $\phi = \phi_0$, ou seja, $\phi = A(0)$. Caso $M \neq H$, tome e unitário (i.e, $||e|| = 1$) pertecente a $M^{\perp} = \{ \mathrm{x} \in \mathrm{H} \mid < x, y > = 0,\ \forall \mathrm{y} \in \mathrm{M}\}$. Temos que $\phi(e)x - \phi(x)e \in M, \forall x \in H$ pois

$$\phi(\phi(e)x - \phi(x)e) = \phi(e)\phi(x) - \phi(x)\phi(e) = 0$$

Pela escolha de e, temos

$$\begin{aligned} 0 =< \phi(e)x - \phi(x)e, e > \quad &= \phi(e) < x, e > -\phi(x) < e, e > \\ &=< x, \phi(e)e > -\phi(x) \end{aligned}$$

Logo $\phi = \phi_y$, com $y = \phi(e)e$.

O Teorema da Representação de Riesz é importante pois implica que todo funcional linearlimitado ϕ em um espaço de Hilbert H é da forma $\phi(x) =< x, y >$, para algum $y \in H$.

3 Teorema de Hahn-Banach

Definição *Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto M, em que se está definida uma relação $\leqslant$ que satisfaz as condições*

1. $a \leqslant a, \forall a \in M$ (Reflexividade)
2. Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$ (Antissimetria)
3. Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $a \leqslant c$ (Transitividade)

Se além disso, $\leqslant$ satisfazer que dados $a, b \in M$, temos $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$, então M é dito *totalmente ordenado*.

Se $W \subset M$ é um subconjunto totalmente ordenado, uma *cota superior* de W é um elemento $u \in M$ tal que

$$x \leqslant u, \forall x \in W$$

Um *elemento máximo* é um elemento $m \in W$ satisfazendo

$$x \geqslant m \Rightarrow x = m, \forall x \in W$$

O lema a seguir é apenas um enunciado equivalente ao Axioma da Escolha.

Lema 3 (Lema de Zorn) *Seja M um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto totalmente ordenado de M possui uma cota superior. Então M possui ao menos um elemento máximo.*

Definição *Dado um espaço vetorial X, um sublinear funcional em X é uma função $p: X \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \forall x, y \in X$
- $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \geqslant 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

Proposição 5 (Teorema de Hahn-Banach (Caso Real)) *Seja X um espaço vetorial real e seja p um sublinear funcional em X. Seja Z um subespaço de X e $f: Z \to \mathbb{R}$ um funcional linear que satisfaz*

$$f(x) \leqslant p(x), \forall x \in Z$$

Existe uma extensão linear [1] $\tilde{f}$ de f em X que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Demonstração. Seja E o conjunto de todas as extensões lineares $g: D(g) \to \mathbb{R}$ de f que satisfazem

$$g(x) \leqslant p(x), \forall x \in D(g)$$

Note que $E \neq \varnothing$, pois $f \in E$. Definimos em E a relação de ordem parcial

$$g \leqslant h \leftrightarrow h \text{ é uma extensão de } g$$

ou seja, $D(g) \subseteq D(h)$ e $g(x) = h(x), \forall x \in D(g)$.

Mostremos que dado $C \subset E$ totalmente ordenado, existe uma cota superior em C. Em C, definimos

$$\hat{g}: \bigcup_{g \in C} D(g) \to \mathbb{R}$$

tal que $\hat{g}(x) = g(x), \forall x \in D(g)$. Temos que $\bigcup_{g \in C} D(g)$ é um subespaço vetorial pois C é totalmente ordenado. Além disso, $\hat{g}$ está bem definida pois dado $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$, temos

[1] Isto é, $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$

$g_1(x) = g_2(x)$ por definição de C. Por fim, basta notar que g é um funcional linear tal que $g \leqslant \hat{g}, \forall g \in C$. Logo, c é uma cota superior para C.

