Teoria da Medida e Aplicações

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic/UFPE/CNPq)

- Projeto: Teoria da Medida e Aplicações
- Orientador: Roberto de A. Capistrano Filho - CPF: 008.167.044-30
- Instituição: Universidade Federal de Pernambuco,Campus: Recife.
- Centro: Centro de Ciências Exatas e da Natureza
- Departamento: Departamento de Matemática
- Bolsista: Mateus Ferreira de Melo - CPF: 110.588.484-88
- Vigência do projeto: 01/08/2019 a 31/07/2020
- e-mail: capistranofilho@dmat.ufpe.br

RESUMO DO TRABALHO.

Este projeto visa apresentar ao Bolsista Mateus Ferreira de Melo, aluno de Bacharelado em Matemática da UFPE a Teoria da Medida e suas aplicações. Tal teoria foi desenvolvida no final do século 19 por Émile Borel, Henri Lebesgue, Johann Radon e Maurice Fréchet, entre outros; e é a base de assuntos como Teoria Ergódica, Integral de Lebesgue e Teoria da Probabilidade, de modo que o entendimento do aluno no assunto mostra-se útil para seu future acadêmico.

SUMÁRIO (índice)

Conteúdo

INTRODUÇÃO(relevância do trabalho e revisão da literatura)

Em análise matemática, uma medida é uma maneira sistemática de atribuir um número não negativo (ou ∞) a um subconjunto adequado de um dado conjunto, intuitivamente interpretado como seu tamanho. Neste sentido, uma medida é uma generalização do comprimento, área e volume. Relacionado a esta ideia, encontra-se a integral de Lebesgue, uma generalização da integral de Riemann estudada nos cursos de Cálculo.

A importância destes conceitos deriva do fato de ser uma grande ferramenta no estudo de áreas como Geometria, Teoria da Probabilidade, Teoria Ergódica, entre outras, de modo que o entendimento do aluno no assunto mostra-se útil para seu futuro acadêmico.

OBJETIVOS (geral e específicos)

Do ponto de vista científico, o objetivo deste projeto é o estudo de modelos matemáticos que possuem como representação uma Equação Diferencial Parcial (EDP). Contudo, para um entendimento preciso dessas equações alguns pontos básicos devem ser estudados pelo aluno. A teoria da medida é um ramo da matemática iniciado pelos trabalhos de Émile Borel, mas muito desenvolvido por matemáticos como Henri Lebesgue e Constantin Carathéodory. O problema da teoria da medida se divide basicamente em duas partes:

- Uma medida que associe a cada conjunto de uma família em um dado espaço um valor significativo do seu tamanho.

- Definir uma teoria de integração para as funções que tomam valores neste espaço.

Tal projeto não possui somente objetivos do ponto de vista científico. Do ponto de vista socioeconômico, a ideia do coordenador do projeto é acompanhar o aluno, desde o início da graduação, para consequentemente, ao final de seu curso, tentar compreender quais foram as dificuldades enfrentadas por ele e se este aluno está apto a ingressar em uma pós-graduação. Como, em Recife e região, temos um número baixo de alunos formados em matemática anualmente, a ideia do projeto é acompanhar o aluno bolsista até o final de seu bacharelado e com isso garantir que Recife e região possuam professors mais qualificados e aptos a atuarem em escolas públicas ou privadas, bem como em universidades públicas e privadas da região.

METODOLOGIA DO TRABALHO

Foram realizados seminários semanalmente, que foram discutidos baseando-se fortemente em [1] e [2]. Os demais livros foram usados como leitura complementar para o aluno. Uma apresentação sucinta dos principais temas abordados é:

- Funções mensuráveis, medidas e integral de Lebesgue;
- Lema de Fatou e Teorema da Convergência Monótona de Beppo Levi;
- Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue;
- Decomposição de Medidas;

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Funções Mensuráveis

Definição 1. A reta estendida é o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, onde os elementos $-\infty, \infty$ satisfazem, para todo $x \in \mathbb{R}$:

1) $-\infty < x < \infty$;

2) $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$;

3) $x - \infty = -\infty + x = -\infty - \infty = -\infty$;

4) $$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \text{se} x > 0; \\ 0, \text{se} x = 0; \\ \mp\infty, \text{se} x < 0; \end{cases}$$

5) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$;

6) $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$;

7) $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$;

Note, porém que operações como $\infty - \infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ não estão definidas em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2. Uma família $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-álgebra quando

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow X \backslash A \in \mathscr{A}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência em $\mathscr{A}$, a união

$$\bigcup A_n$$

pertence a $\mathscr{A}$.

Um par $(X, \mathscr{A})$ é chamado *espaço mensurável*. Qualquer conjunto em $\mathscr{A}$ é dito $\mathscr{A}$-mensurável (ou simplesmente mensurável, quando a σ-álgebra estiver subentendida).

