
RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES

Aluno: Rafael Marques Cavalcante Neto
Orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho
Área do projeto: Ciências Exatas e da Terra
Vínculo: Bolsista PROPESQ RD (2019.1)

Universidade Federal de Pernambuco
13 de Julho de 2019

CONTEÚDO

1	Objetivos e metas	2
2	Introdução às EDOs	3
3	Compreendendo as soluções	4
4	Uma aplicação imediata do formalismo	6
4.1	Oscilações harmônicas	6
5	A Transformada de Laplace	10
6	O Teorema de Poincaré-Bendixson	13
6.1	Resultados e definições preliminares	13
7	Procedimentos e metodologia	15
8	Conclusão	16

Resumo do projeto

Neste relatório encontram-se os principais tópicos abordados nos seminários realizados com o professor Roberto de Almeida Capistrano Filho durante a vigência do edital PROPESQ (2019.1). Nesse sentido, o intento desse texto não é fornecer as demonstrações pertinentes de maneira minuciosa, mas tão-somente comunicar os resultados das nossas reuniões. O foco dessas são as Equações Ordinárias e a principal bibliografia utilizada foi o livro *Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas* de Djairo G. de Figueiredo, outras importantes referências são destacadas na seção de bibliografia.

1 OBJETIVOS E METAS

A ideia do projeto surge da necessidade de introduzir o aluno de matemática e física em temas atuais de pesquisa de maneira precoce, visto que tais áreas, por serem muito técnicas, acabam por inibir esse tipo de projeto. Nesse sentido, o aluno costuma ser prejudicado por não ter experiência com a pesquisa até os estágios mais tardios da sua formação. Assim, o projeto tem por objeto central a premissa de sanar esse déficit na formação atual desses profissionais.

Além disso, buscamos introduzir um tema extremamente presente, i.e., equações que visam - em grande parte - descrever e modelar a realidade, como no caso do Modelo Populacional, citado nas seções vindouras. Nesse sentido, o projeto ganha um peso extra, dado que o aluno é um estudante de Física e o tema é extremamente pertinente para sua formação. Ademais, a chance de vê-lo sob o olhar da matemática possivelmente abrirá importantes portas na sua construção acadêmica.

Por fim, ressaltamos que esse tipo de empreitada é árdua para um aluno inexperiente lidar por conta própria, portanto, a ponte entre o professor que é um pesquisador da área e o aluno é fundamental para que o estudo transcorra de maneira fluída. De forma que as reuniões no formato de apresentação unem grandes ferramentas pedagógicas e permitem o avanço do projeto. Ressaltamos que tais reuniões seriam muito mais difíceis sem o auxílio de instituições de fomento. Em suma, o projeto visa dar uma base sólida de pesquisa para um aluno de Física numa área que está na fronteira entre a Física e a Matemática, permitindo uma formação ímpar.

2 INTRODUÇÃO ÀS EDOS

Em um primeiro momento, introduzimos o conceito de EDOS (Equações Diferenciais Ordinárias) sob a óptica da matemática. Desenvolvemos a compreensão conceitual através de exemplos e discutimos a relação entre a descrição dos modelos e a realidade (vide modelo populacional abaixo). Em um segundo momento, estivemos preocupados em desenvolver um arsenal de técnicas de resolução dessas equações. Logo após, adentramos nas aplicações e em exemplos que ilustram o poder das EDOS na resolução de problemas a priori difíceis. Em seguida, discutimos brevemente a questão do formalismo matemático no tópico de formas diferenciais e potenciais exatos. Nesses contextos, segue uma introdução pertinente ao tema:

O berço das EDOS, objeto central do nosso estudo, é a Física. Nesse sentido, a melhor forma de compreender essa matéria é precisamente averiguar de que forma uma tais equações vêm à tona. Em particular, nos concentramos nas equações que envolvem derivadas de uma variável, conhecidas sob a alcunha de ordinárias. O exemplo motivador é a segunda lei de Newton unidimensional para uma partícula cuja massa é unitária, que estabelece a seguinte relação entre a força externa f e a sua aceleração:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (2.1)$$

O que é obviamente equivalente à expressão

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 \quad (2.2)$$

Onde $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^4$. Nesse caso, o maior grau de derivada envolvido em (1.2) é dois. Dizemos, então, que a EDO é de ordem dois e no caso em que a maior ordem é n , classificamo-la como EDO de ordem n . Destarte, no caso geral, Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^{n+2} . Entendemos por solução de (1.2) uma função n vezes diferenciável $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. O conjunto $(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \phi^{(n)}(t)) \in \Omega, \forall t \in I$.
2. Além disso, $F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \phi^{(n)}(t)) = 0, \forall t \in I$.

