UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELTHON MATHEUS ARAUJO

CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO KORTEWEG-DE VRIES EM UM DOMÍNIO PERIÓDICO

Recife

2018

ELTHON MATHEUS ARAUJO

CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO KORTEWEG-DE VRIES EM UM DOMÍNIO PERIÓDICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Orientador: Roberto A. Capistrano Filho

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A663c Araujo, Elthon Matheus
Controle e estabilização da equação Korteweg-de Vries em um domínio periódico / Elthon Matheus Araujo. – 2018.
99 f.

Orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Estabilidade. I. Capistrano Filho, Roberto de Almeida (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-109

ELTHON MATHEUS ARAUJO

CONTROLE E ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO KORTEWEG-DE VRIES EM UM DOMÍNIO PERIÓDICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 19/07/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar toda a minha gratidão a todos aqueles que contribuíram, diretamente ou indiretamente, para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço aos meus pais por todo o amor que me deram, além da educação, ensinamentos e apoio em toda a minha vida.

Aos meus irmãos por estarem sempre do meu lado com grande carinho.

Aos meus amigos: Allison Luis, Bruno Tadeu, Evair Carvalho, Fábio Vasconcelos, Glauber Leocádio, João Gabriel, Natanael Patriarca, Raíza Helena, Yasmim Fernandes, entre outros, por estarem do meu lado em todos os momentos da vida.

Ao meu orientador Roberto de Almeida Capistrano Filho, por toda paciência e tempo que dedicou a me ajudar durante o processo de realização deste trabalho.

Aos meus colegas do curso de matemática: Breno Danillo, Méllanie Thayline, Raffael Borges, Vivian Brandão, entre outros, pela amizade e companheirismo.

Aos professores: Eudes Naziazeno, Felipe Chaves, Felipe Wergete, Gleidson Gomes, Henrique Vitório, Manoel Lemos, Peter Johnson, pelas inúmeras contribuições matemáticas em minha vida acadêmica.

Aos professores Márcio Cavalcante de Melo e Felipe Wergete, pela aceitação e contribuição à dissertação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Em [37], Russel e Zhang mostraram que a equação de Korteweg-de Vries (KdV) em um domínio periódico, à saber, no toro ($\mathbb{T}$) com um controle interno é localmente exatamente controlável e localmente exponencialmente estabilizável quando o controle age apenas em um subconjunto arbitrário não vazio do $\mathbb{T}$. Neste trabalho, mostramos que o sistema é de fato globalmente exatamente controlável e globalmente exponencialmente estabilizável. Para o caso linear, estes resultados são estabelecidos usando principalmente a teoria de semigrupos. Além disso, mostramos que o sistema linear circuito fechado é globalmente exponencialmente estabilizável com uma velocidade de decaimento arbitrariamente grande. Para o caso não linear, a estabilidade exponencial global é estabelecida com o auxílio de certas propriedades de propagação de compacidade e regularidade nos espaços de Bourgain para as soluções do sistema linear associado, que são inspiradas pelas estabelecidas por Laurent em [24] para a equação de Schrödinger. Por fim, através da lei de amortecimento de Slemrod, mostramos que o sistema não linear circuito fechado resultante é globalmente exponencialmente estabilizável com uma velocidade de decaimente arbitrariamente grande.

Palavras-chave: Controlabilidade exata. Equação KdV. Espaços de Bourgain. Estabilidade. Propagação de compacidade. Propagação de regularidade.

ABSTRACT

In [37], Russell and Zhang showed that the Korteweg-de Vries (KdV) equation posed on a periodic domain, namely, on the torus ($\mathbb{T}$) with an internal control is locally exactly controllable and locally exponentially stabilizable when the control acts only on an arbitrary nonempty subdomain of $\mathbb{T}$. In this work, we show that the system is in fact globally exactly controllable and globally exponentially stabilizable. For the linear case, these results are established by mostly using semigroup theory. Furthermore, we show that the closed-loop linear system is globally exponentially stabilizable with an arbitrarily large deacy rate. For the nonlinear case, the global exponential stabilizability is established with the aid of certain properties of propagation of compactness and regularity in Bourgain spaces for the solutions of the associated linear system, which are inspired by those established by Laurent in [24] for the Schrödinger equation. Lastly, with Slemrod's feedback law, we show that the resulting closed-loop nonlinear system is globally exponentially stabilizable with an arbitrarily large decay rate.