Pelo Lema de Zorn (Lema 4), podemos tomar um elemento máximo $\tilde{f} \in E$. Afirmamos que $D(\tilde{f}) = X$. Com efeito, suponha que exista $y_1 \in X \backslash D(\tilde{f})$. Defina $Y_1 = Span\{D(\tilde{f}), y_1\}$. Note que $y_1 \neq 0$, pois $0 \in D(\tilde{f})$. Dado $x \in Y_1$, temos

$$x = y + \alpha y_1, y \in D(\tilde{f}), \alpha \in \mathbb{R}$$

Tal representação é única. De fato, se $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$, com $y, \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, segue que

$$(y - \tilde{y}) = (\beta - \alpha) y_1$$

Como $y_1 \notin D(\tilde{f})$, a única solução possível é $y - \tilde{y} = 0$ e $\beta - \alpha = 0$. Isto implica a unicidade.

Dado c uma constante real qualquer, defina

$$\begin{aligned} g_1 : Y_1 & \to \mathbb{R} \\ y + \alpha y_1 & \mapsto \tilde{f}(y) + \alpha c \end{aligned} \tag{8}$$

Temos que g_1 é linear. Além disso, se $x = y + \alpha y_1 \in D(\tilde{f})$, então $\alpha = 0$ e vale $g_1(x) = \tilde{f}(x)$. Logo, g_1 é uma extensão própria de f, isto é, $D(\tilde{f}) \subsetneq D(g_1)$. Se mostrarmos que $g_1 \in E$ com

$$g_1(x) \leqslant p(x), \forall x \in D(g_1) \tag{9}$$

com c apropriado, teremos uma contradição ao fato de $\tilde{f}$ ser maximal em E.

Dados $y, z \in D(\tilde{f})$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) & = \tilde{f}(y - z) \\ & \leqslant p(y - z) \\ & = p(y + y_1 - y_1 - z) \\ & \leqslant p(y + y_1) + p(-y_1 - z) \end{aligned}$$

Logo

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant p(y + y_1) - \tilde{f}(y)$$

Tome

$$\begin{aligned} m_0 & = \sup_{z \in D(\tilde{f})} \{-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)\} \\ m_1 & = \inf_{y \in D(\tilde{f})} \{p(y + y_1) - \tilde{f}(y)\} \end{aligned}$$

e $c \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 \leqslant c \leqslant m_1$. Segue que

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant c, \forall z \in D(\tilde{f}) \tag{10}$$

$$p(y+y_1)-\tilde{f}(y) \geqslant c, \forall y \in D(\tilde{f}) \tag{11}$$

Provemos (9) inicialmente para $\alpha < 0$ em (8). Tomando $z = \alpha^{-1}y$ em (10), temos

$$-p(-y_1-\alpha^{-1}y)-\tilde{f}(\alpha^{-1}y) \leqslant c$$

Multiplicando por $(-\alpha)$:

$$p(-\alpha y_1 - y)+\tilde{f}(\alpha^{-1}y) \leqslant -\alpha c$$

Usando que $y_1+\alpha y = x \in Y_1 = D(g_1)$:

$$g_1(x) = \tilde{f}(y)+\alpha c \leqslant -p(-\alpha y_1 - y) = p(\alpha y_1 + y) = p(x)$$

Para $\alpha = 0$, temos $x \in D(\tilde{f})$ e portanto $g_1(x) = \tilde{f} \geqslant p(x)$. Se $\alpha > 0$, tomamos $\alpha^{-1}y$ em (11):

$$c \leqslant p(\alpha^{-1}y+y_1)-\tilde{f}(\alpha^{-1}y)$$

Multiplicando por $\alpha > 0$:

$$\alpha c \leqslant p(y+\alpha y_1)-\tilde{f}(y) = p(x)-\tilde{f}(y)$$

Daí

$$g_1(x) = \tilde{f}(y)+\alpha c \leqslant p(x), \forall x \in Y_1$$

Proposição 6 (Teorema de Hahn-Banach (Generalizado)) *Seja X um espaço vetorial real ou complexo e $p: X \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz, para todos $x, y \in X$*

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$$

e para cada escalar α

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

Então dado Z subespaço de X e f um funcional linear definido em Z que satisfaz

$$|f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in Z$$

Então existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X satisfazendo

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Demonstração. 1. Caso real

Se X é real, vale que $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x)$ e o Teorema 5 nos dá uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X tal que

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in X \tag{12}$$

Daí

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leqslant p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

e obtemos que $-\tilde{f}(-x) \geqslant p(x)$. Junto com (12), concluímos que $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$.