O contexto em que essas expressões surgiram foi o de modelagem de fenômenos naturais, então é esperado que o foco a priori dos estudos das EDOS tenha sido em torno da busca por suas soluções. No entanto, a teoria de EDOS criou vida própria e hoje se pode fazer muito mais do que análise e resolução de problemas aplicados com elas. Por exemplo, Simmons [2] dá uma maneira bastante elegante de definir as funções seno e cosseno de forma independente, em termos de soluções de uma EDO, isto é, todas as suas propriedades advêm naturalmente se impusermos condições iniciais apropriadas - mais sobre isso nas seções adiante - e as definirmos como solução da equação $\ddot{y}(x) + y(x) = 0$.

Na seção a seguir discutiremos brevemente alguns aspectos importantes de tais soluções.

3 COMPREENDENDO AS SOLUÇÕES

O primeiro tópico que abordaremos é a estabilidade de uma EDO, em particular, desejamos compreender sob que condições uma solução atinge um estado estacionário. No segundo item, investigamos as condições sob as quais essas soluções são únicas ou mesmo sequer existem. Os exemplos seguintes tornam mais precisas essas noções.

1. O modelo de Verhulst determina que a taxa de variação de uma população p é proporcional à própria população e que tal variação decai conforme a população cresce. Isso pode ser facilmente expresso pela equação:

$$\dot{p} = (a - bp)p \quad (3.1)$$

Com a, b constantes $\in \mathbb{N}$. Denotemos a população inicial por $p_0 = p(t_0)$. É um exercício de cálculo elementar demonstrar que a solução $p(t)$ dessa equação é da forma:

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad (3.2)$$

Nesse caso, vemos que se $t \rightarrow \infty$ então $p(t) = a/b, \forall p_0 > 0$. Essa solução é conhecida como estacionária ou como solução de equilíbrio.

Definição 1.1 Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.3)$$

Na qual a função f depende somente de x e não da variável independente t , é conhecida como equação autônoma.

Definição 1.2 Se \bar{x} é um zero de f , isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução de (2.3) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto \bar{x} é dito ponto de equilíbrio ou singularidade. Em (2.1), identificamos $p(t) = a/b$ e $p = 0$ como tais soluções.

Em seguida, discutimos com detalhes a estabilidade dos pontos de equilíbrio, problema crucial em muitas aplicações, em especial, advindas da Física e Biologia.

2. Discutimos livremente soluções de EDOs assumindo sua existência, mas além desse fato não ser imediato, é necessário, sobretudo em aplicações, compreender em que circunstâncias se dá sua unicidade, então o teorema a seguir é uma peça fundamental nesse contexto.

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade) Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ também seja contínua. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto

I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega, \forall x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I):

$$y'(x) = f(x, y) \quad (3.4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.5)$$

Em primeiro lugar, mostramos que a solução do P.V.I é equivalente à resolução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (3.6)$$

O que é uma consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo. Neste ponto, os passos são técnicos, mas o seguinte esboço é ilustrativo: primeiro criamos um conjunto \mathcal{C} de funções contínuas $g_n(x) : J \rightarrow \mathbb{R}$, cujos gráficos estão contidos em B. Ademais, definimos J como o intervalo contendo $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$.

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \quad (3.7)$$

Tomando-se a, b apropriados, indagamo-nos se o Teorema (1.1) é válido em um certo intervalo \bar{a} e, se sim, qual a relação entre \bar{a} , a função $f(x, y)$ e o seu bordo $\partial\Omega$?