Note que $X \in \mathscr{A}$ pois $X = X \setminus \varnothing$. Além disso, podemos mostrar que uma sequência (A_n) pertence à σ-álgebra $\mathscr{A}$, então $\bigcap A_n$ pertence a $\mathscr{A}$ pois

$$X \setminus \bigcap A_n = \bigcup (X \setminus A_n) \in \mathscr{A}$$

Exemplos

1) Dado um conjunto X qualquer, então $\mathscr{P}(X)$ e $\{\varnothing, X\}$ são σ-álgebras.

2) Seja E uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Existe a menor σ-álgebra que contém E (no sentido de inclusão). Para ver isto, note que a interseção de σ-álgebras é uma σ-álgebra. Então, sendo $\mathscr{M}$ o conjunto

$$\mathscr{M} = \{\mathscr{A} \sigma\text{-álgebra} \,|\, E \in \mathscr{A}\}$$

(que não é vazio, pois $\mathscr{P}(X) \in \mathscr{M}$), temos que $\bigcap \mathscr{M}$ é tal σ-álgebra, que é denominada σ-álgebra gerada por E.

3) Considerando a reta, seja

$$E = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

A σ-álgebra gerada por E é chamada de *álgebra de Borel* e denotada por $\mathscr{B}$.

No que se segue, fixaremos um espaço mensurável $(X, \mathscr{A})$.

Definição 3. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathscr{A}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$A_\alpha = \{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\}$$

pertence a $\mathscr{A}$.

Lema 1. *As afirmações abaixo são equivalentes para uma função $f: X \to \mathbb{R}$:*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}$;

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$;

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{A}$;

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathscr{A}$;

Demonstração. Basta mostrar que (a) $\Longleftrightarrow$ (c) (já que $D_\alpha = X \setminus C_\alpha$ e $B_\alpha = X \setminus A_\alpha$).

($\Rightarrow$) Se vale (a), então $A_{(\alpha - 1/n)} \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ e como

$$C_\alpha = \bigcap A_{(\alpha - 1/n)}$$

segue que $C_\alpha \in \mathscr{A}$.

($\Leftarrow$) Como $A_\alpha = \bigcup C_{(\alpha+1/n)}$, segue que (c) $\Longrightarrow$ (a). □

Exemplos

1) Toda função constante é mensurável, pois nesse caso ou $A_\alpha = \varnothing$ ou $A_\alpha = X$.

2) Se $E \in \mathscr{A}$, a função característica χ_E dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1,\text{se} x \in E; \\ 0,\text{se} x \notin E \end{cases}$$

é mensurável pois temos que A_α é dado por X, E ou $\varnothing$.

3) Se $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, então qualquer função contínua é mensurável na álgebra de Borel. De fato, A_α é aberto e portanto união enumerável de intervalos.

4) Qualquer função monótona é mensurável em Borel. De fato, supondo, por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, então $A_\alpha = (a, +\infty)$ ou $A_\alpha = [a, +\infty)$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

Lema 2. *Sejam $f . g: X \to \mathbb{R}$ mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. As funções*

(a) cf; *(b) f^2* *(c) f+g;* *(d) fg;* *(e) |f|;*

são mensuráveis.

Demonstração.

(a) Se $c = 0$, a função é constante. Se $c > 0$, então

$$\{x \in X \,|\, cf(x) > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f(x) > \alpha/c\} \in \mathscr{A}$$

O caso $c < 0$ é similar.

(b) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X \,|\, (f(x))^2 > \alpha\} = X$. Caso $\alpha \geq 0$, temos

$$\{x \in X \,|\, (f(x))^2 > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X \,|\, f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

(c) Por hipótese, dado $r \in \mathbb{Q}$, temos que

$$S_r = \{x \in X \,|\, f(x) > r\} \cap \{x \in X \,|\, g(x) > \alpha - r\} \in \mathscr{A}$$

Como

$$\{x \in X \,|\, (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup \{S_r : r \in \mathbb{Q}\}$$

segue que $f + g$ é mensurável.

(d) Segue de $fg = \dfrac{1}{2}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$.

(e) Se $\alpha < 0, \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X$. Caso $\alpha \geq 0$:

$$\{x \in X: |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X: f(x) < -\alpha\}$$

Logo a função $|f|$ é mensurável. □

Dada $f: X \to \mathbb{R}$, definimos as funções

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

Denominamos f^+ e f^- por parte positiva e parte negativa de f, respectivamente. Note que ambas as funções são funções positivas e

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

de modo que

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

Pelo Lema anterior, temos que f é mensurável se, e somente se f^+, f^- são funções mensuráveis.

Definição 4. O conjunto das funções $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis é denotado por $M(X, \mathscr{A})$. Se $f \in M(X, \mathscr{A})$, então

$$A = \{x \in X: f(x) = +\infty\} = \bigcap \{x \in X \,|\, f(x) > n\}$$

$$B = \{x \in X: f(x) = -\infty\} = X \setminus \left[\bigcup \{x \in X \,|\, f(x) > -n\}\right]$$

de modo que ambos os conjuntos pertecem a $\mathscr{A}$.