Keywords: Bourgain space. Exact controllability. Korteweg-de Vries equation. Propagation of compactness. Propagation of regularity. Stability.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É comum nas ciências que descobertas importantes não sejam imediatamente reconhecidas como tal. Um exemplo típico, refere-se à descoberta do que hoje se denominam por "sólitons". A primeira observação documentada sobre sólitons foi feita em 1834 pelo cientista escocês John Scott Russell, quando observava o movimento de uma balsa no canal de Eddinburgh, em Glasgow. A balsa estava sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do estreito canal, quando parou bruscamente, e daí segundo suas próprias palavras falou: *"... a massa de água que se acumulava na frente da balsa em movimento, em um estado de violenta agitação, seguiu em alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma montanha de água, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade"*. Russell a seguiu a cavalo, por mais de três quilômetros, correndo a uma velocidade de aproximadamente 15 km/h. Diante disso ele, mesmo denominou inicialmente de "onda de translação"e posteriormente de "onda solitária". Russel faleceu em 1882 sem ter conseguido uma fórmula matemática para o perfil da onda solitária ou uma equação que pudesse descrever sua evolução. Apenas em 1895, dois matemáticos holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, conseguiram deduzir a equação para propagação de ondas em águas rasas, hoje conhecida como "KdV".

A palavra "sóliton"somente surgiu em 1965 a partir dos trabalhos de Zabuski e Kruskal [23]. Eles observavam uma propriedade notável para as ondas tipo KdV, no qual para diferentes amplitudes, logo diferentes velocidades, quando duas ondas se encontram, não se destroem e também não se dispersam, como seria de se esperar. Pelo contrário, constataram que uma passa pela outra sem mudar de forma e com somente uma pequena alteração em sua fases. Essa é uma propriedade importante, porque mostra que a energia pode se propagar em pacotes localizados sem se dispersar.

A forma original da equação, presente no artigo de Korteweg e de Vries [22] é

$$\frac{d}{dt}\eta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3\alpha}{2}\frac{d}{dx}\eta + \frac{\beta}{3}\frac{d^2}{dx^2}\eta\right),$$

onde η é a elevação da superfície de líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme do líquido, $g > 0$ é a constate de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade ρ.

A equação de Korteweg-de Vries (KdV) na sua forma mais conhecida é dada por

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função que representa a superfície da onda, x o espaço e t o tempo. Além de ser uma boa modelagem para algumas ondas em meios aquáticos, a equação KdV é também um modelo de aproximação bastante útil aos estudos das equações com não linearidade simples e efeitos dispersivos.

1.1 Problemas e Resultados Importantes

Este trabalho é dedicado ao estudo de controle e estabilização da equação KdV em domínio periódico $\mathbb{T}$,

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

É conhecido que a equação KdV neste tipo de domínio possui uma quantidade infinita de integrais com valores conservados, umas das mais conhecidas são

$$M(t) = \int_{\mathbb{T}} u(x,t)dx \quad \text{e} \quad E(t) = \int_{\mathbb{T}} u^2(x,t)dx.$$

Das origens históricas da equação KdV é natural pensar em $M(t)$ como a conservação da massa (ou volume) ao decorrer do tempo, e da mesma forma, pensamos em $E(t)$ como a conversação da energia ao longo do tempo (ver [5, 9, 32]). Existem vários artigos que estudam o problema de valor inicial (ou de Cauchy) para a equação (1.2), podemos destacar [4], [8], [19], [20], [37], [39] e [47].

Um dos resultados mais importantes, obtidos até o momento, corresponde a boa colocação da equação (1.2) nos espaços Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ para qualquer índice $s \geq -1$, foi provado por

Kappeler e Topalov em [18]. De forma mais detalhada, sejam $T > 0$ e $s \geq -1$ dados, então para qualquer estado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$, a equação (1.2) admite uma única solução $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ satisfazendo

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Adicionalmente, os autores provaram que a aplicação solução correspondente $\mathcal{S} : H^s(\mathbb{T}) \to C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ é contínua. Ou seja, para quaisquer $\varepsilon > 0$, $T > 0$ e $x \in H^s(\mathbb{T})$ dados, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, T, x) > 0$ tal que qualquer que seja $y \in H^s(\mathbb{T})$ satisfazendo $\|x - y\|_{H^s(\mathbb{T})} < \delta$,

$$\sup_{t<T} \|\mathcal{S}(t,x) - \mathcal{S}(t,y)\|_{H^s(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Mais ainda, se $s > -\frac{1}{2}$ a aplicação solução é analítica.

Nosso interesse é estudar a equação KdV do ponto de vista da teoria do controle. Sendo assim, vamos adicionar a equação (1.2) uma função $f = f(x,t)$, resultando no sistema

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = f, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Aqui, f é denominada de controle e está suportada em $\omega \subset \mathbb{T}$ aberto não vazio.