O grande passo, contudo, é o segundo e nele reescrevamos (2.6) sob a forma funcional $y = \phi(y)$ e buscamos pontos fixos de ϕ pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. É notável que em \mathcal{C} podemos definir uma métrica, o que também foi provado. Além disso, \mathcal{C} é um espaço métrico completo.

Nesse contexto, as hipóteses do teorema são bastante razoáveis, com exceção da continuidade de f_y . Essa forte hipótese pode ser refinada em texto mais avançados, mas na nossa demonstração fica clara a necessidade dessa relação. Para mostrarmos que ϕ é uma contração, temos de estimar $|\phi(g_1(x)) - \phi(g_2(x))|$. Usando (2.4),

$$|\phi(g_1(x)) - \phi(g_2(x))| = \left| \int_{x_0}^x [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right|. \quad (3.8)$$

O seguinte lema é a razão pela qual fazemos tal imposição.

Lema 1.1 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x, y) e tal que a derivada parcial $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ também seja contínua. Dado um subconjunto limitado $\Omega_0 \subset \overline{\Omega_0} \subset \Omega, \exists K > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\Omega_0}. \quad (3.9)$$

Provamos que, de fato, o teorema é válido se tomarmos $\bar{a} < \frac{1}{K}$. Ainda prosseguimos a fim de enfraquecer um pouco as restrições sobre \bar{a} . Achamos, enfim, que \bar{a} satisfaz:

$$\bar{a} < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \quad (3.10)$$

. Onde M , pelo Teorema de Weierstrass, é o valor máximo de $f(x, y)$ em B.

4 UMA APLICAÇÃO IMEDIATA DO FORMALISMO

4.1 OSCILAÇÕES HARMÔNICAS

Esse problema é extremamente pedagógico, uma vez que introduz diversos pontos importantes sobre a busca por soluções e a análise acerca do comportamento das EDOs, além de ilustrar alguns conceitos recorrentes na Física (não adentraremos nesses, a fim de sermos concisos). Considere a seguinte EDO:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (4.1)$$

Onde m, γ e k são constantes reais positivas. Estudaremos os casos em que $F(t) = 0$ e $F(t) \neq 0$. Além disso, o caso em que γ é nulo e F não o é traz um conceito peculiar que vale ser analisado separadamente. O caso clássico do Oscilador Harmônico Simples e outros podem ser vistos como casos particulares da equação (4.1), nesse, por exemplo, γ e $F(t)$ são identicamente nulas.

PRIMEIRO CASO 1. Oscilação livre: $F(t) \equiv 0$.

Temos em mãos uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes, ao buscar soluções na forma $x(t) = e^{rt}$ determinamos a equação característica:

$$r^2 + \frac{\gamma}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (4.2)$$

Cuja solução é $r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$. Seja $\Delta = \gamma^2 - 4mk$, subdividiremos o caso 1 em três situações: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

- 1.1 Oscilações livres superamortecidas: $\Delta > 0$.

As soluções são, por hipótese, da forma $x_1(t) = Ae^{r_+t}$ e $x_2(t) = Be^{r_-t}$. Onde o símbolo subscrito \pm designa o sinal de Δ na equação (4.2). Pelo princípio da superposição (haja vista que a EDO é linear), temos que a solução geral é da forma:

$$x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} \quad (4.3)$$

Como ambas as raízes são negativas, temos que $t \rightarrow \infty$ implica em $x(t) \rightarrow 0$.

- 1.2 Oscilações livres criticamente amortecidas: $\Delta = 0$.

Nesse caso $r_+ = r_- = r$. A solução geral é da forma:

$$(A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \quad (4.4)$$

Pode ser demonstrado que se as raízes são repetidas, uma segunda solução linearmente independente pode ser encontrada adicionando o fator extra t multiplicativo. Como $\exp(y) > 0$ e $A+Bt$ possui apenas uma raiz, então temos que $x(t) = 0$ em um único instante. Isso limita significativamente a forma qualitativa do gráfico de $x(t)$ para três casos (facilmente esboçável com as propriedades citadas acima), além disso, qualquer decréscimo em γ nos leva ao próximo caso.

