UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROPESQI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E INOVAÇÃO

RELATÓRIO FINAL DE ATIVIDADES DO ESTUDANTE BOLSISTA E VOLUNTÁRIO DO PIBIC/CNPq - UFPE

(Refere-se às atividades realizadas no período de setembro de 2020 a agosto de 2021)

1. IDENTIFICAÇÃO

Nome do(a) Orientador(a):	Roberto de A. Capistrano Filho
Nome do(a) Estudante:	Guilherme Marinho de Araujo
Área do projeto:	
Título do projeto:	Equações Diferencias Ordinárias e Aplicações a Teoria do Controle
ID do projeto	

2. RESUMO

As equações diferenciais ordinárias, que foram objetos de estudo do projeto, são bastante importantes em diversas áreas da matemática, da física e de ciências afins. Tendo seus estudos iniciais realizados por Newton e Leibniz, seu objetivo inicial se baseava em determinar soluções de equações diferencias em forma de funções explícitas, entretanto, foi se descobrindo, com o passar do tempo, que tal obtenção não era possível na maioria das equações, porém, através do uso de ferramentas como a série de funções, foi se tornando possível determinar o comportamento de tais soluções, sem necessariamente conhecê-las explicitamente.

O estudo sobre as equações diferencias é bastante duradouro, obtendo-se, ao longo do tempo, vários resultados que ajudaram a fornecer respostas satisfatórias em relação a diversos problemas matemáticos e físicos. Para a obtenção de muitos desses resultados, como o teorema da existência e unicidade, foi utilizado conhecimentos matemáticos de diversas áreas, a exemplo da Análise e da Álgebra Linear.

3. INTRODUÇÃO

O objeto de estudo desse projeto, como já citado anteriormente, serão as equações diferencias ordinárias (EDOs), cuja definição se baseia em uma equação que envolve uma função desconhecida e sua(s) derivadas(s) e que possui sua ordem definida de acordo com a maior derivada que está presente na equação.

Como já escrito anteriormente, os estudos sobre as equações diferenciais foram muitas vezes motivados por problemas físicos e um exemplo de um desses problemas é relacionado com a equação de um movimento acelerado, admitindo-se que x é o eixo horizontal, que a força resultante F é tal que

$$F = \ -x$$

e que m= 1kg, teríamos, pela segunda lei de Newton que

$$F = m \bullet a$$

$$-x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + x = 0.$$

(3.1)

A equação 3.1 é justamente uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem que possui como solução

$$x = A \bullet \cos t + B \bullet sen\ t,$$

sendo A e B constantes reais. O método para a obtenção de tal solução será apresentado mais tarde.

Inicialmente, o projeto introduzirá um dos resultados mais clássicos da matemática superior que é o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), relacionando-o com o estudo de equação diferencial e sendo o ponto de partida para um estudo amplo que envolve não somente a obtenção de soluções dessas EDOs, mas também estudar o comportamento dessas funções ao longo do tempo, o que pode ser muito útil para áreas como economia, física e a própria matemática, uma vez que, na maioria dos casos, não se consegue obter de maneira direta tais soluções em forma de funções explícitas.

Será visto portanto brevemente que a maioria dos estudos recentes relacionados a EDOs estão cada vez mais voltados para problemas relacionados com previsões de comportamento e modelagem de fenômenos naturais.

Também será abordado nesse projeto um dos resultados sobre EDOs mais importantes e com bastantes consequências que é o Teorema da existência e unicidade de soluções de uma EDO, onde veremos quais condições são necessárias para garantir a existência de tais soluções e que, para garantir a unicidade, será preciso uma condição ainda mais forte.

4.OBJETIVOS

Os objetivos desse projeto estão baseados em desenvolver de maneira mais profundo o conhecimento sobre equações diferenciais, utilizando conhecimentos de outras áreas como Análise, Cálculo Avançado e Álgebra linear. Além disso, trata-se também como objetivo citar como os resultados obtidos através do estudo dessas equações conseguem ser utilizadas em diversas áreas de ciências com afinidade com a matemática.

5. METODOLOGIA

A metodologia utilizada consistiu na utilização de livros teóricos por parte do aluno, leitura de alguns artigos científicos enviados pelo professor orientador e também em algumas palestras relacionadas ao objeto de estudo que foram indicadas para o aluno assistir.

6. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO OBJETIVA DOS RESULTADOS OBTIDOS

Definido previamente o conceito de uma EDO, o projeto começará abordando um dos teoremas mais importantes do Cálculo integral, que é o Teorema Fundamental do Cálculo. Para isso, será definida uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e iremos analisar o problema do cálculo da integral abaixo

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Sabe-se, através dos estudos de Cálculo, que tal integral, assumindo que $f(x) > 0$, pode ser interpretada geometricamente como o cálculo da área delimitada pela função e pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, entretanto tal cálculo também poderá ser obtido relacionando-se a integral ao conceito de derivada que é justamente o que diz a parte 1 do teorema.

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I): Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, têm-se que a função F definida por

$$F = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

é derivável e, além disso, $F'(x) = f(x)$.

Ou seja, têm-se que a função F será solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,.$$

Além disso, pode-se notar, através da integral, que em $x = a,\ F = 0$, o que permite chegar a conclusão de que F além de ser a primitiva (solução da EDO) da equação acima, ela também seria uma solução do PVI (problema de valor inicial) abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x) \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II): Seja uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e G uma primitiva, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)\,.$$

Pode-se notar, por conseguinte, que, enquanto a parte I do teorema é responsável por relacionar os conceitos de integral e derivada, a parte 2 vai fornecer o resultado de que o cálculo da integral se baseia em obter uma primitiva de f.

Foi visto, durante o projeto, formas de obter solução de EDOs de primeira ordem, entretanto, para efeitos práticos, tais métodos serão omitidos no relatório, uma vez que eles são facilmente encontrados e o objetivo central do projeto não se baseia nisso.

Um dos primeiros modelos práticos estudados foi o modelo malthusiano que foi desenvolvido no fim do século XIX e buscava entender e encontrar modelos que descrevessem o crescimento populacional. Para isso, por hipótese, admitiu-se que a taxa de crescimento da população seria constante igual a K, o que é razoável imaginando que estamos descrevendo o crescimento de uma população de micro-organismos. Logo, tomando a população como a variável x, teríamos a seguinte equação

$$\dot{x} = Kx\,.$$

Tal equação é uma EDO de primeira ordem chamada de equação de crescimento exponencial e vimos durante o projeto que essa equação tem como solução geral

$$x(t) = x(t_0)e^{t-t_0}\,.$$

Tal resultado, permite a nós concluir que a população cresceria numa razão geométrica, o que gerou uma certa confusão, uma vez que Malthus adaptou esse modelo para o crescimento da população humana o que geraria um grande problema, pois a população humana cresceria nessa razão citada, enquanto que os recursos naturais cresceriam numa razão aritmética, o que geraria escassez de recurso no futuro.

Será analisado agora um dos teoremas mais importantes estudados no projeto, mas, antes disso, veremos algumas definições importantes que serão úteis na compreensão de tal teorema.

Veremos primeiramente o conceito de Métrica.

Dado um conjunto C e $g_1,\ g_2 \in C$, dizemos que d($g_1,\ g_2$) é uma métrica em C se

1. d($g_1,\ g_2$) ≥ 0 e d($g_1,\ g_2$)=0 se e somente se $g_1 =\ g_2$.
2. d($g_1,\ g_2$) $=$ d$(g_2,\ g_1)$
3. d($g_1,\ g_2$) $\leq\ \mathrm{d}\big(g_1,\ g_3\big) +\ \mathrm{d}\big(g_3,\ g_2\big)$.

Outra definição importante será a de sequência de Caulchy que vai nos dizer que $\big(g_n\big)$ é de Caulchy se dado $\varepsilon > 0$, existir m e n naturais suficientemente grandes tais que d($g_n,\ g_m$) $<\ \varepsilon$. Mais ainda, dizemos que uma sequência (g_n) converge para g $\ \in C$ se dado $\varepsilon > 0$ teremos d($g_n,\ g$) $<\ \varepsilon$ para n suficientemente grande.

Associada as duas definições acima, temos também a definição de espaço métrico completo que será todo espaço C onde todas sequências de Caulchy serão convergentes para algum elemento de C.

Será definido por último o conceito de ponto fixo para que, em seguida, possamos falar de um teorema que será vital para a compreensão do teorema de existência e unicidade.

Dizemos que se f: $C \rightarrow$ C é uma função, um ponto fixo x de f é tal que f(x)=x.

Teorema do Ponto Fixo de Banach: "Se C é um espaço métrico completo. Suponha que $\varnothing : C \rightarrow C$ é uma contração, isto é, existe uma constante K, tal que para 0 $\ \leq K < 1$

$$\mathrm{d}(\varnothing(g_{1)}\,,\varnothing\,(g_{2)}) \leq\ K\,\mathrm{d}\big(g_1,\ g_2\big)$$

para todos $g_1,\ g_2\ \epsilon\ C$. Logo vai existir um e somente um g $\epsilon\ C$ tal que g seja ponto fixo de C."