Se a função controle f é suportada em todo o domínio, dizemos que f é um controle que age globalmente no domínio. Porém, se o suporte da função f for um subconjunto próprio do domínio, dizemos que f é um controle que age localmente. Obviamente, possuímos uma influência maior no sistema utilizando um controle que age globalmente, entretanto existem mais casos práticos para um controle que age apenas localmente. Portanto este último é o mais relevante e será nosso objeto de estudo (ver [37]).

Dirigimos a nossa atenção aos seguintes problemas:

Problema 1. (Controle exato). *Seja $T > 0$ dado. Para quaisquer dados inicial u_0 e final u_1 em um determinado espaço, é possível encontrar uma função controle f de tal forma que a equação* (1.3) *admita uma solução u satisfazendo*

$$u(\cdot,0) = u_0 \quad e \quad u(\cdot,T) = u_1?$$

Problema 2. (Estabilização). *É possível encontrar um amortecimento $f = Ku$ tal que o sistema resultante*

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = Ku, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.4}$$

é exponencialmente estável?

Dizemos que o sistema (1.3) é localmente exatamente controlável, se obtermos uma resposta positiva para a Problema 1, supondo que os dados inicial u_0 e final u_1 sejam suficientemente pequenos. Por outro lado, o sistema é globalmente exatamente controlável, se a resposta for afirmativa sem nenhuma suposição sobre os dados inicial e final. Similarmente, o sistema é localmente estabilizável, se obtermos uma resposta positiva para a Problema 2, supondo que o dado inicial u_0 seja suficientemente pequeno. Em contrapartida, o sistema é globalmente estabilizável, se a resposta for afirmativa sem nenhuma suposição sobre o dado inicial (ver [45]).

Russel e Zhang, foram os primeiros a estudar esses problemas para a equação KdV em domínio periódico $\mathbb{T}$. Para maiores detalhes do contexto histórico desse problema, citamos [35, 36, 37]. No intuito de manter a massa do sistema conservada, introduziram o operador G, dado por

$$(G\phi)(x) = g(x)\left(\phi(x) - \int_{\mathbb{T}} g(y)\phi(y)dy\right), \tag{1.5}$$

onde g é uma função suave não negativa satisfazendo:

(i) $\omega = \{x \in \mathbb{T} : g(x) > 0\}$, para um dado $\omega \subset \mathbb{T}$ aberto não vazio;

(ii) $2\pi[g] = \int_{\mathbb{T}} g(x)dx = 1$.

O número $[g]$ denota o valor médio da função g sobre o $\mathbb{T}$.

Deste modo, a solução do sistema resultante

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = Gh, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

tem a sua massa conservada. De fato, considerando $h = h(x,t)$ o novo controle, basta notar que para qualquer $u = u(x,t)$ solução do sistema (1.6), temos

$$\frac{d}{dt}M(t) = \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)dx = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Os Teoremas A e B, abaixo descritos, podem ser encontrados em [37].

Teorema A. *Sejam $T > 0$ e $s \geq 0$ dados. Existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer $u_0, u_1 \in H^s(\mathbb{T})$ que satisfazem $[u_0] = [u_1]$ e*

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \delta, \quad \|u_1\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \delta,$$

pode-se encontrar um controle $h \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))$ *tal que o sistema* (1.6) *admite uma única solução* $u \in C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$ *satisfazendo*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x).$$

De forma simples, é sempre possível encontrar um controle h para guiar a solução do sistema (1.6) de um dado inicial u_0 até um dado final u_1, desde que suas normas $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})}$ e $\|u_1\|_{H^s(\mathbb{T})}$ sejam suficientemente pequenas, e seus valores médios $[u_0]$ e $[u_1]$ sejam iguais, garantindo assim um resultado de controlabilidade exata local para o sistema em questão.

No que diz respeito a estabilização do sistema (1.6), Russel e Zhang, introduziram um amortecimento simples

$$h(x,t) = -G^*u(x,t),$$

de modo que, o sistema resultante

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = -GG^*u, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

fosse exponencialmente estável, como pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema B. *Seja* $s = 0$ *ou* $s \geq 1$ *dado. Existem constantes* $M, \delta, \gamma > 0$ *tais que para qualquer* $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ *satisfazendo*

$$\|u_0 - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \delta,$$

a solução correspondente u *de* (1.7) *satisfaz*

$$\|u(\cdot,t) - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq Me^{-\gamma t}\|u_0 - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})}, \quad \forall t \geq 0.$$

A constante $\gamma > 0$ *é chamada de velocidade de decaimento exponencial.*

A grosso modo, soluções do sistema (1.7) com estados iniciais próximos de seus valores médios na norma de $H^s(\mathbb{T})$, convergem a uma velocidade exponencial para os seus valores médios no espaço $H^s(\mathbb{T})$ a medida que t tende ao infinito.