Lema 3. *Uma função $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se os conjuntos A, B definidos acima são mensuráveis e a função $f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{se} \notin A \cup B; \\ 0, \text{se} x \in A \cup B \end{cases}$ for mensurável.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Já foi visto que se f é mensurável, então A e B são mensuráveis. Dado $\alpha \geq 0$, temos

$$\{x \in X \,|\, f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\} \setminus A$$

e se $\alpha < 0$

$$\{x \in X \,|\, f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\} \cup B$$

Então f_1 é mensurável.

($\Rightarrow$) Supondo A, B e f_1 mensuráveis, temos que

$$\{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f_1(x) > \alpha\} \cup A, \text{se} \alpha \geq 0$$

$$\text{e} \{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\} = \{x \in X \,|\, f_1(x) > \alpha\} \setminus B, \text{se} \alpha < 0$$

são mensuráveis. □

Como consequência, segue que as funções do Lema 2 são mensuráveis no caso estendido. No entanto, dadas $f, g \in M(X, \mathscr{A})$ e os conjuntos

$$E_1 = \{x \in X | f(x) = +\infty \text{e} g(x) = -\infty\}$$
$$E_2 = \{x \in X | f(x) = -\infty \text{e} g(x) = +\infty\}$$

definimos $(f+g)(x) = 0$ em $E_1 \cup E_2$.

Lema 4. *Seja (f_n) uma sequência em $M(X, \mathscr{A})$ e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x), F(x) = \sup f_n(x)$$
$$F^*(x) = \liminf f_n(x), F^*(x) = \limsup f_n(x)$$

Então f, F, f^*, F^* pertecem a $M(X, \mathscr{A})$.

Demonstração. Note que

$$\{x \in X \,|\, f(x) > \alpha\} = \bigcap \{x \in X \,|\, f_n(x) \geq \alpha\}$$
$$\{x \in X \,|\, F(x) > \alpha\} = \bigcup \{x \in X \,|\, f_n(x) > \alpha\}$$

de modo que $f, F \in M(X, \mathscr{A})$. Como

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$
$$F^*(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

também vale que $f^*, F^* \in M(X, \mathscr{A})$. □

Corolário 1. *Se (f_n) é uma sequência em $M(X, \mathscr{A})$ que converge pontualmente para f em X, então $f \in M(X, \mathscr{A})$.*

Demonstração. Basta ver que, $\lim f_n(x) = \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)$. □

Lema 5. *Se f é uma função não-negativa em $M(X, \mathscr{A})$, então existe uma sequência (ϕ_n) em $M(X, \mathscr{A})$ tal que*

(a) $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x), \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(x) = \lim \phi_n(x), \forall x \in X$;

(c) *Cada ϕ_n tem um número finito de valores reais.*

Demonstração. Seja n um número natural fixo. Se k = 0, 1, …, n2^n-1, seja

$$E_{kn} = \{x \in X \,|\, k2^{-n} \leq f(x) \leq (k+1)2^{-n}\},$$

e se $k = n2^n$ seja $E_{kn} = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$. Note que os conjuntos E_{kn} para k = 0,1, ..., $n2^n$ são disjuntos dois a dois, e cuja união é igual a X.

Definindo ϕ_n para ser igual a $k2^{-n}$ em E_{kn}, então $\phi_n \in M(X, \mathscr{A})$ e valem [a],[b] e [c]. □

Medidas

Definição 5. Uma *medida* em $M(X; \mathscr{A})$ é uma função $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathscr{A}$;

(iii) $\mu\left(\bigsqcup E_n\right) = \sum \mu(E_n)$. (Enumeravelmente aditiva)

Em que o símbolo ⊔ significa união de conjuntos que são disjuntos dois a dois (por exemplo, se $D = A \sqcup B \sqcup C$, então $D = A \cup B \cup C$ e $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \varnothing$).

Se $\mu(E_n) < \infty, \forall E \in \mathscr{A}$, dizemos que μ é uma medida finita. Se $X = \bigcup E_n$, com $\mu(E_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, então dizemos que μ é σ-finita.

É válido notar que a propriedade [iii] também é válida no caso de uma quantidade finita de conjuntos. De fato, se $A = \bigsqcup A_k$, então definindo a sequência (E_k) por

$$E_k = \begin{cases} A_k, \text{se} k \leq n \\ \varnothing, \text{se} k > n \end{cases}$$

então $A = \bigsqcup E_k$ e $\mu(A) = \sum \mu(E_k) = \sum \mu(A_k)$.

Exemplos

1) Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Definimos a medida $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{card}(E), \text{se} E \text{é finito;} \\ +\infty, \text{se} E \text{é infinito.} \end{cases}$$

2) Se $X = \mathbb{R}$ e $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, existe uma única medida λ que satisfaz

$$\lambda((a, b)) = b - a$$

Tal medida é chamada *medida de Lebesgue*, ou *medida de Borel*.

3) Se $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ e f é uma função contínua monótona crescente, existe uma única medida λ que satisfaz

$$\lambda((a, b)) = f(b) - f(a)$$

Tal medida é chamada *medida de Borel-Stieltjes* gerada por f.

