FACEPE

EDITAL FACEPE 03/2017 - PIBIC/FACEPE

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Julho/2017
Recife - PE

- **Projeto:** Teoria do Controle Aplicada às EDO's
- **Orientador:** Roberto de A. Capistrano Filho - CPF: 008.167.044-30
- **Instituição**: Universidade Federal de Pernambuco, Campus: Recife.
- **Centro**: Centro de Ciências Exatas e da Natureza
- **Departamento**: Departamento de Matemática
- **Bolsista:** Mateus Ferreira de Melo - CPF: 110.588.484-88
- **Vigência do projeto:** 01/08/2017 à 31/07/2018
- **e-mail:** capistranofilho@dmat.ufpe.br

1 Resumo

O presente relatório dedica-se a expor os resultados assimilados pelo bolsista durante a vigência do projeto. Como principal objetivo, o aluno empenhou-se em apresentar uma releitura dos principais conceitos sobre o tema abordado.

O primeiro resultado estudado ressalta o Teorema de Existência e Unicidade, que impõe condições para a obtenção de uma única solução do problema proposto. Em seguida, observa-se o comportamento assintóticos destas soluções em relação ao tempo.

Além disso, é apresentado uma introdução à controlabilidade, expondo sua definição e principais resultados para sua análise. Por fim, algumas aplicações físicas são inseridas no contexto matemático, explicitando alguns métodos de obtenção de soluções e discutindo suas principais características.

2 Introdução

Para a resolução de vários problemas físicos, químicos, biológicos, econômicos e ecológicos em formulação matemática, é necessário o domínio de equações que envolvam derivadas de funções-incógnitas. Estas são as *Equações Diferenciais Ordinárias* (EDOs). Muito do que se sabe sobre a *teoria quantitativa* dessas equações (ou seja, a obtenção de suas soluções) foi elaborado e discutido juntamente com o avanço do Cálculo, por volta do século XVII.

Talvez um dos exemplos mais familiares de uma EDO derive de um dos precursores do Cálculo. Em suas leis, Isaac Newton (1643-1727) descreve que a força resultante atuante em uma partícula P é proporcional à sua aceleração a, que por sua vez é a derivada segunda da função-posição x de P. Por exemplo, segundo a Lei de Hooke, a força atuante em uma mola de massa $m > 0$ é proporcional ao seu deslocamento. Assim, sendo $k > 0$ a constante elástica da mola, temos a EDO

$$m \cdot x''(t) = k \cdot x(t). \tag{1}$$

Tal equação é classificada como *EDO de 2º ordem*, pois a derivada segunda é sua derivada de maior ordem. Para encontrar sua solução geral, ou seja, encontrar uma expressão que englobe todas as soluções de (1), devemos procurar por soluções da forma $x = e^{\lambda t}$, onde λ é o termo desejado.
Por exemplo, substituindo esta expressão nesta outra EDO de 2º ordem

$$x'' - 3x' - 4x = 0, \tag{2}$$

encontramos o seguinte polinômio (que é conhecido como *polinômio característico* da equação)

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

e podemos concluir que as funções $x = e^{4t}$ e $x = e^{-t}$ são soluções de (2).

As equações (1) e (2) são conhecidas como equações *homogêneas*, pois podem ser escritas na forma

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + ... + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0. \tag{3}$$

Mas como obter a solução geral destas equações? Para isso, é necessário o seguinte teorema

Teorema 2.1. *Seja $\vartheta(I)$ o conjunto das funções contínuas definidas em I. O conjunto de soluções de (3) de ordem n definidas em um intervalo I é um subespaço vetorial de $\vartheta(I)$ de dimensão n.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em [4]. □

O Teorema 2.1 é importante pois nos diz que a solução geral de (3) pode ser encontrada através de uma combinação linear de n soluções linearmente independentes de (3).

Assim, a solução geral de (2) é dada por

$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Já a solução geral de (1) é um pouco mais complicada, pois as raízes do seu polinômio característico

$$\lambda^2 - \frac{k}{m}\lambda = 0,$$

não são reais, visto que $-\dfrac{k}{m} < 0$. Apesar disto, podemos usar a *fórmula de Euler* para obter como solução geral

$$x(t) = c_1 sen\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + c_2 cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tal função corresponde ao deslocamento de uma mola.
A partir do século XVII, percebeu-se que a obtenção exata de EDOs era possível apenas a grupo restrito destas equações. Surge assim, a *teoria qualitativa* de EDOs, um estudo voltado às características das soluções a partir de suas respectivas equações. Seus principais precursores, Henri Poincaré(1854-1912) e Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) contribuíram com grandes resultados e teoremas que serão mencionados na seção 3.

3 Teorema de Existência e Unicidade

Definição: Uma função $K : X \to X$, onde X é um espaço métrico, é uma contração se existe uma constante C, $0 < C < 1$ tal que

$$\rho(K(x), K(y)) \leqslant C\rho(x, y,)$$

onde ρ é a distância definida em X.

Um fato que merece ser mencionado, mas que não será provado, é que toda contração é uma função contínua.

Lema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja X um espaço métrico completo não-vazio, e seja $K : X \to X$ uma contração. Então K possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Considere $x_0 \in X$, definimos a sequência $\{x_n\}$ por

$$x_1 = K(x_0),\;\; x_2 = K(x_1) = K^2(x_0), \ldots, x_n = K(x_{n-1}) = K^n(x_0).$$

Afirmamos que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, seja $\rho(x_0, x_1) = \delta$, então

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(K(x_1), K(x_0)) \leqslant C\rho(x_1, x_0) = C\delta.$$

Indutivamente, segue que $\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant C^n\delta$. Como $C^n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que $\rho(x_n, x_{n-1}) \to 0$, como queríamos mostrar. Como X é completo, temos que $\{x_n\}$ converge para algum $a \in X$, onde, usando a continuidade de K

$$K(a) = \lim K(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Logo, a é ponto fixo.

Para mostrar a unicidade, considere $x, y \in X$ tal que $K(x) = x$ e $K(y) = y$. Então

$$\rho(x,y) = \rho(K(x), K(y)) \leqslant C\rho(x,y) \Rightarrow (1-C)\rho(x,y) \leqslant 0.$$

Mas $1 - C > 0$ e $\rho(x,y) \geqslant 0$. Logo $\rho(x,y) = 0$, o que implica $x = y$. $\square$

Lema 3.2. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma função contínua tal que a derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também seja contínua. Então f será lipschitziana em qualquer compacto K contido em Ω. Ou seja, existe uma constante $\mu > 0$ tal que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant \mu|y_1 - y_2|, \tag{4}$$

para todos (x, y_1) e $(x, y_2) \in K$.

Demonstração. Seja $\delta = \min\{\mathrm{dist}\big((x,y_1), \partial K\big),\ \mathrm{dist}\big((x,y_2), \partial K\big)\}$. Dividiremos a demonstração em dois casos:

- Se $|y_1 - y_2| < \delta$

Então o segmento de reta $\overline{y_1 y_2}$ está contido em K. Daí, pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, \xi$ neste segmento tal que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x,\xi)|\, |y_1 - y_2|$. Como f_y é contínua, é limitada em K, logo podemos tomar

$$M_1 = \max\{|f_y(x,y)|; (x,y) \in K\}.$$

Assim, $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant M_1|y_1 - y_2|$.