Teorema da existência e unicidade: "Seja f:$\Omega\ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a derivada parcial em relação a y seja contínua também. Então para cada ponto $(x_0,\ y_0)$ que seja valor inicial da equação diferencial, existem um intervalo aberto I que contém x_0 e uma única função $\varnothing$ que é solução do PVI abaixo.

$$y' = f\big(x, y\big) \qquad (6.1)$$

$$y\big(x_0\big) = y_0 \qquad (6.2)$$

Demonstração: Sabemos, pelo TFC, que uma função $\varnothing$ diferenciável é uma solução do PVI acima se e somente for solução da equação integral

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds\,. \qquad (6.3)$$

Tomemos a e b reais positivos tais que obtenhamos o seguinte retângulo

$$B=\{(x,y)/\ \left|x - x_0\right|\ \leq a\ e\ \left|y - y_0\right|\ \leq b\ \}$$

contido no plano Ω.

Sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que diz que toda função contínua em um compacto é limitada, que f será limitada em B, uma vez que ela é contínua e B é um conjunto fechado e limitado, o que significa dizer que é compacto. Logo, podemos tomar M como sendo o máximo valor que f(x,y) assume em B.

Vamos definir um conjunto C que irá conter as funções contínuas que passam por $(x_0,\ y_0)$ e que estão contidas no retângulo B e nesse conjunto iremos definir a seguinte métrica.

$$d\left(g_1, g_2\right) = \max\{ \left| g_1(x) - g_2(x) \right| \}$$

que claramente obedece as propriedade 1, 2 e 3 em relação a uma métrica e portanto é um espaço métrico e além disso é completo, uma vez que obedece ao critério de Caulchy.

Escrevendo a equação (6.3) como

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds$$

podemos usar a desigualdade modular e o conceito sobre supremo e ínfimo e integrais de Riemann, para obtermos a seguinte desigualdade

$$\left|g(x) - y_0\right| = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \le M\left|x - x_0\right| \le b\,.$$

Com isso, concluímos que $g \in C$, ou seja, temos que a solução do PVI é tal que $\varnothing : C \to C$, faltando mostrar agora apenas que tal função é uma contração, pois aí poderíamos provar a unicidade dessa solução através do teorema do Ponto Fixo de Banach.

Como f e sua derivada parcial em relação a y são contínuas, temos, usando novamente o TFC para a igualdade acima, que

$$d\Big(\varnothing(g_1),\ \varnothing(g_2)\Big) \le Kd(g_1, g_2)\,.$$

Tomando K<1, obtemos que K é uma contração, logo o teorema da existência e unicidade fica provado para um dado intervalo I.

Nota-se que para chegarmos no resultado da contração, foi preciso considerar a derivada parcial em relação a y era contínua, o que nos diz algo valioso, a continuidade de f é necessária, mas garante apenas a existência de soluções de um PVI, enquanto que a continuidade de ambas as funções citadas vai garantir não somente a existência, mas também a unicidade dessa solução.

Estudaremos agora os sistemas de EDO cuja definição será encontrada logo abaixo e que também possui um teorema de existência e unicidade, cuja demonstração se assemelha a demonstração vista para uma EDO de primeira ordem.

De modo geral, um sistema de EDOs de primeira ordem envolve 2 ou mais variáveis dependentes e suas derivadas de primeira ordem, podendo ser representado da seguinte maneira

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..x_n) \\ \vdots \\ x_n' = fn(t, x_1, \dots, x_n)\,. \end{cases}$$

Estudaremos nesse projeto o sistema de EDO da seguinte forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

e um dos objetos de estudos mais importantes de tais sistemas sãos soluções x(t) e y(t) constantes, que são justamente definidas como o zero do sistema, ou seja

$$\begin{cases} 0 = f(x, y) \\ 0 = g(x, y)\,. \end{cases}$$

Tais soluções são chamadas de singularidades.

Exemplo 6.1: $x'' - 2xx' = 0.$

A equação acima é uma EDO de segunda ordem, entretanto, se tomarmos $x' = y$, obteremos um sistema EDO que poderá ser escrito como

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = y \\ y' = g(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Como f e g são contínuas, possuem derivada e suas derivadas são contínuas, então, temos existência e unicidade de solução. Como estamos querendo determinar as singularidades, faremos

$$f(x, y) = y = 0 \ e \ g(x, y) = 2xy = 0$$

Logo, obteremos que $x = K(const) \ e \ y = 0$ são as singularidades, ou seja, todos os pontos contidos no eixo x serão singularidades.