Lema 6. *Seja $\mu:\mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida. Se $E, F \in \mathscr{A}$ e $E \subseteq F$, então$\mu(E) \leq \mu(F)$. Se $\mu(E) < \infty$, então$\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demonstração. Segue do fato de $F = E \sqcup (F \backslash E)$ e $\mu(F \backslash E) \geq 0$. □

Lema 7. *Seja $\mu:\mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida.*

(a) *Se (E_n) é uma sequência crescente em $\mathscr{A}$, então*

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

(b) *Se (F_n) é uma sequência decrescente em $\mathscr{A}$ e $\mu(F_1) < \infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap F_n\right) = \lim \mu(F_n)$$

Demonstração.

(a) Se $\mu(E_n) = +\infty$, para algum$n$, então ambos os lados da igualdade são $+\infty$. Logo, podemos supor $\mu(E_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Defina uma sequência (A_n)em$\mathscr{A}$ por:

$$A_1 = E_1$$
$$A_n = E_n \backslash E_{n-1}, n > 1$$

Então vale que

$$E_n = \bigsqcup A_j, \bigcup E_n = \bigsqcup A_n$$

Como μ é enumeravelmente aditiva, temos

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup A_n\right) = \sum \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum \mu(A_n)$$

Mas $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$, logo

$$\sum \mu(A_n) = \mu(E_m)$$

De modo que a igualdade se verifica.

(b) Seja $E_n = F_1 \backslash F_n$. Como (E_n) é uma sequência crescente, aplicando parte (a), temos

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup E_n\right) &= \lim \mu(E_n) = \lim[\mu(F_1) - \mu(F_n)] \\ &= \mu(F_1) - \lim \mu(F_n) \end{aligned}$$

Como $\bigcup E_n = F_1 \backslash \bigcap F_n$, segue que

$$\mu\left(\bigcup E_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap F_n\right)$$

E as duas equações acima implicam $\mu\left(\bigcap F_n\right) = \lim \mu(F_n)$. □

Definição 6. Um *espaço de medida* é uma tripla $(X, \mathscr{A}, \mu)$ onde $(X, \mathscr{A})$ é um espaço mensurável e $\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida.

Observação: Seja P uma propriedade em X. Dizemos que a propriedade P vale em μ-quase todo X (ou q.t.p. = quase todo ponto), se existe um subconjunto $N \in \mathscr{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que vale $P(x), \forall x \in X \backslash N$.

Por exemplo, se f é uma função mensurável, dizemos que $f(x) = 0$ q.t.p. quando o conjunto

$$\{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}$$

tem medida nula.

Definição 7. Uma *medida com sinal* ou *carga* em um espaço mensurável $(X, \mathscr{A})$ é uma função $\lambda: \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\lambda(\varnothing) = 0$;
2. $$\lambda\left(\bigsqcup E_n\right) = \sum \lambda(E_n)$$

Teorema 8. *Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathscr{A})$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são números reais não negativos, a combinação linear $\mu = \sum \lambda_i \mu_i$ determina uma medida em X.*

Demonstração. A demonstração é evidente: basta observar que as propriedades [i], [ii] e [iii] são válidas por linearidade. □

Integral

Seja $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida fixo. Denotamos

$$M^+ = M^+(X, \mathscr{A}) = \{f: X \to \overline{\mathbb{R}} \,|\, f \text{ é mensurávek e não negativa}\}$$

Definição 8. Uma função de valores reais é dita *simples* se possui apenas uma quantidade finita de valores.

Se ϕ é uma função mensurável simples, então

$$\phi = \sum a_j \chi_{E_j}$$

com $a_j \in \mathbb{R}$ distintos e $E_j \in \mathscr{A}$ disjuntos.

Definição 9. Se $\phi \in M^+$ é uma função simples na forma acima, a *integral* de ϕ com respeito a μ é

$$\int \phi \, d\mu = \sum a_j \mu(E_j)$$

Note que como os a_j são negativos, não existem expressões do tipo $\infty - \infty$ na igualdade acima.

Lema 9.

(a) *Se* ϕ, ψ *são funções simples em* M^+ *e* $c \geq 0$, *então* $\int c\phi d\mu = c\int \phi d\mu \int (\phi + \psi) d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu$

(b) *Se* $\lambda : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *é dada por* $\lambda(E) = \int \phi d\mu := \int \phi \chi_E d\mu$ *então* λ *é uma medida em* $(X, \mathscr{A})$.

Demonstração.