2. Caso complexo

Se X é complexo, Z também é. Logo, f toma valores complexos e podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

com f_1, f_2 funcionais lineares com valores reais.

Considere X_r, Z_r as respectivas restrições dos espaços X, Z ao corpo dos reais. Como

$$f_1(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in Z_r$$

podemos aplicar o Teorema 5 para encontrar um extensão linear $\tilde{f}_1$ de f_1 em X_r tal que

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant p(x), \forall x \in X_r$$

Voltando a Z, temos para cada $x \in Z$:

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = f_1(ix) + if_2(ix)$$

de modo que

$$-f_2(x) = f_1(ix), \forall x \in Z \tag{13}$$

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f}: X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) \end{aligned}$$

Note que $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$ por (13). Como f é linear, segue que $\tilde{f}_1$ é linear. Resta-nos mostrar que

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Se $x \in \mathcal{N}(\tilde{f})$, então

$$p(x) \geqslant |\tilde{f}(x)| = 0$$

pois

$$0 = p\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \leqslant p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(-\frac{x}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| p(x) + \left|-\frac{1}{2}\right| p(x) = p(x)$$

Se $x \notin \mathcal{N}(\tilde{f})$, então $\tilde{f}(x) \neq 0$. Considerando a forma polar, temos

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta} \Rightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x)$$

Como $|\tilde{f}(x)|$ é real, segue que $\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$ é real e daí

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$$

Proposição 7 (Hahn-Banach em espaços normados) *Seja f um funcional linear limitado em um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ de f em X tal que*

$$||\tilde{f}||_X = ||f||_Z$$

com

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} \text{ e } ||f||_Z = \sup_{x \in Z\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

e $||f||_Z = 0$ no caso $Z = \{0\}$.

Demonstração. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$ e a extensão é $\tilde{f} = 0$. Se $Z \neq \{0\}$, defina $p: X \to \mathbb{K}$ por

$$p(x) = ||f||_Z||x||, \forall x \in X$$

Daí

$$|f(x)| \leqslant ||f||_Z||x|| = p(x), \forall x \in X$$

Além disso, como p é definido a partir da norma de X, segue que p é um sublinear funcional. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 6), existe uma extensão $\tilde{f}$ de f em X tal que

$$||\tilde{f}|| \leqslant p(x) = ||f||_Z||x||, \forall x \in X$$

De modo que

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} \leqslant ||f||_Z$$

Além disso, como $\tilde{f}$ é uma extensão de f, vale que $||\tilde{f}||_X \geqslant ||f||_Z$. Portanto vale a igualdade.

Proposição 8 (Funcionais Lineares Limitados) *Seja X um espaço normado e seja $x_0 \neq 0$ um elemento em X. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X tal que*

$$\left||\tilde{f}|\right| = 1 \text{ e } \tilde{f}(x_0) = ||x_0||$$

Demonstração. Considere o subespaço Z de X definido por $Z = Span\{x_0\}$. Em Z, defina um funcional f por

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha||x_0||$$

f é linear e vale que $||f|| = 1$. Com efeito,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0) = |\alpha| \cdot ||x_0|| = ||\alpha x_0|| = ||x||, \forall x \in Z$$

Pelo Teorema 7, podemos tomar uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X com $||\tilde{f}|| = ||f|| = 1$. Além disso, vale que $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = ||x_0||$.

Corolário 1 *Para cada x em um espaço normado X normado X vale*

$$||x|| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||}$$

Em particular, se $f(x_0) = 0, \forall f \in X'$, então $x_0 = 0$.