- Se $|y_1 - y_2| \geqslant \delta$

Como f também é contínua, tomamos $M_2 = \max\{|f(x,y)|; (x,y) \in K\}$. Daí

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant |f(x,y_1)| + |f(x,y_2)| \leqslant 2M_2 \leqslant \frac{2M_2\ |y_1 - y_2|}{\delta}.$$

Portanto, bastar tomar $\mu = \max\left\{M_1, \dfrac{2M_2}{\delta}\right\}$ em (4). $\square$

Lema 3.3. *Seja $\vartheta[a,b]$ o espaço métrico das funções contínuas definidas em $[a,b]$ em que sua métrica é dada por*

$$d(f_1, f_2) = max\{|f_1(x) - f_2(x)|; x \in [a,b]\}.$$

Então $\vartheta[a,b]$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy neste espaço métrico. Então, para todo $x \in [a,b]$, temos

$$\max |f_m(x) - f_n(x)| \to 0,$$

quando $m, n \to \infty$. Em particular, para um ponto x_0 arbitrário em $[a,b]$,

$$\max |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \to 0.$$

Logo $\{f_n(x_0\}$ também é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e como $\mathbb{R}$ é completo, tal sequência converge para $f(x_0)$. Como x_0 é arbitrário, a sequência $\{f_n(x)\}$ *converge pontualmente* a uma função f. Ainda mais, afirmamos que tal sequência converge uniformemente.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ podemos achar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ para $m, n > N$ e para $x \in [a,b]$. Assim

$$f_n - \epsilon/2 < f_m < f_n + \epsilon/2.$$

Fazendo $m \to \infty$

$$f_n - \epsilon/2 \leqslant f \leqslant f_n + \epsilon/2,$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon/2 < \epsilon, \forall x \in [a,b], \tag{5}$$

como desejado. Resta mostrar que f pertence a $\vartheta[a,b]$. Basta notar que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Ora, por (5) e usando o fato que f_n é uma função contínua, temos que podemos tomar ϵ em que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em $[a,b]$ e obtemos o resultado. □

Teorema 3.1 (**Teorema de Existência e Unicidade**). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto no plano. Suponha que a derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também é contínua. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I e uma única função diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}$ com $\big(x, \gamma(x)\big) \in I$ que é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

Demonstração. Inicialmente, através do Teorema Fundamental do Cálculo, note que o sistema (6) possui mesma solução que a equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{7}$$

Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tomemos a e b positivos tais que o retângulo

$$B = \{(x,y); |x - x_0| \leqslant a \ , \ |y - y_0| \leqslant b\}$$

esteja contido em Ω. Note que B é compacto. Definimos também

$$M = \max\{|f(x,y)|; (x,y) \in B\}$$

e

$$0 < \bar{a} \leqslant \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Sejam I_a o intervalo fechado $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$ e C o conjunto de todas as funções contínuas $g : I_a \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} |g(x) - y_0| \leqslant b, \\ g(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Para tornar C um espaço métrico, definimos nele a distância

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)|; x \in I_a\}.$$

A partir do Lema 3.3, sabemos que C é um espaço métrico completo. Consideremos agora a função $\phi : C \to C$ dada por

$$\phi(\gamma(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \gamma(s))ds.$$

Note que esta função está definida em C, pois é uma função contínua em que $\phi(y_0) = x_0$ e também

$$|\phi(\gamma) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \gamma(s))ds \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Ma \leqslant b.$$

Como $\phi' = f(x, \gamma(x))$ é uma função contínua, temos pelo Lema 3.2 que existe $K > 0$ tal que

$$|\phi(\gamma_1(x)) - \phi(\gamma_2(x))| \leqslant K \int_{x_0}^{x} |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|ds \leqslant K|x - x_0| \cdot d(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant Ka \cdot d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Portanto, temos que ϕ será uma contração se determinarmos $a < \dfrac{1}{K}$.

Basta agora tomar $\bar{a} < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{K}\right\}$ e temos pelo Lema 3.1, que existe uma única função γ tal que $\phi(\gamma) = \gamma$, ou seja, é solução da equação integral (7). Logo, o Teorema se verifica para $I_a = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$. □

Lema 3.4. *Sejam $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ soluções de (6) que contêm x_0 em seus domínios. Então*

$$\gamma_1(x) = \gamma_2(x), \forall x \in I_1 \cap I_2.$$

Demonstração. Note que $I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto contendo x_0. Seja $J = \{x \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(x) = \gamma_2(x)\}$ um subconjunto de $I_1 \cap I_2$. As seguintes observações são feitas sobre este intervalo:

- J é não vazio, pois $x_0 \in J$;
- J é fechado em $I_1 \cap I_2$, pois é o conjunto dos pontos onde duas funções contínuas coincidem;
- J é aberto em $I_1 \cap I_2$. De fato, dados $\alpha \in J$ e $\beta = \gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\alpha)$, pelo Teorema 3.1 podemos tomar $\epsilon > 0$ e $I_\alpha = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ tal que o PVI

  $$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(\alpha) = \beta, \end{cases}$$

  possui uma única solução. Logo, $I_\alpha \subset J$ e concluímos que α pertence ao interior de J. Como α era arbitrário, segue que J é aberto.

Por fim, usamos a conexidade de $I_1 \cap I_2$ para concluir que

$$J = I_1 \cap I_2 \ \text{ e } \ \gamma_1 = \gamma_2 \ \text{ em } \ I_1 \cap I_2.$$

$\square$

Definição: Dizemos que a solução $\gamma : I \to \mathbb{R}$ de (6) é *maximal* se para qualquer outra solução $\gamma' : I' \to \mathbb{R}$ de (6) com $I \subset I'$ temos $I = I'$.

Teorema 3.2. *Mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Toda solução de (6) pode ser estendida a um intervalo maximal, o qual é aberto.*

Demonstração. Considere o conjunto de todas as soluções γ_λ de (6) definidas em respectivos intervalos abertos I_λ que contêm o ponto x_0. Note que a união $I = \cup I_\lambda$ é um intervalo aberto, e segue pelo Lema 3.4 que está bem definida a função $\gamma : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(x) = \gamma_\lambda(x), \text{ se } x \in I_\lambda.$$

Afirmamos que I é o intervalo maximal. Com efeito, seja $I = (\omega_-, \omega_+)$. Suponhamos, por contradição, que existe uma solução $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}$ de (6) ,sendo J um intervalo que contenha propriamente I. Podemos supor sem perda de generalidade que $\omega_+ \in J$. Segue pelo Teorema 3.1 que a solução de

$$\begin{cases} y' = f(x, y,) \\ y(\omega_+) = \tilde{\gamma}(\omega_+), \end{cases}$$

possui uma única solução no intervalo $(\omega_+ - \bar{a}, \omega_+ + \bar{a})$. Note que o fato de $\tilde{\gamma}$ ser solução definida em ω_+ implica que o ponto $(\omega_+, \gamma(\omega_+))$ pertence ao aberto Ω. Daí podemos concluir que a função $\hat{\gamma} : (\omega_-, \omega_+ + \bar{a}) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\hat{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma(x), & \text{se } x \in (\omega_-, \omega_+) \\ \tilde{\gamma}(x), & \text{se } x \in [\omega_+, \omega_+ + \bar{a}) \end{cases}$$

é solução de (6). Mas isto é impossível, pois I foi a união de todos as soluções deste PVI, e $(\omega_-, \omega_+ + \bar{a}) \nsubseteq I$. $\square$

Lema 3.5. *Se $K \subset \Omega$ é compacto, então um mesmo $\bar{a}$ pode ser tomado de modo a servir para todas as condições iniciais $(x_0, y_0) \in K$.*

Demonstração. Considere uma δ-vizinhança K_δ de K tal que

$$K \subset K_\delta \subset \overline{K}_\delta \subset \Omega.$$

Então podemos escolher a e b tais que o retângulo B esteja contido em $\overline{K}_\delta$ para $(x_0, y_0) \in K$. Portanto, basta tomar

$$M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in \overline{K}_\delta\}$$

e $\bar{a}$ satisfazendo

$$\bar{a} < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\},$$

sendo K a constante do Lema 3.2. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $\gamma : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ solução maximal de (6). Então temos que $\gamma(x) \to \partial\Omega$ quando $x \to \omega_+$ (analogamente para $x \to \omega_-$). Ou seja, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $\tau < \omega_+$ tal que $\forall x \in (\tau, \omega_+)$ temos que $\big(x, \gamma(x)\big) \notin K$.*

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos:

- Se $w_+ = +\infty$
  Como K é limitado, basta tomar

  $$\tau = \sup_{(x,y)\in K} x$$

  e vale o resultado.

- Se $w_+ < +\infty$
  Basta tomar $\tau = \omega_+ - \bar{a}$, e teremos que para $x \in (\tau, \omega_+)$ então $\big(x, \gamma(x)\big) \notin K$.

  De fato, suponha por contradição que exista x_1 tal que $x_1 \in (\tau, \omega_+)$ e $\big(x_1, \gamma(x_1)\big) \in K$. Pelo Lema 3.5, podemos fixar um $\bar{a}$ de modo a servir a todas as condições iniciais em K. Então a solução $\gamma(x_1)$ estaria definida em $(x_1 - \bar{a}, x_1 + \bar{a})$. Mas como

  $$x_1 + \bar{a} > \tau + \bar{a} = \omega_+$$

  teríamos uma contradição ao fato de I ser maximal.