(a) A primeira afirmação é trivial. Para provar a segunda, suponha que

$$\phi = \sum a_j \chi_{E_j}, \psi = \sum b_k \chi_{F_k}$$

então

$$\phi + \psi = \sum \sum (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}$$

Mas note que, nesta representação, os $a_j + b_k$ não precisam ser necessariamente distintos. Sejam $c_h, h=1, …, p$, os números distintos no conjunto

{ a_j + b_k : j = 1,…, n, k=1,…, m }

e seja G_h a união dos conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$. Assim

$$\mu(G_h) = \sum \mu(E_j \cap F_k)$$

Segue que a representação padrão de $\phi + \psi$ é

$$\phi + \psi = \sum c_h \chi_{G_h}$$

Temos portanto que

$$\begin{aligned}
\int (\phi + \psi) d\mu \quad &= \sum c_h \mu(G_h) = \sum \sum c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum \sum (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum \sum (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum \sum a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum \sum b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

Como $X = \bigsqcup E_j = \bigsqcup F_k$, temos $E_j = \bigsqcup (E_j \cap F_k)$ e $F_k = \bigsqcup (E_j \cap F_k)$. Assim

$$\mu(E_j) = \sum \mu(E_j \cap F_k), \mu(F_k) = \sum \mu(E_j \cap F_k)$$

Segue desta observação que

$$\begin{aligned} \int(\phi+\psi)d\mu &= \sum a_j\mu(E_j)+\sum b_k\mu(F_k) \\ &= \int\phi d\mu+\int\psi d\mu \end{aligned}$$

(b) Como $\phi\chi_E = \sum \chi_{E_j\cap E}$ temos que

$$\lambda(E) = \int \phi\chi_E d\mu = \sum a_j\mu(E_j\cap E)$$

Mas é fácil ver que a função $E \mapsto \mu(E_j \cap E)$ é uma medida, de modo que pelo Teorema 8 segue que λ é uma medida.

□

Seja $f \in M^+$. Denotamos por H_f o conjunto

$$H_f = \{\phi \in M^+ \,|\, \phi \text{ é simples e } \phi(x) \le f(x), \forall x \in X\}$$

Definição 10. A *integral* de $f \in M^+$ com respeito a μ é

$$\int f d\mu = \sup_{\phi\in H_f} \int \phi d\mu$$

Lema 10.

(a) *Se $f, g \in M^+$ e $f \le g$, então* $\int f d\mu \le \int g d\mu$

(b) *Se $f \in M^+$ e $E, F \in \mathscr{A}$ com $E \subseteq F$, então* $\int f d\mu \le \int f d\mu$

Demonstração.

(a) Se ϕ é uma função simples em M^+ com $\phi \le f$, então $\phi \le g$, de modo que $H_f \subseteq H_g$.

(b) Segue de $f\chi_E \le f\chi_F$ e da parte (a). □

Teorema 11 (Teorema da Convergência Monótona de Beppo Levi). *Se (f_n) é uma sequência crescente de funções em M^+ convergindo pontualmente para $f \in M^+$, então* $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$

Demonstração. Note que $f = \lim f_n = \sup f_n$. Assim, pelo Lema 10

$$\int f_n d\mu \le \int f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\int f_n d\mu$ é uma sequência crescente e limitada em $\mathbb{R}$, então é convergente e vale

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Para provar a desigualdade reversa, seja $\alpha \in (0,1)$ arbitrário e seja $\phi \in H_f$ qualquer. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$$

então $A_n \in X$ (já que cada f_n é mensurável), $A_n \subseteq A_{n+1}$ (já que (f_n) é crescente) e $\bigcup A_n = X$ (pois $f = \sup f_n$). Assim

$$\int \alpha\phi d\mu \leq \int f_n d\mu \leq f_n d\mu$$

Defina $\lambda: A \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\lambda(E) = \int \phi d\mu$$

Então λ é uma medida pelo Lema 9, e pelo Lema 7 segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi d\mu = \lim \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup A_n\right) = \lambda(X) = \int \phi d\mu$$

De modo que temos

$$\alpha \int \phi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Tomando o supremo sobre α, temos

$$\int \phi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

E como $\phi \in H_f$ é arbitrário, obtemos o resultado desejado. □

A seguir, apresentamos alguns corolários do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 2.

(a) *Se* $f \in M^+$ *e* $c \geq 0$, *então* $cf \in M^+$ *e* $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

(b) *Se* $f, g \in M^+$, *então* $f + g \in M^+$ *e* $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Demonstração. Pelo Lema 5, se $f \in M^+$, podemos tomar uma sequência crescente de funções simples em M^+ convergindo para f. Daí podemos aplicar o Teorema11 junto com o Lema 9 para obter o resultado deste corolário. □

Lema 12 (Lema de Fatou). *Se* $(f_n) \in M^+$, *então* $\displaystyle\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$

Demonstração. Defina $g_m = \inf_{n \geq m}\{f_n\}$, de modo que $g_m \in M^+$ e $g_m \leq f_n, \forall n \geq m$. Assim:

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \forall m \leq n$$

de modo que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Visto que a sequência (g_n) é crescente e converge para $\liminf f_n$, o Teorema da Convergência Monótona implica

$$\int \liminf f_n d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

□

Corolário 3. *Seja* $f \in M^+$ *e defina* $\lambda : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *por* $\lambda(E) = \displaystyle\int f d\mu$. *Então* λ *é uma medida.*

Demonstração. Mostraremos que λ é enumeravelmente aditiva, visto que as outras propriedades são evidentes. Suponha que $E = \bigsqcup E_k$.. Defina f_n por

$$f_n = \sum f\chi_{E_k}$$

Segue que

$$\int f_n d\mu = \sum \int f\chi_{E_k} d\mu = \sum \lambda(E_k)$$

Como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ convergindo para $f\chi_E$, o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 11) implica que

$$\lambda(E) = \int f\chi_E d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum \lambda(E_k)$$

□

Corolário 4. *Suponha* $f \in M^+$. *Então* $f(x) = 0$ *q.t.p se, e somente se* $\displaystyle\int f d\mu = 0$.