• 1.3 Oscilações livres subamortecidas: $\Delta < 0$. Observe que isto implica que as raízes são complexas. A separação dessas em suas partes reais e imaginárias e uma álgebra rápida utilizando a fórmula de Euler nos permite reescrever as soluções sob a forma:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} (k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)) \quad (4.5)$$

Com k_1 e k_2 constantes $\in \mathbb{R}$ e ω dado por:

$$\omega = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m} \quad (4.6)$$

Para entendermos melhor o comportamento dessa solução, considere as transformações dadas por $A > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ descritas por:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \cos \delta &= \frac{k_1}{A} \\ \sin \delta &= \frac{k_2}{A} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo em (4.5) obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2m}t} (A \cos \delta \cos \omega t + A \sin \delta \sin \omega t) \\ &= A e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vemos que a solução decai exponencialmente, mas que ao mesmo tempo oscila com amplitude delimitada pelas curvas $\pm A e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$. O gráfico da solução, portanto, pode ser novamente facilmente traçado diante dessa expressão simplificada.

SEGUNDO CASO 2. Oscilações forçadas não amortecidas. $F(t) \neq 0$ e $\gamma \equiv 0$.

Consideraremos apenas o caso em que $F(t)$ é uma função oscilatória simples, da forma $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. O caso geral é tratado usando o formalismo das *Funções de Green*, tipicamente fora do escopo de livros introdutórios. A equação característica se torna:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{k}{m} &= 0 \\ r &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

A solução geral da EDO homogênea associada é a notória EDO do M.H.S (Movimento Harmônico Simples), logo:

$$x_h(t) = k_1 \sin \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t \quad (4.10)$$

Identificamos ω_0 , portanto, como a frequência de oscilação natural do oscilador. A priori, consideremos o caso em que $\omega \neq \omega_0$. Isso nos permite usar a técnica dos *Coefficientes a Determinar*, donde buscando uma solução da forma $x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, obtemos:

$$\begin{aligned} mx'' + kx &= m(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t) + k(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= A(k - m\omega^2) \cos \omega t + B(k - m\omega^2) \sin \omega t \\ &= F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, temos que:

$$B = 0$$

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

$$= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

A solução geral é a soma da solução particular com a homogênea associada

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= k_1 \sin \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

O caso de grande interesse físico ocorre quando $\omega \approx \omega_0$, fenômeno que dá origem aos chamados *Batimentos*. Para termos uma noção mais precisa do dilema, considere o P.V.I:

$$\begin{cases} mx'' + kx = F_0 \cos \omega t, & k, m > 0 \quad \omega \neq \omega_0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Impondo o P.V.I (4.11) Na solução geral $x(t)$, obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = k_2 + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ 0 = x'(0) = k_1 \omega_0 \end{cases}$$

Logo,

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$$= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

Usando a identidade $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, a solução pode ser reescrita sob a forma:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

$$= \left(\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega_0 - \omega) t \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t \quad (4.12)$$

Em (4.12), como $\omega \approx \omega_0$ o termo $\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega_0 - \omega) t$ oscila muito lentamente quando comparado com a sua contraparte $\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$, daí o nome do fenômeno.

TERCEIRO CASO 3. Oscilações forçadas amortecidas. Esse é o caso geral, donde partimos originalmente:

$$mx'' + \gamma k' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad m, k, \gamma > 0 \quad (4.13)$$

O caso 1 é precisamente a EDO homogênea associada, resumimos os resultados:

1. $\Delta > 0$ $x_h(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$, $r_1, r_2 < 0$
2. $\Delta = 0$ $x_h = (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$
3. $\Delta < 0$ $x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m} t} (k_1 \cos \omega_1 t + k_2 \text{sen} \omega_1 t)$ com $\omega_1 = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}$

Procuramos uma solução para x_p pelo Método dos Coeficientes a determinar, ou seja, da forma $x_p = A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t$, donde obtemos:

$$\begin{aligned}
 mx'' + \gamma x' + kx &= \\
 &= m(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \text{sen} \omega t) + \gamma(-A\omega \text{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) \\
 &+ k(A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t) \\
 &= (A(k - m\omega^2) + B\gamma\omega) \cos \omega t + (B(k - m\omega^2) - A\gamma\omega) \text{sen} \omega t \\
 &= F_0 \cos \omega t
 \end{aligned}$$