Demonstração. Tomando $\tilde{f}$ definido no Teorema 8, vale

$$\sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||} \geqslant \frac{|\tilde{f}(x)|}{||\tilde{f}||} = ||x||$$

e de $|f(x)| \leqslant ||f|| \cdot ||x||, \forall f \in X'$ segue

$$\sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||} \leqslant ||x||.$$

4 Espaços Reflexivos

Seja X um espaço normado. Fixado $x \in X$, definimos a função $g_x : X' \to \mathbb{K}$ por

$$g_x(f) = f(x), \forall f \in X'$$

Lema 4 *Para cada $x \in X$, a função g_x é um funcional linear limitado com norma* $||g_x|| = ||x||$.

Demonstração. g_x é linear já que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $f_1, f_2 \in X'$:

$$\begin{aligned} g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) \\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \\ &= \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2) \end{aligned}$$

Além disso,

$$||g_x|| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|g_x(f)|}{||f||} = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||} = ||x||$$

pelo Corolário 1.

Chamamos o bidual de X o conjunto $X'' = (X')'$. A função

$$\begin{aligned} C: X &\to X'' \\ x &\mapsto g_x \end{aligned}$$

é chamado *mapa canônico* de X em X''.

Definição *Um isomorfismo entre os espaços normados X e $\tilde{X}$ é uma transformação linear $T: X \to \tilde{X}$ que preserva normas, isto é, para todo $x \in X$:*

$$||T(x)|| = ||x||$$

Neste caso, X e $\tilde{X}$ são ditos espaços isomorfos.

Lema 5 *O mapa canônico é um isomorfismo do espaço normado X em sua imagem $C(X)$.*

Demonstração. A linearidade de C segue de

$$\begin{aligned} g_{\alpha x+\beta y}(f) &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \end{aligned}$$

Em particular $g_x - g_y = g_{x-y}$. Daí

$$||g_x - g_y|| = ||g_{x-y}|| = ||x - y||$$

Logo, C é isométrico, portanto, injetivo. Por fim, o Lema 9 mostra que C preserva normas.

Definição *Um espaço normado X é dito reflexivo se*

$$C(X) = X''$$

Onde $C: X \to X''$ é o mapa canônico. Neste caso, X é isomorfo ao seu bidual.

Proposição 9 *Se um espaço normado X é reflexivo, é completo.*

Demonstração. Como X'' é completo e C é um isomorfismo entre X e X'', segue que X é completo.

5 Teorema da Categoria de Baire

Definição *Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito*

1. *raro* em X se seu fecho $\bar{M}$ não possui pontos interiores;

2. *magro* em X se M é a união enumerável de conjuntos raros em X.

Proposição 10 (Teorema da Categoria de Baire) *Um espaço métrico completo não vazio é não magro.*

Ou seja, se $X \neq \varnothing$, é completo e

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

com cada A_k fechado, então ao menos um A_k possui um subconjunto aberto não vazio.

Demonstração. Suponha que X é magro. Então

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \tag{14}$$

com cada M_k raro em X. Construíremos uma sequência de Cauchy $(p_k) \in X$ cujo limite p não pertence a nenhum M_k, logo, não pertence a X. Por hipótese, M_1 é raro em X. Por definição, isto implica que $\bar{M}_1$ não contém nenhum subconjunto aberto não vazio. Mas X contém (por exemplo, ele próprio). Isto implica que $\bar{M}_1 \neq X$. Daí, tomamos $p_1 \in \bar{M}_1{}^c$ e uma bola aberta sobre ele, digamos

$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subseteq \bar{M}_1{}^c, \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$$

Por hipótese, M_2 é raro em X, então $\bar{M}_2$ não contém um subconjunto aberto não vazio. Em particular, não contém a bola aberta $B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Isto implica que $\bar{M}_2{}^c \cap B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ é não vazio e aberto, então podemos tomar uma bola aberta neste conjunto, digamos

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subseteq \bar{M}_2{}^c \cap B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right), \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1}{4}$$

Recursivamente, construímos uma sequência de bolas abertas

$$B_k = B(p_k, \varepsilon_k), \varepsilon_k < 2^{-k}$$

tais que $B_k \cap M_k \neq \varnothing$ e

$$B_{k+1} \subset B\left(p_k; \frac{1}{2}\varepsilon_k\right) \subset B_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $\varepsilon_k < 2^{-k}$, a sequência p_k é de Cauchy, logo, converge, pois X é completo. Suponha que $p_k \to p$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n > m$ vale que $B_n \subset B\left(p_m; \frac{\varepsilon_m}{2}\right)$, logo:

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leqslant d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2} + d(p_n, p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon_m}{2} \end{aligned}$$

Logo $p \in B_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Como $B_m \subset \bar{M}_m{}^c$, temos que $p \notin M_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Isto contradiz (14), pois $p \in X$.