Demonstração. Se $\displaystyle\int f d\mu = 0$, defina

$$E_n = \{x \in X \mid f(x) > 1/n\}$$

Então $E_n \in \mathscr{A}$ e $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$$

Segue que $\mu(E_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto o conjunto

$$E = \{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup E_n$$

também tem medida nula (pois $\mu(E) = \lim \mu(E_n)$ pelo Lema 7). Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ q.t.p. em X. Assim, se

$$E = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$$

então $\mu(E) = 0$. Seja $f_n = n\chi_E$. Como $f \leq \liminf f_n$, segue pelo Lema de Fatou que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

□

Corolário 5. *Seja $f \in M^+$ e defina $\lambda : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ como $\lambda(E) = \int_E f d\mu$. Então λ é absolutamente contínua com respeito a μ (escreve-se $\lambda << \mu$), ou seja, se $E \in \mathscr{A}$ com $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$.*

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então $f\chi_E$ se anula q.t.p. em X. Pelo Corolário anterior,

$$\lambda(E) = \int f\chi_E d\mu = 0$$

□

Corolário 6. *Se (f_n) é uma sequência crescente de funções em M^+ que converge q.t.p. para $f \in M^+$, então $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$*

Demonstração. Seja $N \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(x) \to f(x), \forall x \in M := X \setminus N$. Então $(f_n\chi_M)$ converge para $f\chi_M$ em X, de modo que o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 11) implica que

$$\int f\chi_M d\mu = \lim \int f_n X_M d\mu$$

Mas também vale que $\int f\chi_N d\mu = \int f_n X_N d\mu = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\int f d\mu = \int (f\chi_M + f\chi_N) d\mu = \lim \int f_n \chi_M d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

Corolário 7. *Seja (g_n) uma sequência em M^+. Então* $\int \sum g_n d\mu = \sum \int g_n d\mu$

Demonstração. Basta definir a sequência crescente $f_m = \sum g_n$ e usar o Teorema 11. □

Funções Integráveis

Definição 11. Dado um espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, a coleção $L = L(X, \mathscr{A}, \mu)$ de funções *integráveis* consiste de todas as funções $f: X \to \mathbb{R}$ tais que f^+, f^- possuem integral finita em relação a μ. Neste caso, a integral de f é dada por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu, \forall E \in \mathscr{A}$$

Propriedades

- Se $f \in L$ e $\lambda: \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\lambda(E) = \int f d\mu$$

  então λ é uma medida com sinal.

- $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$ e

$$|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$$

- Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha f, f + g \in L$ e

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

- Se f é mensurável, $g \in L$ e $|f| \leq |g|$, então $f \in L$ e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

Teorema 13 (Teorema da ConvergênciaDominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis convergindo q.t.p. para uma função real f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e* $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

Demonstração. Como $|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$, então $|f| \leq g$ e segue da última propriedade que f é integrável. Podemos assumir que $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$ (caso contrário, o argumento adapta-se similarmente à demonstração do Corolário 6). Como $f_n + g \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, aplicamos o Lema de Fatou (Lema 12) para obter

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f) d\mu &\leq \liminf \int (g+f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu \end{aligned}$$

E segue que $\displaystyle\int f d\mu \leq \liminf \int f d\mu.$

Vale ainda que $g - f_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então podemos novamente aplicar o Lema de Fatou para obter

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \leq \liminf \int (g-f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu \end{aligned}$$

Daílimsup $\displaystyle\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ e portantolim $\displaystyle\int f_n d\mu = \int f d\mu$. □

Decomposição de Medidas

Seja $(X, \mathscr{A})$ um espaço mensurável e $\lambda : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ uma carga.

Definição 12. Um subconjunto $P \in \mathscr{A}$ é dito *positivo* se $\lambda(E \cap P) \geq 0, \forall E \in \mathscr{A}$. Um conjunto N é dito *negativo* se $\lambda(E \cap N) \leq 0, \forall E \in \mathscr{A}$ e M é dito *nulo* se $\lambda(E \cap M) = 0, \forall E \in \mathscr{A}$.

Afirmação 1: Um subconjunto de um conjunto positivo é positivo.

De fato, se P_2 é um conjunto positivo e $P_1 \subseteq P_2$, então dado $E \in \mathscr{A}$ temos

$$\lambda(P_1 \cap E) = \lambda(P_2 \cap (P_1 \cap E)) \geq 0$$

Afirmação 2: A união finita de conjuntos positivos é positiva.