$\square$

Lema 3.6 (**Lema de Gronwall**). *Sejam α, β e δ funções contínuas definidas em um intervalo (a, b) tais que $\beta(x) \geqslant 0$ para $x \in (a, b)$ e*

$$\delta(x) \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)ds, \tag{8}$$

em que x_0 é um ponto qualquer do intervalo (a, b). Então

$$\delta(x) \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}ds.$$

Em particular, se $\alpha(x) \equiv k = cte$, então

$$\delta(x) \leqslant ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds}.$$

Demonstração. Seja

$$\omega(x) = \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)ds$$

Então temos por (8) e considerando que $\beta \geqslant 0$

$$\omega'(x) = \beta(x)\delta(x) \leqslant \beta(x)\alpha(x) + \beta(x)\omega(x)$$

e assim

$$\omega'(x) - \beta(x)\omega(x) \leqslant \beta(x)\alpha(x).$$

Multiplicamos ambos os lados desta desigualdade por $e^{-B(x)}$, onde $B'(x) = \beta(x)$, obtemos

$$\left(\omega(x)e^{-B(x)}\right)' \leqslant \beta(x)\alpha(x)e^{-B(x)}$$

e logo,

$$\omega(x)e^{-B(x)} \leqslant \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{-B(s)}ds.$$

Portanto,

$$\omega(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}ds.$$

Daí,

$$\delta(x) \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)ds \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}ds.$$

Se considerarmos $\alpha(x) \equiv k$, basta notar que

$$-\frac{d}{ds}(e^{\int_s^x \beta(u)du}) = \beta(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}.$$

Seja $T(s) = -e^{\int_s^x \beta(u)du}$, então

$$\delta(x) \leqslant k + k\int_{x_0}^{x} \beta(s)e^{\int_s^x \beta(u)du}ds = k + k\big(T(x) - T(x_0)\big),$$

logo

$$\delta(x) \leqslant k + k\big(-e^{\int_x^x \beta(u)du} - (-e^{\int_{x_0}^x \beta(u)du})\big).$$

Daí,

$$\delta(x) \leqslant k + k(-e^0 + e^{\int_{x_0}^x \beta(u)du}),$$

consequentemente,

$$\delta(x) \leqslant ke^{\int_{x_0}^x \beta(s)ds}.$$

□

Teorema 3.4. *Suponhamos que Ω seja a faixa $\{(x, y) : a < x < b\}$ e que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua. Suponhamos também que a derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ seja contínua e limitada em Ω. Então para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe uma única função diferencial $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ que é solução de (6).*

Demonstração. A existência e unicidade é garantida pelo Teorema 3.1. Basta verificar que a solução estará definida em todo o intervalo. Para isso, devemos mostrar que em todo subconjunto $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ a função será limitada, sendo $0 < \epsilon < min\{b-x_0, x_0-a\}$.

Sejam

$$k_1 = \max\{|f(x, y_0)| : a + \epsilon \leqslant x \leqslant b - \epsilon\}$$

e

$$k_2 = \sup\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in \Omega\}.$$

Por (7), sabemos que

$$|y(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f\big(s, y(s)\big)|ds.$$

Para estimar o integrando do último termo, usamos a desigualdade triangular

$$|f(x, y)| \leqslant |f(x, y_0)| + |f(x, y) - f(x, y_0)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, y_1 \in \Omega$ tal que

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leqslant |f_y(x, y_1)| \cdot |y - y_0|.$$

Como $|f(x, y_0)| \leqslant k_1$ e $|f_y(x, y_1)| \leqslant k_2$, temos

$$|f(x, y)| \leqslant k_1 + k_2|y - y_0|.$$

Assim

$$|y(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} [k_1 + k_2|y(s) - y_0|]ds = \int_{x_0}^{x} k_1 ds + \int_{x_0}^{x} k_2|y(s) - y_0|ds$$

e logo,

$$|y(x) - y_0| \leqslant k_1(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} k_2|y(s) - y_0|ds.$$

Como $(x - x_0) \leqslant |x - x_0| \leqslant (b - a)$, temos

$$|y(x) - y_0| \leqslant k_1(b - a) + \int_{x_0}^{x} k_2|y(s) - y_0|ds.$$

Definindo $k_3 := k_1(b - a)$, concluímos que

$$|y(x) - y_0| \leqslant k_3 + \int_{x_0}^{x} k_2|y(s) - y_0|ds.$$

Daí, podermos usar o Lema 3.6 para obter

$$|y(x) - y_0| \leqslant k_3 e^{\int_{x_0}^{x} k_2 ds} \leqslant k_3 e^{k_2(x - x_0)}.$$

Portanto

$$|y(x) - y_0| \leqslant k_3 e^{k_2(b-a)} = C = cte.$$

Vemos assim que, de fato, a solução γ será limitada em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Como x_0 é arbitrário, obtemos que γ será limitada em todo o intervalo (a, b) e podemos concluir que está definida neste intervalo.

Com efeito, se supormos que exista $\beta \in (a, b)$ tal que $\gamma : (a, \beta) \to \mathbb{R}$ fosse solução maximal de (6), poderíamos tomar $\delta \in (a, \beta)$ e um compato $K \subset \Omega$ dado por

$$K = \{\delta \leqslant x \leqslant \beta, -C \leqslant \gamma(x) \leqslant C\},$$

tal que $\big(x, \gamma(x)\big) \in K$ para $x \geqslant \delta$. Mas isto contraria o Teorema 3.3, logo, é um absurdo. Assim, o teorema está provado. $\square$

Teorema 3.5 (Dependência Contínua). *Mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Sejam γ_1 e γ_2 duas soluções da equação*

$$y' = f(x, y),$$

definidas em um intervalo compacto $[x_0, x_1]$. Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)| \leqslant |\gamma_1(x_0) - \gamma_2(x_0)|e^{K(x-x_0)}, \forall x \in [x_0, x_1].$$

Demonstração. Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um aberto que contenha os gráficos de $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$. Como

$$\gamma_1'(x) - \gamma_2'(x) = f\big(x, \gamma_1(x)\big) - f\big(x, \gamma_2(x)\big),$$

segue, por integração, que

$$\gamma_1(x) - \gamma_2(x) = \gamma_1(x_0) - \gamma_2(x_0) + \int_{x_0}^{x} [f\big(s, \gamma_1(s)\big) - f\big(s, \gamma_2(s)\big)]ds.$$

Pelo Lema 3.2 podemos tomar $K > 0$ tal que

$$\gamma_1(x) - \gamma_2(x) \leqslant \gamma_1(x_0) - \gamma_2(x_0) + \int_{x_0}^{x} K|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|ds.$$

Portanto, usando a Desigualdade de Gronwall (Lema 3.6), chegamos a

$$|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)| \leqslant |\gamma_1(x_0) - \gamma_2(x_0)|e^{K(x-x_0)}.$$

$\square$

Corolário 3.1. *Seja $\gamma_0(x)$ uma solução de (6) definida em um intervalo compacto $[x_0, x_1]$ e seja uma sequência de condições iniciais y_n convergindo para $y_0 = \gamma_0(x_0)$. Então as soluções γ_n correspondentes a*

$$\begin{cases} y' = f(x, y,) \\ y(x_0) = y_n, \end{cases}$$

também estão definidas no intervalo $[x_0, x_1]$ para n grande, e $\gamma_n \to \gamma_0$ uniformemente neste intervalo.

Demonstração. Por hipótese, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geqslant N$ então

$$|y_n - y_0| < \epsilon.$$

Considere Ω_0 uma vizinhança de γ_0 entre $[x_0, x_1]$ com amplitude δ. Escolhemos

$$\epsilon = \frac{\delta}{e^{k(x_1 - x_0)}}.$$

Então, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ temos

$$|y_n - y_0| < \frac{\delta}{e^{k(x_1 - x_0)}}$$

e, consequentemente

$$|y_n - y_0| \cdot e^{k(x_1 - x_0)} < \delta.$$

E pelo Teorema 3.5

$$|\gamma_n(x) - \gamma_0(x)| < \delta, \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Portanto, por definição, temos que $\gamma_n \to \gamma_0$ uniformemente. $\square$

4 Estabilização

Nesta seção, estudaremos sistemas de equações na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y), \\ y'(t) = g(x,y), \end{cases} \tag{9}$$

em que $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. As equações (9) são denominadas *autônomas* pois as funções f e g independem da variável t.

Note que, neste caso, as funções f_t e g_t são identicamente nulas, e como f e g são contínuas por hipótese, um Teorema análogo ao Teorema 3.1 garante que existe uma única solução $\big(x(t), y(t)\big)$ de (9) tal que para qualquer (x_0, y_0, t_0) temos

$$\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (x_0, y_0).$$

Geometricamente, isto implica que tais soluções não se interseccionam no espaço. Ainda mais, sendo (9) um sistema autônomo, temos que se $\big(x(t), y(t)\big)$ é uma solução, então qualquer curva paralela a esta em relação ao eixo t também será solução.