A partir disso, algumas perguntas surgem naturalmente:

Pergunta 1. *É possível escolher um controle apropriado* h *para guiar o sistema do estado inicial* u_0 *ao estado final* u_1 *quando as normas* $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})}$ *e* $\|u_1\|_{H^s(\mathbb{T})}$ *forem arbitrariamente grandes?*

Pergunta 2. *Qualquer solução do sistema* (1.7) *converge exponencialmente para o seu valor médio na norma de* $H^s(\mathbb{T})$, *quando* t *tende ao infinito?*

Pergunta 3. *Para um* $\lambda > 0$ *dado, é possível encontrar um amortecimento tal que* λ *é a velocidade de decaimento exponencial do sistema?*

Um dos principais resultados provados nesse trabalho é uma resposta positiva para a Pergunta 1, descrita no teorema abaixo.

Teorema 1. *Sejam* $s \geq 0$, $R > 0$ *e* $\mu \in \mathbb{R}$ *dados. Então existe um tempo* $T > 0$ *tal que para quaisquer* $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$ *com* $\mu = [u_0] = [u_1]$, *satisfazendo*

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq R, \quad \|u_1\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq R,$$

é possível encontrar um controle $h \in L^2(0, T; H^s(\mathbb{T}))$ *de forma que o sistema* (1.6) *admite uma solução* $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$ *satisfazendo*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_1(x).$$

Note que no Teorema A o tempo T é independente dos dados iniciais e pode, neste caso, ser tomando arbitrariamente pequeno. Porém, no Teorema 1, o tempo T depende da restrição dos dados iniciais em uma bola do $H^s(\mathbb{T})$. Até o momento não se sabe se pode ser retirada a restrição do tempo T, isto é, escolher T independente do tamanho da bola em $H^s(\mathbb{T})$.

Outro resultado importante provado nesse trabalho, é uma resposta positiva para a Pergunta 2, caracterizada no teorema a seguir.

Teorema 2. *Sejam* $s \geq 0$ *e* $\mu \in \mathbb{R}$ *dados. Existe uma constante* $\kappa > 0$ *tal que para qualquer* $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ *com* $\mu = [u_0]$, *a solução correspondente* u *do sistema* (1.7) *satisfaz*

$$\|u(\cdot, t) - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \alpha_{s,\mu} \left(\|u_0 - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})} \right) e^{-\kappa t} \|u_0 - [u_0]\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

para todo $t \geq 0$, *onde* $\alpha_{s,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua não decrescente dependente apenas de* s *e* μ.

Apesar da velocidade de decaimento κ ser independente do estado inicial u_0, a função $\alpha_{s,\mu}$ não é necessariamente uniformemente limitada, ou seja, pode acontecer que

$$\lim_{r \to \infty} \alpha_{s,\mu}(r) = \infty.$$

Observe que no Teorema 2, a velocidade de decaimento exponencial κ não é arbitrária. Portanto, para obter uma resposta positiva para a Pergunta 3, um amortecimento diferente é necessário.

Para provarmos os resultados de controlabilidade e estabilização do caso não linear, iremos primeiro considerar os sistemas lineares

$$u_t + u_{xxx} = Gh, \quad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

e

$$u_t + u_{xxx} = -GG^*u, \quad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

associados aos sistemas (1.6) e (1.7), respectivamente. Podemos mostrar, com certa facilidade, as versões globais do controle exato de (1.8) e da estabilização de (1.9) para uma velocidade de decaimento $\lambda > 0$ arbitrariamente grande nos espaços $H^s(\mathbb{T})$, onde $s \geq 0$. Isto é, no caso linear, temos resultados globais e assim, podemos responder positivamente as três perguntas mencionadas anteriormente.

Estender esses resultados para o caso não linear é uma tarefa difícil. De fato, após provarem as versões lineares da controlabilidade e estabilização da equação KdV [36], Russel e Zhang, tiveram de esperar por vários anos para estender estes resultados para o caso não linear. Isso se deu quando Bourgain, em [4], descobriu uma propriedade suavizante das soluções da equação KdV em domínio periódico $\mathbb{T}$. Devido a essa nova propriedade os autores em [37] foram finalmente capazes de estabelecer resultados locais para o caso não linear, descritos nos Teorema A e B.

Estabelecer as versões globais da controlabilidade exata de (1.6) e da estabilidade de (1.7), é uma tarefa ainda mais difícil pois, apesar dos Teoremas A e B serem de natureza não linear, as suas demonstrações se resumem a uma pequena perturbação dos resultados lineares. Já os Teoremas 1 e 2 são "verdadeiramente" não lineares e suas demonstrações precisam de novas ferramentas. No fim, a ajuda necessária são algumas propriedades de propagação de compacidade e de regularidade para a equação KdV, que são inspiradas pelas estabelecidas por Laurent [24] para a equação de Schrödinger. É válido citar, que além de Laurent [24, 25], Dehman também já utilizou com sucesso tais propriedades para as equações da onda e de Schrödinger, em [10] e [11], respectivamente.