O que resulta no sistema

$$\begin{cases} A(k - m\omega^2) + B\gamma\omega = F_0 \\ B(k - m\omega^2) - A\gamma\omega = 0 \end{cases}$$

Isto é,

$$A = \frac{(k - m\omega^2) F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{\gamma\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Analogamente ao caso 2, tomemos constantes $\rho > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{A^2 + B^2} \\
 \cos \delta &= \frac{A}{\rho} \\
 \text{sen} \delta &= \frac{B}{\rho}
 \end{aligned}$$

A nossa solução particular agora se escreve como

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

Lembramos que essa é a solução "permanente" (também conhecida como estacionária), uma vez que $x_h(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, essa por vezes na literatura recebe o nome de solução transiente. Esse exemplo tipifica o quão exaustivas podem ser as contas, por mais poderoso que seja o formalismo das EDOs, mesmo que tenhamos enxugado algumas parcelas e omitido toda a essência oriunda da Física. Nesse sentido, os próximos tópicos visam ter um teor um pouco mais teórico, a fim de ilustrar outros aspectos do desenvolvimento desse trabalho.

5 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A *Transformada de Laplace* é uma ferramenta poderosa na solução de EDOs com coeficientes constantes, haja vista que transforma uma EDO em uma equação algébrica. Uma transformada é uma classe de funções da forma:

$$Y(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

A função $K(s, t)$ é conhecida como o núcleo da transformada.

Definição 5.1 Seja $f(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos a *Transformada de Laplace* de $f(t)$, denotada por $F(s)$, como a integral

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

se a integral imprópria converge pelo menos para algum valor de s .

Diversas características elementares da transformada são imediatos da sua definição, como a linearidade, etc. Essa definição, no entanto, imediatamente levanta questão da convergência dessa integral, ou seja, quais funções possuem transformadas $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Veremos a seguir que uma classe grande de funções admitem essa representação.

Definição 5.2 Uma função f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existem constantes $C > 0$ e k , tais que

$$|f(t)| \leq C e^{kt}$$

para todo $t \in (0, \infty) \cap \text{Dom}_f$.

Teorema 5.1 Suponha que

1. f seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;
2. existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C > 0, M \geq 0$ tais que $|f(t)| \leq C e^{kt}$ quando $t \geq M$

Então, a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

existe para $s > k$.

A prova do teorema é tão breve que merece ser exposta aqui, a partir das definições (5.1) e (5.2), temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ \int_M^A |e^{-st} f(t)| dt &\leq C \int_M^A |e^{-st} e^{kt}| dt = C \left. \frac{e^{(k-s)t}}{k-s} \right|_M^A \\ &= C \frac{e^{(k-s)A}}{k-s} - C \frac{e^{(k-s)M}}{k-s} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_M^A |e^{-st} f(t)| dt < \infty$$

e isto implica imediatamente que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt < \infty$$

Corolário 5.1 Se $f(t)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 5.1, então é imediato que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

Partindo a definição (5.1), muitas propriedades interessantes surgem se nos fizermos as perguntas corretas, como qual é a transformada da derivada $\mathcal{L}\{f'(t)\}$? As respostas são muitas vezes simples, mas ocupariam muito mais espaço do que o necessário nesse relatório, então omitiremos a maioria. Provemos, no entanto, um teorema interessante e vejamos o seu uso em prática, lembramos que usaremos livremente essas propriedades não provadas que acabamos de mencionar (tais propriedades estão tipicamente tabeladas em livros-texto). Antes, citamos um teorema muito útil na prática.

Teorema 5.2 Suponha que

1. $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sejam contínuas em $[0, A]$ e que $f^{(n)}$ seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;
2. existem C, k, M
 $|f(t)| \leq Ce^{kt}, |f'(t)| \leq Ce^{kt}, \dots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$

Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe para $s > k$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Teorema 5.3 (Teorema do Deslocamento). Se $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$ e se $c \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da função $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s)$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$. De fato, para $s > a$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt &= \int_c^A e^{-st} f(t-c) dt \stackrel{(u=t-c)}{=} \int_0^{A-c} e^{-s(u+c)} f(u) du \\ &= e^{-sc} \int_0^{A-c} e^{-su} f(u) du \\ \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-sc} \int_0^{A-c} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-sc} \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

A relação acima nos diz que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$$

De maneira informal, o Teorema (5.3) nos diz que uma translação de c no eixo t , no sentido positivo, corresponde a uma multiplicação da transformada em t por uma exponencial. Vejamos uma aplicação imediata.