De fato, considere a função

$$\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \big(x(s), y(s)\big),$$

onde denotamos $s = t + h$,com $h \in \mathbb{R}$. Então

$$\bar{x}'(t) = x'(s) = f\big(x(s), y(s)\big) = f\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big),$$

mostrando que $\bar{x}(t)$ também é solução. Analogamente para $\bar{y}(t) := y(s)$.

Podemos esboçar as soluções de (9) como *curvas parametrizadas* de t no plano xy, que é conhecido como *plano de fases*. Neste plano, cada curva é uma *trajetória* ou *órbita*, e uma amostra significativa de órbitas é o que chamamos de *retrato de fases*.

Além disso, definimos um campo vetorial a partir de $\big(f(x,y), g(x,y)\big)$, onde as órbitas são tangentes em cada ponto ao campo.

Definição: Seja $(\big(x(t), y(t)\big)$ uma solução globalmente definida de (9). Definimos a função $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ por

$$\phi(P, t) \to (\big(x(t), y(t)\big),$$

onde $P = (\big(x(0), y(0)\big)$.

A partir dela, definimos a função $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\phi_t(P) = \phi(P, t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Garantimos as seguintes propriedades de $\phi_t(P)$:

- $\phi_t(P)$ é contínua;
- $\phi_0(P) = P, \forall P \in \mathbb{R}^2$;
- $\phi_t \circ \phi_s(P) = \phi_{t+s}(P), \forall P \in \mathbb{R}^2, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

A primeira propriedade decorre do Teorema 3.5, enquanto a segunda segue imediatamente da definição. A terceira é consequência da unicidade de soluções.

Com efeito, sejam $\alpha(t) = \phi_t(\phi_s(P))$ e $\beta(t) = \phi_{t+s}(P)$. Segue que $\alpha(t) = \beta(t)$, pois ambas são soluções de (9) com condição inicial $\alpha(0) = \beta(0) = \phi_s(P)$.

Definição: Uma órbita $\phi_t(P)$ de (9) é dita *periódica* se existe $T > 0$ tal que

$$\phi_t(P) = \phi_{t+T}(P), \forall t \in \mathbb{R}.$$

O mínimo T que satisfaça tal propriedade é dito *período* da órbita. Assim, se uma órbita contiver pontos duplos, ou seja, se houver $t_1 > t_2$ tal que t_1 seja o menor número que satisfaça

$$\phi_{t_1}(P) = \phi_{t_2}(P),$$

então temos, obrigatoriamente, que tal órbita é periódica com período $T = t_1 - t_2$.

De fato, basta notar que

$$\phi_t(P) = \phi_{t-t_2+t_2}(P) = \phi_{t-t_2}(\phi_{t_2}(P)) = \phi_{t-t_2}(\phi_{t_1}(P)) = \phi_{t+t_1-t_2}(P),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4.1 Pontos de Equílibrio

As soluções constantes de (9) são muito importantes pois as demais soluções tendem a se afastar ou se apoximar das mesmas. Isso nos leva à definição:

Definição: Um ponto (x_0, y_0) é ponto de equilíbrio (ou singularidade) de (9) se

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Nas seguintes definições, usamos a distância usual em $\mathbb{R}^2$.

Definição: Um ponto de equilíbrio P é dito *estável* se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se uma órbita $\big(x(t), y(t)\big)$ satisfaz

$$d\Big(\big(x(0), y(0)\big), P\Big) < \delta,$$

então

$$d\Big(\big(x(t), y(t)\big), P\Big) < \epsilon,\ \forall t \geqslant 0.$$

Definição: Um ponto de equilíbrio P é dito *assintoticamente estável* se for estável e se exister um $\eta > 0$ tal que toda órbita com

$$d\Big(\big(x(0), y(0)\big), P)\Big) < \eta,$$

satisfaz

$$\lim_{t\to\infty}(\big(x(t),y(t)\big)=P.$$

Definição 1.3: Um ponto de equilíbrio não estável é dito *instável.*

Em outras palavras, temos que um ponto de equilíbrio P é estável se órbitas que se iniciam próximas de P permanecem próximas para todo t. Além disso, são assintoticamente estáveis, se são estáveis e se as soluções tendem a se aproximar de P com o passar do tempo.

4.2 Teorema de Poincaré-Bendixon

Definição: Definimos uma *semi-óribita positiva* por

$$\phi_t^+(P)=\{\big(x(t),y(t)\big):t\geqslant 0\}.$$

Analogamente para *semi-órbita negativa* (ϕ_t^-).

Definição: O conjunto

$$\omega(P)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\exists t_n\to+\infty \text{ t.q } (x,y)=\lim_{n\to\infty}\big(x(t_n),y(t_n)\big)\},$$

é chamado ω-limite da órbita que passa por P. Analogamente, definimos o conjunto α-limite por:

$$\alpha(P)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\exists t_n\to-\infty \text{ t.q } (x,y)=\lim_{n\to\infty}\big(x(t_n),y(t_n)\big)\}.$$

Em palavras, temos:
$\omega(P)\to$ Conjunto dos pontos de acumulação de ϕ_t^+ quando $t\to+\infty$.
$\alpha(P)\to$ Conjunto dos pontos de acumulação de ϕ_t^+ quando $t\to-\infty$.

Todos os resultados a seguir são análogos a $\alpha(P)$.

Teorema 4.1. *Se a semi-órbita positiva $\phi_t^+(P)$ for limitada, ou seja, estiver contida em um compacto K, então o conjunto ω-limite satisfaz:*

a) $\omega(P)\neq\varnothing$;

b) $\omega(P)$ é invariante, isto é, se $Q\in\omega(P)$ então a solução $\phi_t(Q)\in\omega(P)$ para todo t;

c) $\omega(P)$ é compacto;

d) $\omega(P)$ é conexo;

Demonstração. a) Bastar notar que, como K é compacto, qualquer sequência t_n em K terá uma subsequência $t_{n_k}\to\infty$ tal que $\phi_{t_{n_k}}$ converge para algum ponto em K.

b) Sejam $Q \in \omega(P)$ e $s \in \mathbb{R}$. Por definição

$$\exists t_n \to \infty \text{ t.q. } \phi_{t_n}(P) \to Q.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{(t_n+s)}(P) = \lim_{n\to\infty} \phi_s\big(\phi_{t_n}(P)\big) = \phi_s(Q),$$

por continuidade de ϕ_s. Como $(t_n + s) \to \infty$, isto mostra que

$$\phi_s(Q) \in \omega(P),$$

e como s é arbitrário, obtemos o resultado (note que não usamos o fato de ϕ_t^+ ser limitado).

c) Como $\omega(P) \subset K$, basta mostrar que $\omega(P)$ é fechado.

Seja q_n uma sequência contida em $\omega(P)$ convergindo para algum q. Para cada n, existe $t_k(n) \to \infty$ quando $k \to \infty$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{t_k(n)}(P) = q_n.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos n de modo que

$$d(q_n, q) < \frac{\epsilon}{2},$$

e tomamos $k = k(n)$ tal que

$$d(\phi_{t_k(n)}(P), q) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a desigualdade triangular temos que

$$d(\phi_{t_k(n)}(P), q_n) < \epsilon.$$

E como ϵ é arbitrário, temos que $q \in \omega(P)$.

d) Suponhamos, por contradição, que existem abertos disjuntos A e B tais que:

$$\begin{cases} \omega(P) \subset A \cup B \\ \omega(P) \cap A \neq \varnothing \ \text{ e } \ \omega(P) \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

Sejam $q_a \in \omega(P) \cap A$ e $q_b \in \omega(P) \cap B$. Tomamos $t_n, s_n \to \infty$ satisfazendo

$$0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < ... < t_n < s_n < ...$$

e tais que $\phi_{t_n}(P) \to q_a$ e $\phi_{s_n}(P) \to q_b$ quando $n \to \infty$.

Como $\phi_t(P)$ é contínua, temos que para cada n, existe um $u_n \in (t_n, s_n)$ tal que $\phi_{u_n}(P) \notin A \cup B$. Pelo Teorema do Confronto, segue que $u_n \to \infty$.