Por fim, como o sistema (1.6) tem massa conservada, para qualquer uma de suas soluções u, o valor médio $[u]$ é invariante. Neste caso, podemos introduzir o número $\mu = [u] = [u_0]$, e definir

$$v = u - \mu.$$

Logo, o valor médio $[v] = 0$, e v é solução do sistema

$$v_t + v_{xxx} + (\mu + v)v_x = Gh, \quad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R},$$

se e somente se, u é solução do sistema (1.6). Por isso, ao longo do texto, estabeleceremos os resultados para o sistema

$$u_t + \mu u_x + u_{xxx} + u u_x = Gh, \quad x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

nos espaços $H_0^s(\mathbb{T}) = \{u \in H^s(\mathbb{T}); [u] = 0\}$, onde μ denota uma constante real.

Este trabalho é dividido da seguinte forma:

No **Capítulo 2** apresentaremos resultados clássicos que usaremos no decorrer deste trabalho.

No **Capítulo 3**, utilizaremos argumentos da teoria de controle, assim como a teoria de semigrupos, para obter o controle exato global e estabilização da equação KdV linear.

No **Capítulo 4**, apresentaremos os espaços de Bourgain, em seguida mostraremos as propriedades de propagação de compacidade e de regularidade da equação KdV não linear.

No **Capítulo 5**, utilizaremos os resultados obtidos no capítulo anterior, para mostrar que o sistema não linear está globalmente bem colocado nos espaços $H^s(\mathbb{T})$, e por fim, provaremos a estabilização global e a controlabilidade exata global da equação KdV não linear.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado à introdução de notações, definições e resultados que serão usados ao longo do texto.

2.1 Espaços Funcionais

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para uma dada função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos o conjunto

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

como o suporte de f. Deste modo, o $supp(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Seja o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$ definimos $D^0 u = u$, para toda função u.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial com as operações usuais, das funções $C^\infty(\Omega)$, e de suporte compacto em Ω. O espaço de Schwartz ou espaço das funções de decrescimento rápido em $\mathbb{R}^n$, é o espaço funcional

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \ , \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}, \quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

onde α e β são multi-indices.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 2.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto que contém a bola fechada*

$$\overline{B(0;1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Considere a função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, tal que*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & se\ \|x\| < 1, \\ 0 & se\ \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x*. Deste modo, podemos ver que* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B(0;1)}$ *é um compacto, ou seja,* $f \in C_0^\infty(\Omega)$*.*

Definição 2.1. *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para uma* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$*, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ *tal que* $supp(\varphi) \subset K$ *e* $supp(\varphi_n) \subset K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente em* K*, para todo multi-índice* α*.*

Observação 2.1. *É possível dotar o espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 2.1 (ver* [40]*).*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da convergência definida anteriormente, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das funções teste sobre Ω. Uma distribuição sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \alpha, \psi \in D(\Omega)$;

(ii) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor $T(\varphi)$ por $\langle T, \varphi \rangle$. Além disso, o espaço vetorial das distribuições em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de distribuições escalares que desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 2.2. *Seja* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$*, para algum* $p \in [1, \infty)$*. Definimos o funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

O funcional T_u *é uma distribuição sobre* Ω *univocamente determinada por* u*. Desta forma,* $L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *(ver* [29]*).*

Exemplo 2.3. *Assuma* $0 \in \Omega$ *e considere o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Deste modo, δ_0 *é uma distribuição sobre* Ω*. Além disso, pode-se mostrar que* δ_0 *não pode ser definido por uma função* $L^1_{loc}(\Omega)$ *(ver [29]).*

Definição 2.2. *Diz-se que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, quando a sequência numérica* $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$*, para toda* $\varphi \in D(\Omega)$*.*

Definição 2.3. *Sejam* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in D(\Omega).$$

Observação 2.2. *Decorre da Definição 2.3 que cada* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 2.3. *Se* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*, então* D^α *é um distribuição sobre* Ω*. De fato, podemos ver claramente que* D^α *é linear. Para a continuidade, considere a sequência* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo para uma* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Assim,* $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha(\varphi_n - \varphi)\rangle| \to 0$*, quando* $n \to \infty$*.*

Observação 2.4. *A aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^\alpha$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$*.*

Dizemos que uma sequência de vetores (x_n) em um espaço de Hilbert X é uma sequência de Riesz se existem constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tais que

$$C_1 \sum_n |a_n|^2 \leq \left\| \sum_n a_n x_n \right\|^2 \leq C_2 \sum_n |a_n|^2,$$

para toda sequência finita de escalares $\{a_n\}$. Além disso, se $\overline{[ger(x_n)]} = X$, isto é, o fecho do subespaço gerado por (x_n) é X, então dizemos que (x_n) é uma base de Riesz.