Exemplo (5.1) Considere o PVI:

$$\begin{cases} y'' + 4y = g(t) \\ f(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \text{ com } g(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases} \quad (5.1)$$

A fim de pô-la nas condições do Teorema 5.3, reescrevemos $g(t)$ na forma

$$g(t) = (1 - u_{2\pi}(t)) \cos 2t$$

Usando o Teorema 5.2 aplicado ao PVI (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos 2t - u_{2\pi}(t) \cos 2(t - 2\pi)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t) \cos 2(t - 2\pi)\} \\ &= \frac{s}{s^2 + 4} - e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{e^{-2\pi s} s}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Denote, como usual, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, então

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 4Y(s) &= \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 4} : \\ Y(s) &= \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{(s^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

Consultando uma tabela de transformações inversas, podemos encontrar a relação elementar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2} \text{sen}(2t)$. Donde, aplicando a transformação inversa, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4} \frac{d}{ds} \frac{2}{s^2+4}\right\} = -\frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{t \text{sen} 2t}{4} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(1-e^{-2\pi s})}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{e^{-2\pi s} s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s} s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \frac{t \text{sen} 2t}{4} - \frac{u_{2\pi}(t)(t-2\pi) \text{sen} 2(t-2\pi)}{4} \end{aligned}$$

Reorganizando o resultado, encontramos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \begin{cases} \frac{1}{4} t \text{sen} 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \frac{\pi}{2} \text{sen} 2t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

6 O TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

6.1 RESULTADOS E DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Definição 6.1 Definimos e denotamos uma *semi-órbita* positiva pela expressão

$$\phi_t^+(P) = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$$

Analogamente para a semi-órbita negativa.

Definição 6.2 O conjunto ω -limite no ponto P em $t = 0$ é definido por

$$\omega(P) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n)) \right\}$$

O conjunto α -limite é definido de maneira similar

$$\alpha(P) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n)) \right\}$$

Doutra forma, tais conjuntos representam os pontos de acumulação de ϕ_t^+ no limite em que t tende a infinito. Toda a discussão que segue também é válida para o conjunto α -limite definido por (6.2).

Teorema 6.1 Se a semi-órbita positiva $\phi_t^+(P)$ for limitada, ou seja, estiver contida num compacto K, então o conjunto ω -limite satisfaz:

- $\omega(P) \neq \emptyset$;
- $\omega(P)$ é invariante, ou seja, se $Q \in \omega(P)$ então a solução $\phi_t(Q) \in \omega(P) \forall t$;
- $\omega(P)$ é compacto;
- $\omega(P)$ é conexo;

Dem.:

a) Note que se K é compacto, então qualquer sequência t_n em K terá uma subsequência $t_k \rightarrow \infty$ tal que ϕ_{t_k} converge para algum ponto em K.

b) Seja $Q \in \omega(P)$ e $s \in \mathbb{R}$. Por definição,

$$\exists t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi_{t_n}(P) \rightarrow Q$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{(t_n+s)}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_s(\phi_{t_n}(P)) = \phi_s(Q)$$

Por continuidade de ϕ_s .

Haja vista que $(t_n + s) \rightarrow \infty$, isso mostra que

$$\phi_s(Q) \in \omega(P)$$

Como s é arbitrário, o resultado segue.