Seja r tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_{u_n}(P) = r$. Temos:

- r existe, pois $\phi_{u_n} \in K$;
- $r \in \omega(P)$;
- $r \notin A \cup B$. De fato, seja D o complementar do aberto $A \cup B$ em relação a K. Como D é fechado e $\phi_{u_n} \in D$, qualquer ponto de acumulação de ϕ_{u_n} também pertence a D;

Absurdo, pois contraria a maneira em que $\omega(P)$ foi tomado.

$\square$

Por fim, enunciamos o teorema principal desta subsecção.

Teorema 4.2 (**Teorema de Poincaré–Bendixon**). *Suponha que a semi-órbita $\phi_t^+(P)$ é limitada e que $\omega(P)$ não contém uma singularidade. Então $\omega(P)$ é uma órbita periódica.*

4.3 Consequências de Poincaré–Bendixon

Lema 4.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo ao disco unitário fechado. Então toda função contínua $F : K \to K$ tem pelo menos um ponto fixo $x_0 \in K$.*

Teorema 4.3. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo ao disco unitário fechado. Suponha que K tem a seguinte propriedade: se uma órbita γ encontrar K num instante t_0 então ela permanece em K para $t \geqslant t_0$. Então K contém pelo menos um ponto de equilíbrio de* (9).

Demonstração. Por hipótese, dado $P \in K$, temos $\phi_t(P) \in K$, e como ϕ é contínua, o Lema 4.1 garante que existe $x = x(t) \in K$ tal que $\phi_t(x) = x$. Tomando uma sequência $T_n > 0$ com $T_n \to 0$ temos uma sequência x_n tal que

$$x_n = \phi_{T_n}(x_n) = \phi_0(x_n).$$

Note que isso implica que tais órbitas são periódicas de período T_n.

Como K é compacto (pois é homeomorfo ao disco unitário fechado) temos que existe um ponto $x_0 \in K$ tal que $x_n \to x_0$. Dados $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um inteiro $k_n = k_n(t)$ tal que

$$k_n T_n \leqslant t < [k_n + 1] T_n \quad \text{e} \quad \phi_{k_n T_n}(x_n) = x_n. \tag{10}$$

Portanto, temos para todo t

$$|\phi_t(x_0) - x_0| \leqslant |\phi_t(x_0) - \phi_t(x_n)| + |\phi_t(x_n) - x_n| + |x_n - x_0|.$$

Fazendo $n \to \infty$ nesta expressão, temos

$$\lim_{n\to\infty} |\phi_t(x_0) - x_0| \leqslant \lim_{n\to\infty} |\phi_t(x_n) - x_n|. \tag{11}$$

Por (10), concluímos que

$$0 \leqslant t - k_n T_n < T_n.$$

Novamente, tomando $n \to \infty$ nesta expressão, temos pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{n\to\infty} [t - k_n T_n] = 0.$$

Daí, usando o fato que T_n é um período

$$\lim_{n\to\infty} \phi_t(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_{t-k_nT_n}(x_n) = \phi_0(x_n) = x_n.$$

Logo, temos em (11)

$$|\phi_t(x_0) - x_0| \leqslant 0 \Leftrightarrow \phi_t(x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R},$$

e vemos que x_0 é ponto de equilíbrio. □

Corolário 4.1. *Seja Ω uma região simplesmente conexa e limitada do plano. Se Ω contiver uma semi-órbita γ, então contém uma singularidade.*

Demonstração. Considere o conjunto ω-limite da órbita γ. Se $\omega(P)$ tiver uma singularidade, vale o resultado. Senão, o Teorema de Poincaré-Bendixon garante $\omega(P)$ é uma órbita periódica, e o Teorema 4.3 garante o resultado. □

4.4 Funções de Lyapunov

Nesta seção, estudaremos sistemas autônomos da forma

$$x' = f(x), \ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

onde f é uma função contínua. Suporemos que (12) possui apenas um ponto de equilíbrio, que será a origem de $\mathbb{R}^n$. Caso contrário, se $x_0 \neq 0$ fosse o único ponto de equilíbrio, poderíamos fazer uma mudança de variáveis com $\bar{x} = x - x_0$.

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto que contenha S_R, i.e., uma bola fechada de raio R e de centro na origem. Dizemos que $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma *função de Lyapunov* quando é contínua e satisfaz:

- $V(x) \geqslant 0, \ \forall x \in \Omega$;
- $V(0) = 0$;
- $\langle (\text{grad } V)(x), f(x) \rangle \leqslant 0, \ \forall x \in \Omega$.

Além disso, dizemos que V é uma *função de Lyapunov estrita* quando é de Lyapunov e neste último item vale a desigualdade estrita para $x \neq 0$.

Note que, se $x(t)$ é solução de (12), então temos que

$$\frac{d}{dt}\big(V\big(x(t)\big)\big) = \langle(\text{grad } V)(x), x'\rangle = \langle(\text{grad } V)(x), f(x)\rangle \leqslant 0. \tag{13}$$

Teorema 4.4. *Se existe uma função de Lyapunov para (12), então a origem é um ponto de equilíbrio estável.*

Demonstração. Tome $r > 0$ tal que a esfera S_r esteja contida em Ω. Como $V(x)$ é contínua e estritamente positiva em S_r, podemos tomar um mínimo positivo m desta função em S_r. Além disso, a continuidade de $V(x)$ e o fato de que $V(0) = 0$ garantem que podemos tomar ϵ, com $0 < \epsilon < r$, tal que

$$||x|| \leqslant \epsilon \Rightarrow V(x) < m. \tag{14}$$

Sejam agora $P \in \Omega$ tal que $||P|| \leqslant \epsilon$, e a (única) solução $x(t)$ de (12) tal que $x(0) = P$. Como (13) implica que $V\big(x(t)\big)$ é decrescente, segue por (14) que

$$V\big(x(t)\big) \leqslant V\big(x(0)\big) = V(P) < m, \ \forall t \geqslant 0. \tag{15}$$

Afirmamos que, nessas condições, $||x(t)|| < r$, $\forall t \geqslant 0$.

De fato, se houvesse $t_1 > 0$ tal que $||x(t_1)|| = r$, ou seja, $x(t_1) \in S_r$, então teríamos

$$V\big(x(t_1)\big) \geqslant m.$$

Absurdo, pois contraria (15). Logo, por definição, a origem é um ponto de equilíbrio estável. $\square$

Teorema 4.5. *Se existe uma função de Lyapunov estrita para (12), então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Demonstração. Já sabemos que a origem é um ponto de equilíbrio estável para $x(t)$. Mostraremos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \geqslant t_0 \Rightarrow ||x(t)|| \leqslant \epsilon.$$

Tomemos $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$||P|| < \delta \Rightarrow ||x(t, P)|| < \epsilon, \forall t \geqslant 0.$$

Mostraremos que, dado $\delta > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que $||x(t_0)|| < \delta$.
Com efeito, suponha que exista $\delta > 0$ tal que $||x(t)|| \geqslant \delta, \forall t \geqslant 0$. Então teríamos, para $||P|| < \delta$:

$$\delta \leqslant ||x(t, P)|| \leqslant \epsilon, \forall t \geqslant 0.$$

Isso implica que $\frac{dV}{dt}\big(x(t)\big)$ é limitada, e como é estritamente negativa, temos que existe $c > 0$ tal que

$$\frac{dV}{dt}\big(x(t)\big) \leqslant -c, \; \forall t \geqslant 0,$$

logo

$$\int_0^t \frac{dV}{dt}\big(x(s)\big)dt \leqslant \int_0^t -cdt.$$

Assim, temos que

$$V\big(x(t)\big) \leqslant V(P) - ct, \; \forall t \geqslant 0.$$

Absurdo, pois $V\big(x(t)\big)$ seria negativo para t suficientemente grande. Portanto,

$$||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||x\big(t, x(t_0)\big)|| < \epsilon, \forall t \geqslant 0$$

e

$$||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t + t_0)|| < \epsilon, \forall t \geqslant 0.$$

□

5 Controlabilidade

Nesta seção, dados $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ de classe C^1, consideramos o sistema

$$x' = A(t)x + B(t)u(t), \; t \in [a, b], \tag{16}$$

onde

$$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

é a variável de estado e

$$u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$$

é a variável de controle.

Sabemos que, fixados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$, o sistema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u(t,) \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{17}$$

possui solução única.

Definição: O sistema (16) é *controlável* se, para cada $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ existe $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$ tal que a solução de (17) satisfaz $x(b) = x_1$.