Dados $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$, definimos o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall\, |\alpha| \leq m,\ D^\alpha \in L^p(\Omega)\},$$

onde α é um multi-índice. Para todo $p \in [1, \infty)$, temos que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in [1, \infty)$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess\ |D^\alpha u(x)| \text{ para } p = \infty.$$

Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (ver [30]).

Observação 2.5. *Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0, T; X), p \in [1, \infty)$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0, T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \to X$, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess\ \|u(t)\|_X.$$

Observação 2.6. *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Considere o espaço $L^p(0,T;X)$, para $p \in (1,\infty)$, com X sendo Hilbert separável. Então, podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]^* = L^q(0,T;X^*),$$

para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]^* = L^\infty(0,T;X^*).$$

Essas identificações podem ser encontradas em [28].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.4. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. Define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Agora, considere o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X);\ u^{(i)} \in L^P(0,T;X),\ i = 1,\ldots,m\},$$

onde $u^{(i)}$ representa a $i-$ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{i=0}^{m} \|u^{(i)}\|^p_{L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (ver [1]).

Observação 2.7. *Para $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, o qual , munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{i=0}^{m} \left(u^{(i)}, v^{(i)}\right)_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H^m_c(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H^m_c(0,T;X)$.

Definição 2.5. *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços vetoriais normados, onde* $X \subset Y$*. Dizemos que* X *está continuamente imerso em* Y*, e denotamos por* $X \hookrightarrow Y$*, se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \qquad \forall\, x \in X.$$

Dizemos que X *está compactamente imerso em* Y*, e denotamos por* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$*, se* $X \hookrightarrow Y$*; e a imersão de* X *em* Y *for um operador compacto, isto é, para qualquer* $Z \subset X$ *limitado, toda sequência em* Z *tem uma subsequência que é Cauchy na norma* $\|\cdot\|_Y$*.*

Lema 2.1 (Imersão de Sobolev). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira* Γ *regular.*

(i) Se $n > 2m$*, então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, onde* $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$*.*

(ii) Se $n = 2m$*, então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, onde* $p \in [1, \infty)$*.*

(iii) Se $n = 1$ *e* $m \geq 1$*, então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*.*

Lema 2.2 (Rellich-Kondrachov). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira* Γ *regular.*

(i) Se $n > 2m$*, então* $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$*, onde* $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right)$*.*

(ii) Se $n = 2m$*, então* $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$*, onde* $p \in [1, \infty)$*.*

(iii) Se $n > 2m$*, então* $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$*, onde* $k < m - n + 2 \leq k + 1$*, para algum* $k \in \mathbb{N}$*.*

Teorema 2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Seja* E *um espaço de Banach. Então* $\mathcal{B}'_E = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *é compacto pela topologia fraca** $\sigma(E', E)$*.*

Teorema 2.2 (Ponto fixo de Banach). *Seja* X *um espaço métrico completo não vazio. Se* $S : X \to X$ *é uma contração, isto é, existe um* $0 < C < 1$ *tal que*

$$d(Su, Sv) \leq C d(u, v) \qquad \forall\, u, v \in X,$$

então S *tem um único ponto fixo, isto é,* $Su = u$*.*

As demonstrações dos Lemas 2.1 e 2.2, e dos Teoremas 2.1 e 2.2, podem ser encontradas em [6].

Lema 2.3 (Du Bois Reymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = 0 \ q.s. \ em \ \Omega.$$

Prova: Ver [30]. □

Teorema 2.3 (Holmgren). *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Seja u uma solução de $Pu = 0$ em Ω_1, onde Ω_1 é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha $u = 0$ em Ω_2, onde $\Omega_2 \subset \Omega_1$ aberto não vazio. Então $u = 0$ em Ω_3, onde $\Omega_3 \subset \Omega_1$ contém Ω_2 e tal que qualquer hiperplano característico de P que intersecta Ω_3 também intersecta Ω_2.*

Prova: Ver [16]. □

Teorema 2.4 (Hellinger-Toeplitz). *Seja X um espaço de Hilbert. Seja T um operador autoadjunto de X definido em todo espaço. Então T é limitado.*

Prova: Ver [27]. □

2.2 Teoria de Fourier

Nesta seção definiremos a transformada de Fourier, a convolução e apresentaremos alguns resultados básicos da teoria de Fourier.