Com efeito, se P_1, P_2 são conjuntos positivos e $E \in \mathscr{A}$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} \lambda((P_1 \cup P_2) \cap E) &= \lambda([P_1 \cup (P_2 \backslash P_1)] \cap E) \\ &= \lambda((P_1 \cap E) \cup [(P_2 \backslash P_1) \cap E]) \\ &= \lambda(P_1 \cap E) + \lambda((P_2 \backslash P_1) \cap E) \end{aligned}$$

e como cada uma das parcelas acima é positiva (visto que $P_2 \backslash P_1$ é subconjunto de P_2), segue o resultado.

As afirmações acima também são válidas para conjuntos negativos e nulos, com demonstrações análogas.

Teorema 14 (Teorema da Decomposição de Hahn). *Se λ é uma medida com sinal em $(X, \mathscr{A})$ existem conjuntos $P, N \in \mathscr{A}$ tais que $X = P \cup N, P \cap N = \varnothing$ com P sendo positivo e N negativo com relação a λ.*

Demonstração. Considere a classe $\mathscr{P}$ de todos os conjuntos positivos e seja $\alpha = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathscr{P}\}$ (mostraremos adiante que $\alpha < \infty$).

Tome (A_n) em $\mathscr{P}$ tal que $\lim \lambda(A_n) = \alpha$ e seja $P = \bigcup A_n$. Como a união finita de conjuntos positivos é positiva, podemos supor que a sequência (A_n) é crescente. Dado $E \in \mathscr{A}$, vemos que

$$\lambda(E \cap P) = \lambda\Big(E \cap \bigcup A_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup (E \cap A_n)\Big) = \lim \lambda(E \cap A_n) \geq 0$$

de modo que P é positivo. Mais ainda, temos que

$$\alpha = \lim \lambda(A_n) = \lambda(P) < \infty$$

Mostraremos agora que o conjunto $N = X \backslash P$ é negativo. Caso contrário, existiria $E' \in \mathscr{A}$ com $\lambda(E' \cap N) > 0$. Denotemos $E := E' \cap N$.

Tal conjunto E não pode ser positivo, caso contrário, teríamos um conjunto positivo $P \cup E$ tal que $\lambda(P \cup E) > \alpha$, o que contraria a definição de α.

Logo, E contém ao menos um conjunto com carga negativa. Seja n_1 o menor número inteiro positivo tal que E contém um conjunto $E_1 \in \mathscr{A}$ com $\lambda(E_1) \leq 1/n_1$. Assim

$$\lambda(E \backslash E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) > \lambda(E) > 0$$

Contudo, $E \backslash E_1$ não pode ser um conjunto positivo, pela mesma razão apresentada acima. Portanto, existe algum conjunto de carga negativa em $E \backslash E_1$. Seja n_2 o menor número inteiro positivo tal que $E \backslash E_1$ contém um conjunto E_2 com $\lambda(E_2) < -1/n_2$. Continuando recursivamente, obtemos uma sequência de conjuntos disjuntos $(E_k) \in \mathscr{A}$ e inteiros positivos (n_k) tais que $E_{k+1} \subseteq E \backslash E_k$ e $\lambda(E_k) < -1/n_k$. Pondo $F = \bigcup E_k$, vemos que

$$0 \leq \sum \frac{1}{n_k} \leq -\sum \lambda(E_k) = -\lambda(F) < -\infty$$

o que mostra que $1/n_k \to 0$.

Afirmação: $E \backslash F$ é um conjunto positivo.

Seja $G \subseteq E \backslash F$ mensurável e suponha por contradição que $\lambda(G) < 0$. Então $\lambda(G) < \dfrac{-1}{n_k - 1}$, para k suficientemente grande. Mas isto contradiz o fato de que n_k é o menor número natural tal que $E \setminus (E_1 \cup \dotsc \cup E_k)$ contém um conjunto de carga menor que $-1/n_k$.

Como $\lambda(E \backslash F) = \lambda(E) - \lambda(F) > 0$, vemos que $P \cap (E \backslash F)$ é um conjunto positivo com carga excedendo α, o que é uma contradição. Logo N é negativo. $\square$

Definição 13. Um par P, N de conjunto mensuráveis satisfazendo as conclusões do Teorema anterior é dita formar uma *decomposição de Hahn* de X com respeito a λ.

Note que não há unicidade desta decomposição: se P, N é uma decomposição de Hahn e M é conjunto positivo, então $P \cup M, N \backslash M$ também é uma decomposição de Hahn.