5.1 Controlabilidade Gramiana

Definição: O *resolvente* $R(t_1, t_2)$ do sistema $x' = Ax$ é uma função

$$R : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

tal que, para cada $t_2 \in [a, b]$, a função $R(\cdot, t_2)$ é solução de

$$\begin{cases} M' = A(t)M, \\ M(t_2) = I. \end{cases}$$

Da definição, inferimos as seguintes propriedades do resolvente:

- $C \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^{n \times n})$;
- $R(t, t) = I, \forall t \in [a, b]$;
- $R(t_1, t_2) \cdot R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3), \forall (t_1, t_2, t_3) \in [a, b]^3$.

Em particular

$$R(t_1, t_2) \cdot R(t_2, t_1) = I, \forall (t_1, t_2) \in [a, b]^2.$$

Lema 5.1. *A solução do PVI (17) satisfaz*

$$x(t) = R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \forall t \in [a, b] \tag{18}$$

Demonstração. Dado $x(t)$ definido por (18), é claro que $x(a) = x_0$. Além disso, segue pela definição do resolvente que

$$x'(t) = A(t)R(t, a)x_0 + R(t, t)B(t)u(t) + \int_a^t A(t)R(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Daí,

$$x'(t) = A(t)[R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] + B(t)u(t),$$

ou seja,

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \forall t \in [a, b].$$

E pela unicidade, temos que $x(t)$ é solução de (17). □

Definição: A *Controlabilidade Gramiana* do sistema (16) é a matriz simétrica $n \times n$

$$C = \int_a^b R(b, \tau)B(\tau)B(\tau)^T R(b, \tau)^T d\tau = \int_a^b [B(\tau)^T R(b, \tau)^T]^T \cdot [B(\tau)^T R(b, \tau)^T] d\tau.$$

Note que, se considerarmos a norma de $\mathbb{R}^n$ por

$$||x||^2 = x^T \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$x^T C x = \int_a^b ||B(\tau)^T R(b,\tau)^T x||^2 d\tau.$$

Teorema 5.1. *O sistema linear* (16) *é controlável se, e somente se sua respectiva controlabildade Gramiana é invertível.*

Demonstração. Suponha que C é invertível.

Para cada $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tome $\bar{u}$ de classe C^1 definida como

$$\bar{u}(\tau) = B(\tau)^T R(b,\tau)^T \cdot C^{-1} \cdot \big(x_1 - R(b,a)x_0\big), \tau \in [a,b].$$

Seja $\bar{x} \in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ a solução de

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)\bar{u}(t), \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Então, pelo Lema 5.1, temos

$$\bar{x}(b) = R(b,a)x_0 + \int_a^b R(b,\tau)B(\tau)R(b,a)C^{-1}\big(x_1 - R(b,a)x_0\big)d\tau,$$

daí

$$\bar{x}(b) = R(b,a)x_0 + \big(x_1 - R(b,a)x_0\big) \cdot C \cdot C^{-1},$$

consequentemente

$$\bar{x}(b) = x_1.$$

Logo, o sistema (16) é controlável.

Suponha agora que C não é invertível. Então, pela Regra de Cramer, existe $y \in \mathbb{R}^n$ não-nulo tal que $Cy = 0$. Em particular

$$y^T C y = 0,$$

o que implica

$$\int_a^b ||B(\tau)^T R(b,\tau)^T y||^2 d\tau = 0. \tag{19}$$

Como a norma de $\mathbb{R}^n$ é uma função definida positiva, segue de (19) que

$$y^T R(b,\tau)B(\tau) = 0, \forall \tau \in [a,b]. \tag{20}$$

Dado $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^m)$, seja $x \in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u(t), \\ x(a) = 0. \end{cases}$$

Novamente usando o Lema 5.1, temos

$$x(b) = \int_a^b R(b,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

e por (20)

$$y^T x(b) = 0.$$

Como y é não-nulo, existe algum $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $y^T x_1 \neq 0$ (por exemplo, tome $x_1 := y$). Isto é, para qualquer $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^m)$ temos $x(b) \neq x_1$. Portanto, o sistema (16) não é controlável. □

Na demonstração acima, usamos o fato de que um sistema ser controlável em um intervalo $[a,b]$ *independe da condição inicial do PVI associado.*

5.2 Método da Unicidade de Hilbert

Seja R o conjunto de pontos x_1 em $\mathbb{R}^n$ tal que existe $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ onde a solução de

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u(t), \\ x(a) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

satisfaz $x(b) = x_1$. O método de Hilbert nos dá condições para determinar quais pontos de $\mathbb{R}^n$ pertencem ou não a R.

Definição: O *sistema adjunto* do sistema (21) é o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi' = -A(t)^T\phi, \\ x(b) = \phi_1. \end{cases} \tag{22}$$

No seguinte teorema, usamos o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$

$$a \cdot b = a^T b.$$

Teorema 5.2. *Sejam $u \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ e $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de (21) e dado ϕ_1. Considere $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de (22). Então*

$$x(b) \cdot \phi_1 = \int_a^b u(t) \cdot B(t)^T\phi(t)dt.$$

Demonstração. Como $x(a) = 0$, temos que

$$x(b) \cdot \phi_1 = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(x(t) \cdot \phi(t)\big)dt$$

$$x(b) \cdot \phi_1 = \int_a^b \big((A(t)x + B(t)u) \cdot \phi(t) - x \cdot A(t)^T\phi(t)\big)dt,$$

logo,

$$x(b) \cdot \phi_1 = \int_a^b [(A(t)x)^T \cdot \phi(t) + (B(t)u)^T \cdot \phi(t) - (A(t)x)^T \cdot \phi(t)]dt.$$

Assim,

$$x(b) \cdot \phi_1 = \int_a^b u(t) \cdot B(t)^T \phi(t) dt.$$

□

Definimos por Λ a seguinte função

$$\Lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi_1 \longmapsto x(b)$$

onde $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)\bar{u}(t,) \\ x(a) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

com

$$\bar{u}(t) := B(t)^T \phi(t). \tag{24}$$

Aqui, $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é solução do problema adjunto do sistema (23). Com essas definições, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Temos que*

$$R = \Lambda(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, se $x_1 = \Lambda(\phi_1)$ e se $u^* \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$ é o controle do sistema (16) que leva 0 a x_1 durante o intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b ||\bar{u}(t)||^2 dt \leqslant \int_a^b ||u^*(t)||^2 dt,$$

onde $\bar{u}(t)$ é dado por (24), e com igualdade se, e somente se $u^* = \bar{u}$.

Demonstração. Por definição de Λ

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) \subset R.$$

Mostraremos que $R \subset \Lambda(\mathbb{R}^n)$. Tome $x_1 \in R$. Seja $u^* \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$ tal que a solução $x^*(t)$ do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u^*(t), \\ x(a) = 0, \end{cases}$$

satisfaz

$$x^*(b) = x_1.$$

Considere $U \subset C^1([a,b];\mathbb{R}^m)$ como sendo o conjunto de funções $\gamma = B(t)^T\phi(t)$, onde $\phi(t)$ é solução do sistema adjunto (22), para algum $\phi_1 \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que o espaço das soluções que satisfazem $\phi'(t) = -A(t)^T\phi(t)$ é um subespaço vetorial de $C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ de dimensão n. Logo, U é um subespaço fechado, pois é finito.

Assim, podemos tomar a projeção ortogonal $\tilde{u}(t)$ de $u^*(t)$ em U. Temos que

$$\int_a^b u^*(t) \cdot u(t)dt = \int_a^b \tilde{u}(t) \cdot u(t)dt, \forall u \in U,$$

em que consideramos como produto interno em U

$$< u_1, u_2 >= \int_a^b u_1(t) \cdot u_2(t)dt.$$

Seja $\tilde{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)\tilde{u}(t), \\ x(a) = 0. \end{cases}$$

Usando o Teorema 5.2, temos

$$x_1 \cdot \phi_1 = \int_a^b u^*(t) \cdot B(t)^T\phi(t)dt = \int_a^b \tilde{u}(t) \cdot B(t)^T\phi(t)dt = \tilde{x}(b) \cdot \phi_1, \forall \phi_1 \in \mathbb{R}^n,$$

o que implica que

$$x_1 = \tilde{x}(b). \tag{25}$$

Como $\tilde{u} \in U$, existe $\tilde{\phi}_1$ tal que a solução $\tilde{\phi}$ de

$$\begin{cases} \phi' = -A(t)^T\phi, \\ x(b) = \tilde{\phi}_1, \end{cases}$$

satisfaz

$$\tilde{u}(t) = B(t)^T \cdot \tilde{\phi}(t), \forall t \in [a,b].$$

Por definição de Λ, temos $\Lambda(\tilde{\phi}_1) = \tilde{x}(b)$, o que juntamente com (25) nos dá $\Lambda(\tilde{\phi}_1) = x_1$. Concluímos que $x_1 \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$, daí $R \subset \Lambda(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, seja $x_1 = \Lambda(\phi_1)$, seja $\bar{u}$ definido por (24) e seja $u^* \in C^1([a,b];\mathbb{R}^m)$ o controle do sistema (16) que leva 0 a x_1 durante o intervalo $[a,b]$. Note que, por sua definição, $\bar{u} \in U$. Além disso, usando o Teorema 5.2 mais uma vez, temos

$$\int_a^b u^*(t) \cdot u(t)dt = \int_a^b \bar{u}(t) \cdot u(t)dt, \forall u \in U.$$

Daí, $\bar{u}$ é a projeção ortogonal de u^* em U. Assim

$$\int_a^b ||u^*(t)||^2dt = \int_a^b ||\bar{u}(t)||^2dt + \int_a^b ||u^*(t) - \bar{u}(t)||^2dt.$$

o que conclui a demonstração do Teorema.