Definição 2.6. *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotada por $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$, é dada pela seguinte integral*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

E a transformada inversa de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}^{-1}$, é dada pela seguinte integral

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi}dx.$$

Teorema 2.5. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ contínua, então $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$. Além disso, $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$.*

Prova: Defina o operador $(\mathcal{T}f)(x) = f(-x)$. Note que $\mathcal{T}^2 = I$, onde I é o operador identidade.

Afirmamos que $\mathcal{F}\mathcal{T} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}$. De fato,

$$\mathcal{F}\mathcal{T}f = \mathcal{F}(f(-x)) = \int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{-ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi}dx = 2\pi\mathcal{F}^{-1}f.$$

De forma similar, podemos ver também que $\mathcal{F} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}$, $\mathcal{T}\mathcal{F} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}$ e $\mathcal{F} = 2\pi\mathcal{T}\mathcal{F}^{-1}$.

Assim, concluímos que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{F}^{-1} = (2\pi\mathcal{F}^{-1})\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\right) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$. □

Observação 2.8. *Note que da prova do teorema anterior, segue também que* $\mathcal{F}^2 = 2\pi\mathcal{T}$.

Proposição 2.1 (Riemann-Lebesgue). *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *função de valores complexos. Então*

$$\lim_{|k|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = 0.$$

Definição 2.7. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *A convolução de* f *e* g, *denotada por* $f * g$, *é dada pela integral*

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y - x)g(x)dx.$$

Note que $(f * g) = (g * f)$.

Lema 2.4. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Então* $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(y)|dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy.$$

Teorema 2.6. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Então* $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Prova: Para quaisquer $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(y)e^{-iy\xi}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y - x)g(x)dx \right) e^{-iy\xi}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y - x)e^{-i(y-x)\xi}dy \right) dx \\
&= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Nosso interesse são as transformadas de Fourier de funções em $L^2(\mathbb{R})$. Entretanto a definição usual da integral da transformada de Fourier, não faz sentido para funções em $L^2(\mathbb{R})$, em geral. Por exemplo, considerando a função $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, podemos ver facilmente que $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

Sendo assim, definiremos o operador $\mathcal{F}$ em um subespaço denso X de $L^2(\mathbb{R})$, onde a integral converge, em seguida tomaremos sequências de Cauchy de funções em X, para definir $\mathcal{F}$ em $\overline{X}$.

Teorema 2.7 (Plancherel). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Então*

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Prova: Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Usando a transformada inversa de Fourier, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\right)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(\xi)}e^{-i\xi x}d\xi\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx\right)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.
\end{aligned}$$

Considerando $f = g$, o resultado segue. $\square$

Observação 2.9. *O teorema de Plancherel nos diz que o operador de Fourier $\mathcal{F}$ é unitário em $L^2(\mathbb{R})$.*

Definição 2.8. *A função característica de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é a função $\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ definida por*

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \Omega, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

O delta de Kronecker, é a notação δ_{jk}, definida por

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & se\ j = k, \\ 0, & se\ j \neq k. \end{cases}$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$, considere a função característica $\chi_{[-N,N]}$, e veja que $\chi_{[-N,N]} \in L^2(\mathbb{R})$ para todo N. Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ temos

$$\int_{-N}^{N} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)\chi_{[-N,N]}(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\chi_{[-N,N]}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Logo, o espaço das funções escada é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Então podemos tomar uma sequência convergente de funções escada $\{g_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|g_N - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.$$

Lema 2.5. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para todo $N \in \mathbb{N}$, seja $f_N = f\chi_{[-N,N]}$. Então $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R})$ e $\|f_N - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, existe uma função escada g_M tal que $\|g_M - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{2}$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $supp(g_M) \subset [-N, N]$. Então

$$\begin{aligned}\|g_M - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-N}^{N} |g_M(x) - f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g_M(x) - f(x)|^2 dx \\ &= \|g_M - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f_N - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f_N - g_M\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|g_M - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|g_M - f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

e o resultado segue. □

Agora, podemos definir $\mathcal{F}$ para funções em $L^2(\mathbb{R})$. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\{g_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de funções escada tal que $g_N \to f$ em $L^2(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{F}$ é operador unitário em $L^2(\mathbb{R})$, então a sequência $\{\mathcal{F}g_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy. Logo, podemos definir $\mathcal{F}f$ como o $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}g_N$. A função truncada f_N tem transformada de Fourier dada pela integral

$$\mathcal{F}f_N(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

E portanto, do lema anterior, temos que

$$\|\mathcal{F}f_N - \mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_N - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.$$

O espaço vetorial das distribuições sobre $S(\mathbb{R})$, denotado por $S'(\mathbb{R})$, é dito espaço das distribuições temperadas. Para quaisquer $u \in S(\mathbb{R})$ e $v \in S'(\mathbb{R})$, $\langle v, u\rangle$ denota o produto interno usual de $L^2(\mathbb{R})$. Para $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{u \in S'(\mathbb{R}) : \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}.$$

Da definição, é fácil ver que $H^{s_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R})$, para $s_1 < s_2$, com

$$\|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^{s_2}(\mathbb{R})},$$

onde $u \in H^{s_2}(\mathbb{R})$. Pelo teorema de Plancherel, temos que $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$, com igualdade de normas, de forma que $H^s(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ para todo $s \geq 0$.