Proposição 11 (Teorema da Limitação Uniforme) *Seja* (T_n) *uma sequência de operadores lineares limitados* $T_n: X \to Y$, *com* X *um espaço de Banach e* Y *um espaço normado. Suponha que, para todo* $x \in X$, *existe um número real* c_x *(que depende de* x*) tal que*

$$||T_n(x)|| \leqslant c_x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então a sequência das normas $(||T_n||)$ é limitada, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$||T_n|| \leqslant c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina A_k como o conjunto de todos os $x \in X$ tais que

$$||T_n(x)|| \leqslant k, \forall n \in \mathbb{N}$$

Afirmamos que cada A_k é fechado. De fato, para cada $x \in \bar{A}_k$, existe uma sequência $(x_j) \in A_k$ tal que $x_j \to x$. Daí, para cada n fixado temos $||T_n(x_j)|| \leqslant k$ e pela continuidade da norma e de cada T_n vale que $||T_n(x)|| \leqslant k$. Logo, $x \in A_k$ e A_k é fechado.

Pela hipótese, vale que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Como X é completo, o Teorema 12 implica que algum A_k contém uma bola aberta, digamos

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0}$$

Seja $x \in X$ não nulo arbitrário. Pomos

$$z = x_0 + \gamma x, \text{ com } \gamma = \frac{r}{2||x||} \tag{15}$$

Então $||z - x_0|| = \frac{r}{2} < r$, logo, $z \in B_0 \subset A_{k_0}$. Por definição de A_{k_0}, temos que $||T_n(z)|| \leqslant k_0, \forall n$. Como $x_0 \in B_0$, também vale que $||T_n(x_0)|| \leqslant k_0, \forall n \in \mathbb{N}$. De (15), obtemos

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0)$$

Daí, para cada n, vale:

$$\begin{aligned} ||T_n(x)|| = \frac{1}{\gamma}||T_n(z - x_0)|| &\leqslant \frac{1}{\gamma}(||T_n(z)|| - ||T_n(x_0)||) \\ &\leqslant \frac{2k_0}{\gamma} = \frac{4k_0}{r}||x||, \forall x \in X\backslash\{0\} \end{aligned}$$

Logo

$$||T_n|| \leqslant \frac{4k_0}{r}, \forall n \in \mathbb{N}$$

O que conclui a demonstração.

CONCLUSÕES

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma assimilação do bolsista a diversos resultados da análise. Como amplo campo de pesquisa, há muito para ser estudado para introduzir o aluno à carreira matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] KOMORNIK, V. Lectures on Functional Analysis and the Lebesgue Integral. Springer, 2016.

[2] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, 1989.

[3] LIMA, E.L. Espaços Métricos: 5ª ed. IMPA, 2015.

[4] MEDEIROS, L.A. Teoria Espectral em Espaços de Hilbert. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.

DIFICULDADES ENCONTRADAS

O presente relatório dedica-se a expor os resultados assimilados pelo bolsista durante a vigência do projeto. Como principal objetivo, o aluno empenhou-se em apresentar uma releitura dos principais conceitos sobre o tema abordado. Sendo Análise Funcional um assunto diversificado, a principal dificuldade encontrada foi a assimilação e estudo de conceitos mais avançados no projeto.

ATIVIDADES PARALELAS DESENVOLVIDAS PELO ALUNO

O bolsista participou de um curso de verão de dois meses no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no Rio de Janeiro, RJ, visando o estudo profundo de Análise na Reta, pré-requisito indispensável para o assunto vigente.