$\square$

6 Aplicações

6.1 Circuito Elétrico Simples

6.1.1 Introdução

Consideremos um circuito orientado fechado que consiste de uma fonte de voltagem E (que pode ser de voltagem contínua ou alternada), uma resistência R, um capacitor C e um indutor L. As equações que ligam o fluxo de corrente i à queda de voltagem de cada um dos componentes são:

$R : E_R = Ri;$
$L : E_L = L\dfrac{di}{dt};$
$C : E_C = \dfrac{q}{C}$, em que q representa o fluxo de carga e é dado por $i = \dfrac{dq}{dt}$,

onde R, L e C são constantes positivas. Além disso, as equações da fonte de voltagem serão dadas por:

Voltagem contínua: $E = E_0;$
Voltagem alternada: $E = E_0 sen(\omega t);$

onde E_0 representa a amplitude e ω está relacionado à frequência da voltagem.

Por fim, enunciamos a Segunda Lei de Kirchhoff:

"A soma algébrica das quedas de voltagem de todas as componentes elétricas em qualquer laço fechado orientado é zero"

Ou seja, matematicamente:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = 0.$$

6.1.2 Circuito RL com fonte de voltagem constante

Neste caso, a Segunda Lei de Kirchhoff nos dá

$$E_R + E_L - E_0 = 0.$$

No qual o sinal negativo se justifica pelo fato que a fonte aumenta a voltagem, enquantos as demais componentes acarretam em uma queda de voltagem.

Assim, temos a *equação diferencial de primeira ordem*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0.$$

Dividindo a equação por L

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}, \tag{26}$$

que é uma equação na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x). \tag{27}$$

Equações da forma (27) são resolvidas através do fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Nesse caso, multiplicamos (26) por $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{(R/L)t}$, e obtemos

$$\frac{di}{dt}e^{(R/L)t} + i\frac{R}{L}e^{(R/L)t} = \frac{E_0}{L}e^{(R/L)t}.$$

Logo, temos

$$\frac{d}{dt}(ie^{(R/L)t}) = \frac{E_0}{L}e^{(R/L)t},$$

e assim

$$ie^{(R/L)t} = \int \frac{E_0}{L}e^{(R/L)t}dt = \frac{E_0}{R}(e^{(R/L)t} + c).$$

Finalmente, concluímos que

$$i = \frac{E_0}{R}(1 + ce^{-(R/L)t}). \tag{28}$$

Supondo que o circuito foi ativado no instante $t = 0$, usamos a condiçao inicial $i(0) = 0$ para obter em (28)

$$0 = \frac{E_0}{R}(1 + ce^{-(R/L)0}) \Rightarrow c = -1.$$

Assim,

$$i(t) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t}). \tag{29}$$

Note que, como $R/L > 0$, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E_0}{R}. \tag{30}$$

A expressão (30) é conhecida como *termo de regime permanente* do circuito. Como este termo não depende de L, concluímos que um circuito RL tende a se comportar como um circuito não indutivo com o passar do tempo.

6.1.3 Circuito RL com fonte de voltagem alternada

Chegamos ao PVI

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 sen(\omega t), \\ i(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo de modo análogo ao caso anterior, chegamos a

$$i(t) = \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}e^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(Rsen(\omega t) - L\omega cos(\omega t)). \tag{31}$$

A solução (31) pode ser simplificada através das variáveis

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$

e

$$\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{R}{Z}, \\ cos\alpha = \dfrac{\omega L}{Z}. \end{cases}$$

Assim, obtemos de (31) que

$$i(t) = \frac{E_0 sen\alpha}{Z} e^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{Z} sen(\omega t - \alpha).$$

Neste caso, o termo de regime permanente é

$$i_p = \frac{E_0}{Z} sen(\omega t - \alpha).$$

que apresenta forma sinusoidal, o que implica que a corrente tende a ser alternada com o passar do tempo. A grandeza Z é conhecida como *impedância* de regime permanente do circuito, enquanto α é chamado de *ângulo de fase*.

6.1.4 Circuito RLC com fonte de voltagem alternada

Teremos então

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E_0 sen(\omega t). \tag{32}$$

Lembrando que $i = \dfrac{dq}{dt}$, reescrevemos a equação (32) e obtemos a *equação diferencial de segunda ordem*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 sen(\omega t). \tag{33}$$

A equação (33) possui solução geral na forma

$$y = y_p + y_h.$$

Onde y_p é uma solução particular de (33) enquanto y_h é solução geral da equação homogênea

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0. \tag{34}$$

A solução de (34) pode ser encontrada quando se procura uma solução na forma $q = e^{\lambda t}$, e obtemos a equação

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0, \tag{35}$$

cujas raízes, e consequentemente a solução de (35), dependem do sinal do discriminante

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}. \tag{36}$$

- Se $\Delta > 0$, então a solução geral de (34) será

$$y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

onde c_1 e c_2 são constantes e

$$r_1 = \frac{-R + \sqrt{\Delta}}{2L} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-R - \sqrt{\Delta}}{2L}.$$

Note que, como R, L e C são constantes positivas, o discriminante dado por (36) implica que

$$\Delta < R^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} < R.$$

Assim r_1 e r_2 são negativos e temos

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0.$$

- Se $\Delta = 0$, então

$$y_h = c_1 e^{rt} + c_2 e^{rt}, \text{ onde } r = \frac{-R}{2L} < 0.$$

Novamente

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0.$$

- Se $\Delta < 0$, nesse caso, temos que as raízes de (35) são dadas por números complexos. Usando a fórmula de Euler, obtemos

$$y_h = e^{-R/2L}\big(c_1 cos(rt) + c_2 sen(rt)\big), \text{ onde } r = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2L}.$$

E finalmente,

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0.$$

Conclusão: Independentemente dos parâmetros R, L e C, o termo de regime permanente será uma solução particular de (32). Além disso, como as condições iniciais $i(0)$ e $q(0)$ apenas influenciariam nas constantes c_1 e c_2 da solução geral, temos que a carga de regime permanente independe do estado do sistema no instante $t = 0$.

Uma solução de particular de (32) pode ser encontrada através do método dos coeficientes a determinar. Procuramos uma solução da equação na forma

$$\begin{aligned}
q &= a_1 sen(\omega t) + a_2 cos(\omega t),\\
q' &= \omega a_1 cos(\omega t) - \omega a_2 sen(\omega t),\\
q'' &= -\omega^2 a_1 sen(\omega t) - \omega a_2 cos(\omega t).
\end{aligned}$$

E levando essas relações a (32)

$$sen(\omega t)\left(-L\omega^2 a_1 - R\omega a_2 + \frac{a_1}{C}\right) + cos(\omega t)\left(-L\omega^2 a_2 + R\omega a_1 + \frac{a_2}{C}\right) = E_0 sen(\omega t),$$

o que implica

$$\begin{cases} \left(-L\omega^2 + \dfrac{1}{C}\right) a_1 - R\omega a_2 = E_0, \\ R\omega a_1 + \left(-L\omega^2 + \dfrac{1}{C}\right) = 0. \end{cases}$$

Usando a Regra de Cramer, descobrimos que

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{E_0\left(-L\omega^2 + \dfrac{1}{C}\right)}{R^2\omega^2 + (-L\omega^2)^2}, \\ a_2 = \dfrac{-E_0 R\omega}{R^2\omega^2 + (-L\omega^2)^2}. \end{cases} \tag{37}$$

Podemos simplificar estas expressões através das variáveis

$$Z_0 = \sqrt{R^2\omega^2 + \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2}$$

e

$$\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{L\omega^2 - \dfrac{1}{C}}{Z_0} \\ cos\alpha = \dfrac{R\omega}{Z_0} \end{cases}$$

Então, a expressão (37) se torna:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{-E_0}{Z_0} sen\alpha, \\ a_2 = \dfrac{-E_0}{Z_0} cos\alpha, \end{cases}$$

e chegamos à solução particular

$$q_p = \frac{E_0}{Z_0} cos(\omega t - \alpha).$$

Derivando, e aplicando uma última mudança de variáveis $Z = \dfrac{Z_0}{\omega}$ encontramos um resultado análogo ao anterior

$$i_p = \frac{E_0}{Z} sen(\omega t - \alpha). \tag{38}$$

Pergunta: Fixados L, C, R e E_0, qual é a amplitude máxima da corrente dada em (38)?