Para obtermos outras soluções, faríamos

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

e com isso obteríamos que as demais soluções seriam do tipo $y(x) = x^2 + C$, sendo que tais parábolas não tocariam no eixo x.

Definição: Um sistema autônomo de ordem n é uma EDO escrita da seguinte maneira

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t)\big),$$

sendo x um vetor de n dimensões. Ou seja, nesse sistema a função f não depende da variável independente t.

Estudemos o caso dos sistemas autônomos em gerais em que $x' = f(x)$ (6.4), sendo f diferenciável e com derivada contínua (classe C^1) e que a singularidade x_0 seja tal que f(0)=0, ou seja, que x(t) = 0 seja solução.

Definição: Seja V: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com centro na origem. Dizemos que V é uma Função de Liapunov para a equação (6.4), quando

V(0) = 0

V(x) > 0

$V'(x) = \big\langle \big(grad\ V\big)(x),\ f(x) \big\rangle \leq 0$ para qualquer x.

Determinar tais funções não é um trabalho fácil, entretanto existem candidatos naturais como uma integral primeira de uma dada função V, veremos a razão disso.

Definição: Uma integral primeira de uma dada função pode ser definida como sendo constante ao longo de qualquer trajetória de uma equação diferencial.

Logo, dada a EDO, precisamos observar se ela possui integral primeira e para isso podemos utilizar o conceito de EDO exata que é escrita da forma

$$M\big(x, y\big)dx + N\big(x, y\big)dy = 0$$

e satisfaz $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$.

Logo, apesar de não existir uma maneira prática para determinar tais funções, caso a EDO seja exata, podemos tomar sua integral primeira e tal função seguirá como candidato natural a função de Liapunov.

Vejamos o exemplo físico do oscilador harmônico simples

$$mx'' + kx = 0.$$

Temos que tal EDO é exata e, portanto, sua integral primeira, escrita abaixo, surge como potencial função de Liapunov.

$$V\big(x, y\big) = \frac{1}{2}\big(m\dot{x}^2 + kx^2\big)\ .$$

Temos que V(0) = 0, V(x) > 0 para $x \neq 0$ e, por fim, derivando a função V, obtemos, como já esperado da definição de integral primeira, que $V' = 0$. Logo, a função V é uma função de Liapunov para a equação do oscilador harmônico. Tal função, se prestarmos atenção, designa a energia do sistema, o que nos traz um resultado interessante e que será comum em diversos problemas físicos, pois muitas vezes as funções de Liapunov de EDOs que representam sistemas físicos serão funções associadas à energia do sistema.

7. CONCLUSÕES

Durante o projeto, foi abordado de maneira introdutória conceitos e resultados relacionados às equações diferenciais de forma que ao longo do tempo foi possível perceber a importância dessa área de estudo em diversas ciências afins com a matemática, como a física, economia e etc, servindo como base para modelar fenômenos naturais e econômicos

O projeto foi importante, por conseguinte, para entender a grande quantidade de aplicações dessa área da matemática em diversas outras áreas cientificas, assim como também foi importante no sentido de trazer novas ferramentas e conhecimentos relacionados às áreas da matemática avançada, como Análise, Álgebra Linear e Cálculo avançado. Além disso tudo, o projeto ainda ajudou a maturar ideias e conceitos matemáticos presentes na graduação e pós-graduação do curso de matemática, o que foi bastante estimulante.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Hoffman, K. Kunze, R. Linear Algebra, Prentice Hall, 1971.

[2] Limas, E.L. Curso de Análise vol 1, Projeto Euclides, IMPA, 2017

[3] Claus I., Artur O. Equações Diferencias Ordinárias, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2016

[4] de Figueiredo, D. G., Neves, A. F., Equações Diferenciais Aplicadas, coleção Matemática universitária, IMPA, 2012.

9. ATIVIDADES PARALELAS DESENVOLVIDAS PELO ESTUDANTE

Durante o projeto, continuei cursando minhas cadeiras da graduação normalmente e participando de palestras e mini eventos realizados tanto sobre o objeto de estudo do projeto quanto outros assuntos da matemática. Além disso, prestava 2 horas semanais para ajudar alunos que estavam tentando ingressar no vestibular via ENEM.

10. DIFICULDADES ENCONTRADAS NO DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

Durante o projeto, apresentei um pouco de dificuldade com alguns conceitos matemáticos, uma vez que, vindo da engenharia, estava acostumado em utilizar muitas das ferramentas para algo prático sem me questionar a origem de alguma delas, mas com a ajuda do meu orientador Roberto, consegui ir compreendendo aos poucos a linguagem matemática bem como alguns conceitos que me foram úteis para o desenvolvimento do projeto.