c) Como $\omega(P) \subset K$, basta mostrar que $\omega(P)$ é fechado. Seja q_n uma sequência contida em $\omega(P)$ convergindo para q . Para cada n , existe $t_k(n) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{t_k(n)}(P) = q_n$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos n de modo que

$$d(q_n, q) < \frac{\epsilon}{2}$$

e tomamos $k = k(n)$ tal que

$$d(\phi_{t_k(n)}(P), q_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Usando a desigualdade triangular temos que

$$d(\phi_{t_k(n)}(P), q) < \epsilon$$

Agora usamos o fato de que ϵ é arbitrário, logo $q \in \omega(P)$

d) Suponha, por contradição, que existem abertos disjuntos A e B tais que:

$$\begin{cases} \omega(P) \subset A \cup B \\ \omega(P) \cap A \neq \emptyset \text{ e } \omega(P) \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Sejam $q_a \in \omega(P) \cap A$ e $q_b \in \omega(P) \cap B$. Além disso, tome $t_n, s_n \rightarrow \infty$ de tal maneira que

$$0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_n < s_n < \dots$$

tais que $\phi_{t_n}(P) \rightarrow q_a$ e $\phi_{s_n}(P) \rightarrow q_b$ quando $n \rightarrow \infty$

Como $\phi_t(P)$ é contínua, temos que para cada n , existe um $u_n \in (t_n, s_n)$ tal que $\phi_{u_n}(P) \notin A \cup B$. Pelo Teorema do Confronto, segue que $u_n \rightarrow \infty$

Seja r tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{u_n}(P) = r$. Note que:

- r existe, pois $\phi_{u_n} \in K$;
- $r \in \omega(P)$;
- $r \notin A \cup B$. De fato, seja D o complementar do aberto $A \cup B$ em relação a K . Como D é fechado e $\phi_{u_n} \in D$, qualquer ponto de acumulação de ϕ_{u_n} também pertence a D .

Absurdo, pois contraria a forma que $\omega(P)$ foi tomado.

7 PROCEDIMENTOS E METODOLOGIA

Nosso estudo se baseou no formato seminário, i. e., eu era estimulado a apresentar os principais resultados conforme ministrava-os para o professor Roberto Capistrano. Para tal, utilizamos como principal fonte de referência o livro Equações Diferenciais Aplicadas de Djairo G. de Figueiredo. Todavia, o livro demandava uma certa necessidade de materiais complementares, então usufruí de livros do acervo da Biblioteca do Centro de Ciências Exatas, entre eles destaco a relevância do livro excepcional do George Simmons, Differential Equations With Historical Notes e o livro Elementary Differential Equations de Donald L. Kreider. Além disso, a fim de preparar tais apresentações, foi necessário preparar o material antecipadamente, no formato notas de aula. Por fim, grande ênfase foi dada na demonstração precisa dos teoremas e nenhum lema deixou de ser demonstrado. O grande teorema da disciplina, a nível introdutório, é o Teorema de Existência e Unicidade e esse recebeu duas reuniões específicas para um tratamento mais parcimonioso. O escopo do projeto é abranger, até meados de 2019.2 todos os conteúdos contidos no livro-base, Equações Diferenciais Aplicadas. Até o momento (13/12/2018), já concluímos três capítulos de um total de sete.

8 CONCLUSÃO

EDOs são realmente interessantes, haja vista que encontram-se na fronteira entre a Física e a Matemática, temas que me fascinam em proporção similar. Nesse contexto, pude vislumbrar as ideias que já eram trabalhadas de maneira natural no meu curso de Física com ênfase nas miúdes matemáticas, que certamente dão uma outra caracterização ao tratamento das EDOs. Abordamos conceitos importantes e primordiais para o estudo dessas, como o estudo formal das suas soluções e nesse sentido o teorema central é o Teorema de Existência e Unicidade que foi provado com o auxílio do Teorema do Ponto Fixo de Bannach, uma demonstração moderna que tem o benefício de ser construtiva, uma vez que fornece uma maneira de construir soluções. Ademais, o tratamento de problemas aplicados não foi diminuído e discutimos problemas do corpo principal do texto.

REFERÊNCIAS

- [1] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas (Coleção Matemática Universitária)*, IMPA, 2012.
- [2] George F. Simmons, *Differential Equations With Historical Notes*, McGraw-Hill, 1972.
- [3] Donald L. Kreider, Robert G. Kuller e Donald R. Ostberg, *Equações Diferenciais*, Editora da Universidade de São Paulo, 1972.
- [4] *Ordinary Differential Equations*, Morris Tenenbaum, Harry Pollard, Courier Corporation, 1963.