A amplitude máxima é obtido quando Z é mínimo. Como

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(-\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

temos seu mínimo quando $(-\omega L + 1/\omega C)$ se anula, ou seja,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

que está relacionado com a *frequência de ressonância.*

6.2 Lei de Kepler

Consideremos um sistema de eixos cartesianos com o Sol, de massa M, na origem. Seja P um planeta de massa m com vetor posição $\vec{r}$ em relação à origem e cujo módulo é dado por $r \neq 0$. Segundo a **Lei de Gravitação Universal**, o Sol aplica em P uma força atrativa de sentido oposto a $\vec{r}$ cujo módulo é inversamente proporcional ao quadrado da distância

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r},$$

onde G é a *constante de gravitação universal.* Além disso, da Segunda Lei de Newton, temos

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}.$$

Daí, chegamos à *equação diferencial vetorial*

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}. \tag{39}$$

Obs: As seguintes simplificações são feitas:

- Suporemos que o Sol esteja fixo;
- Desprezaremos as demais forças gravitacionais de outros planetas sobre P.

A equação (39), por ser não-linear, é de difícil resolução. Porém, os seguintes resultados facilitam a obtenção de sua solução.

Definição: O momento angular $\vec{l}$ associado ao planeta P é dado por

$$\vec{l} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}. \tag{40}$$

Teorema 6.1. *O momento angular de P é constante.*

Demonstração. Basta notar que

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2}{dt}\vec{r},$$

se anula graças a (39). Logo $\vec{l}$ é constante. □

Corolário 6.1. *A órbita do planeta P é uma curva plana.*

Demonstração. Divideremos a prova em dois casos:

- Se $\vec{l} \neq \vec{0}$

  Fazendo o produto escalar por $\vec{r}$ em (40)

$$\vec{r} \cdot \vec{l} = \vec{r} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right) = 0.$$

  Denotando $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{l} = (a, b, c)$, temos

$$ax + by + cz = 0,$$

  o que mostra que a órbita está em um plano.

- Se $\vec{l} = \vec{0}$

  Isso implica que os vetores $\vec{r}$, $\frac{d}{dt}\vec{r}$ e $\frac{d^2}{dt}\vec{r}$ são linearmente dependentes. Ou seja, estariam todos sobre a mesma reta e nesse caso o movimento seria retilíneo.

$\square$

Iremos considerar que o plano $z = 0$ é o plano que contem a órbita de P e o vetor posição passa a ser

$$\vec{r} = (x(t), y(t), 0),$$

e o momento angular

$$\vec{l} = (0, 0, xy' - x'y).$$

Do Teorema 6.1, concluímos

$$xy' - x'y = k, \tag{41}$$

que suporemos não-nulo. Finalmente, (39) torna-se o sistema

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{-GM}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cdot x, \\ y'' = \dfrac{-GM}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cdot y. \end{cases} \tag{42}$$

Aqui, torna-se útil o uso de coordenadas polares

$$\begin{cases} x = rcos\theta, \\ y = rsen\theta. \end{cases}$$

Transformamos (41) em

$$k = r^2\theta', \tag{43}$$

e o sistema (42) em

$$\begin{cases} r''cos\theta - 2r'\theta' sen\theta - r\theta'^2 cos\theta - r\theta'' sen\theta = -\dfrac{MG}{r^2}cos\theta, \\ r''sen\theta + 2r'\theta' sen\theta - r\theta'^2 cos\theta + r\theta'' cos\theta = -\dfrac{MG}{r^2}sen\theta. \end{cases} \tag{44}$$

Multiplicando a primeira igualdade por $cos\theta$ e a segunda por $sen\theta$ e somando as expressões obtemos

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{MG}{r^2}.$$

Por fim, multiplicando por $\dfrac{-1}{r^2\theta'^2}$, chegamos a

$$\frac{-r''}{\theta' k} + \frac{1}{r} = \frac{MG}{k^2}. \tag{45}$$

Afirmamos que

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-r''}{\theta' k}.$$

Com efeito, como supomos $k \neq 0$, temos $\theta'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Daí, podemos usar o *Teorema da Função Inversa* para obter

$$\frac{dr}{d\theta} = r'\frac{dt}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'} \quad \text{e} \quad \frac{dr'}{d\theta} = r''\frac{dt}{d\theta} = \frac{r''}{\theta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r'}{r^2\theta'} = \frac{-r'}{k} \\ \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{-r'}{k}\right) = \frac{-1}{k}\frac{dr'}{d\theta} \\ \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{-r''}{\theta' k}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (45) se torna a *equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{MG}{k^2}, \tag{46}$$

que é conhecida como *fórmula de Binet.*

É fácil perceber que a solução geral da equação homogênea

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 0,$$

é dada por

$$\frac{1}{r_h} = c_1 cos\theta + c_2 sen\theta.$$

Para encontrar uma solução particular de (46), usamos o método dos coeficientes a determinar para procurar uma solução na forma $y_p = a$, onde a é uma constante. Daí, encontramos

$$\frac{1}{r_p} = \frac{MG}{k^2},$$

e concluímos que a solução geral de (46) é dada por

$$\frac{1}{r} = c_1 cos\theta + c_2 sen\theta + \frac{MG}{k^2}.$$

Podemos determinar as constantes c_1 e c_2 através das condições iniciais $r(0) = r_0$ e $r'(0) = v_0$. Porém, estamos mais interessados em reconhecer a forma da trajetória do planeta P, portanto, consideremos $c_1 = \lambda cos\omega$ e $c_2 = \lambda sen\omega$. Então

$$\frac{1}{r} = \lambda cos(\theta - \omega) + \frac{MG}{k^2}$$

$$r = \frac{\dfrac{k^2}{MG}}{1 + \dfrac{\lambda k^2}{MG} cos(\theta - \omega)}.$$

Tal expressão pode ser simplificada através de

$$l = \frac{k^2}{MG} \quad \text{e} \quad e = \frac{\lambda k^2}{MG},$$

obtendo

$$r = \frac{l}{1 + e \cdot cos(\theta - \omega)}. \tag{47}$$

Sabemos que a equação (47) representa uma cônica. Ainda mais, se fizermos uma última mudança de variáveis

$$x = rcos(\theta - \omega) \quad \text{e} \quad y = rsen(\theta - \omega),$$

chegamos que

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ sendo } c = \frac{el}{(1-e^2)},\ b^2 = \frac{l^2}{(1-e)},\ a^2 = \frac{l^2}{(1-e)^2}.$$

Como $e \neq 0$ então $a \neq b$, e vemos que a órbita de um planeta não representa uma circunferência, como acreditava Copérnico. Como sabemos que a órbita dos planetas é periódica, concluímos a seguinte assertiva:

Primeira Lei de Kepler: O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos.

Referências

[1] Eduardo Cerpa, Introducción a la Teoría de Control. Apuntes para un curso de 3 horas que tuvo lugar en XXXVI Semana de la Matemática, Valparaíso, Octubre 2009.

[2] Eduardo Cerpa, Teoría de Control, el ejemplo del péndulo. Apuntes para un curso de 2 horas que tuvo lugar en VI Jornadas de Matemática IMUV, Valparaíso, Diciembre 2014.

[3] Jean-Michel Coron, Control and nonlinearity, Mathematical surveys and monographs, AMS, 2007.

[4] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, Equações Diferenciais Aplicadas (Coleção Matemática Universitária), IMPA, 2012.

[5] Johann Baumeister e Antônio Leitão, Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica, Projeto Euclides, 2008.