Lema 15. *Se P_1, N_1 e P_2, N_2 são decomposições de Hahn para λ e $E \in \mathscr{A}$, então* $\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2), \lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$

Demonstração. Visto que $E \cap (P_1 \backslash P_2)$ está contido em P_1 e emN_2, vale que que $\lambda(E \cap (P_1 \backslash P_2)) = 0$. Assim

$$0 = \lambda(E \cap (P_1 \backslash P_2)) = \lambda((E \cap P_1) \backslash (E \cap P_2)) = \lambda(E \cap P_1) - \lambda(E \cap P_2)$$

E de modo análogo mostramos que $\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$. □

Definição 14. Seja λ uma carga em X e seja P, N uma decomposição de Hahn para λ. A *variação positiva e negativa* de λ são, respectivamente, as medidas finitas λ^+, λ^- dadas por

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P); \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N), \forall E \in \mathscr{A}$$

A *variação total* de λ é a medida $|\lambda|$ dada por

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E), \forall E \in \mathscr{A}$$

Pelo Lema 15, vemos que a variação positiva e negativa estão bem definidas. Também é claro que

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap P) + \lambda(E \cap N) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E), \forall E \in \mathscr{A}$$

Teorema 16 (Teorema da Decomposição de Jordan). *Se λ é uma carga em X, então é uma diferença entre duas medidas finitas em X. Mais ainda, se $\lambda = \mu - \nu$, com μ, ν medidas finitas em X, então $\mu(E) \geq \lambda^+(E), \nu(E) \geq \lambda^-(E), \forall E \in \mathscr{A}$*

Demonstração. Basta demonstrar a última parte: dado $E \in \mathscr{A}$temos

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \nu(E \cap P) \leq \mu(E \cap P) \leq \mu(E)$$

E analogamente para λ^-. □

Sabemos que se f é uma função integrável com respeito a uma medida μ em X, e λ é definida por

$$\lambda(E) = \int f d\mu$$

Entãoλ é uma carga em$X$. O próximo Teorema determina suas variações.

Teorema 17. *Se λ é definida como acima, então*
$\lambda^+(E) = \int f^+ d\mu, \lambda^-(E) = \int f^- d\mu \, |\lambda|(E) = \int |f| \, d\mu$

Demonstração. Seja $P_f = \{x \in X \,|\, f(x) \geq 0\}$ e $N_f = X \backslash P_f$. Se $E \in \mathscr{A}$, então $\lambda(E \cap P_f) \geq 0$ e $\lambda(E \cap N_f) \leq 0$. Logo, P_f, N_f é uma decomposição de Hahn para λ e o resultado vale. □

Definição 15. Uma medida λ em A é dita *absolutamente contínua* em relação a uma medida μ se $\mu(E) = 0$ implica $\lambda(E) = 0$, para $E \in \mathscr{A}$. Neste caso, escrevemos $\lambda < < \mu$. Uma carga λ é *absolutamente contínua* à carga μ se $|\lambda| < < |\mu|$.

Teorema 18. *Sejam λ, μ medidas finitas em $\mathscr{A}$. Então$\lambda < < \mu$ se e somente se dado $\varepsilon > 0$, existe$\delta > 0$tal que $E \in \mathscr{A}$ com $\mu(E) < \delta$implica$\lambda(E) < \varepsilon$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se $\mu(E) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ qualquer temos $\lambda(E) < \varepsilon$, donde $\lambda(E) = 0$.

($\Rightarrow$) Suponha que exista $\varepsilon > 0$ e conjuntos $E_n \in \mathscr{A}$ com $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\lambda(E_n) \geq \varepsilon$. Seja $F_n := \bigcup E_k$, de modo que $\mu(F_n) < 2^{-n+1}$ e $\lambda(F_n) \geq \varepsilon$ (pois $E_n \subseteq F_n$). Como (F_n) é uma sequência decrescente e μ, λ são finitas:

$$\mu\left(\bigcap F_n\right) = \lim \mu(F_n) = 0$$

$$\lambda\left(\bigcap F_n\right) = \lim \lambda(F_n) \geq \varepsilon$$

Logo, λ não é absolutamente contínua com respeito a μ. □

CONCLUSÕES

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma assimilação do bolsista a diversos resultados da Teoria da Medida. Como amplo campo de pesquisa, há muito para ser estudado para introduzir o aluno à carreira matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARTLE, R.G. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley \& Sons, 1995.

[2] HALMOS, P.R. Measure Theory. Springer, 1950.

[3] RUDIN, W. Principles of mathematical analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., 1976.

DIFICULDADES ENCONTRADAS

Teoria da Medida e Integração é um amplo ramo que utilize diversos conhecimentos e resultados de outros ramos da Matemática. Neste sentido, umas das principais dificuldades do aluno foi sua incapacidade em compreender assuntos mais avançados. Em especial, nos referimos à necessidade de compreensão básica em Topologia e em Geometria, cursos oferecidos pela graduação em níveis mais avançados. Contudo, com o avanço na tentativa de entender o assunto e suas consequências, vários aspectos mais avançados foram entendidos, aspectos esses que ajudaram a finalizar o período vigente da bolsa com êxito.

ATIVIDADES PARALELAS DESENVOLVIDAS PELO ALUNO

O bolsista participou de dois cursos virtuais durante o ano: um de Sistema dinâmicos oferecido pela USP durante o curso de Inverno e outro de Teoria de Semigrupos e Aplicações oferecido pelo seu orientador para alunos da pós-graduação na UFPE. Ambos os cursos mostraram ao discente aplicações do que se foi estudado e resultados que podem ser abordados no futuro.