Para terminar esta seção, faremos uma breve introdução dos espaços de Sobolev no círculo. Os resultados abaixo descritos podem ser encontrados em [13].

Teorema 2.8 (Identidade de Parseval). *Seja $f \in L^2(0, 2\pi)$. Então*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

onde os coeficientes de Fourier f_k de f são dados por

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Se $u \in L^2(0, 2\pi)$, então u tem sua expansão em série de Fourier

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

onde a convergência da série está em $L^2(0, 2\pi)$.

Observação 2.10. *As funções $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ formam uma base ortonormal para o espaço $L^2(0, 2\pi)$, e são conhecidas como base ortonormal de Fourier em $L^2(0, 2\pi)$.*

Para $s \geq 0$ real, definimos o espaço Sobolev

$$H^s(0, 2\pi) = \left\{ u \in L^2(0, 2\pi) : \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 (1 + |k|)^{2s} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Pelo teorema de Parseval, vemos que $H^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$, com igualdade de normas.

Observação 2.11. *O espaço de Sobolev $H^s(0, 2\pi)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^s(0,2\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \overline{v_k} (1 + |k|)^{2s},$$

para $u, v \in H^s(0, 2\pi)$ e seus respectivos coeficientes de Fourier u_k e v_k. Além disso, a norma é dada por

$$\|u\|_{H^s(0,2\pi)} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 (1 + |k|)^{2s} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 2.6 (Sobolev). *Para $s > k + \frac{1}{2}$, temos a imersão contínua $H^s(0, 2\pi) \hookrightarrow C^k(0, 2\pi)$.*

2.3 Interpolação de Espaços Funcionais

As definições e resultados, do início desta seção, podem ser encontrados em [28].

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa. Sejam $(\cdot,\cdot)_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$ os produtos internos de X e Y, respectivamente. Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções u definidas em X, tal que a aplicação $v \to (u,v)_X$ $(v \in X)$ é contínua na topologia induzida por Y. Então $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define S, como um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$, denso em Y.

O operador S é autoadjunto e estritamente positivo. Utilizando a decomposição espectral de operadores autoadjuntos, podemos definir, S^θ, onde $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular, usaremos $A = S^{\frac{1}{2}}$.

O operador A é autoadjunto, positivo definido em Y, com domínio X e

$$(u,v)_X = (Au,Av)_Y, \quad \forall u,v \in X.$$

Definição 2.9. *Nas hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \qquad (\textit{domínio de } A^{1-\theta}),\ \theta \in [0,1],$$

com a norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_X^2 + \|A^{1-\theta}u\|_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que:

(i) $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$;

(ii) $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta$;

(iii) Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$;

(iv) $[[X,Y]_{\theta_0},[X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1}$.

Teorema 2.9. *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $0 < \theta < 1$. Se $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, então*

$$[H^{s_1}(\mathbb{R}^n), H^{s_2}(\mathbb{R}^n)]_\theta = H^s(\mathbb{R}^n),$$

com as igualdade de normas.

Prova: Ver [7]. □

Teorema 2.10 (Stein-Weiss). *Seja* (Ω, μ) *um espaço de medida. Sejam* $0 < p \leq \infty$ *e* $0 < \theta < 1$. *Suponha* μ_0 *e* μ_1 *medidas positivas absolutamente contínuas com respeito a medida* μ. *Deste modo, podemos supor que*

$$d\mu_0(x) = w_0(x)d\mu(x) \quad e \quad d\mu_1(x) = w_1(x)d\mu(x).$$

Defina $w(x) = w_0^{1-\theta}(x)w_1^{\theta}(x)$. *Então*

$$[L^p(\Omega, w_0\mu), L^p(\Omega, w_1\mu)]_\theta = L^p(\Omega, w\mu)$$

com normas equivalentes.

Prova: Ver [2]. □

Teorema 2.11 (Interpolação não linear). *Sejam* B_0^j *e* B_1^j *espaços de Banach tais que* $B_1^j \hookrightarrow B_0^j$, *para* $j = 1, 2$. *Sejam* $0 < \lambda < 1$ *e* $1 \leq q \leq \infty$. *Suponha que* A *é uma aplicação tal que:*

(i) $A : B_{\lambda,q}^1 \to B_0^2$ *e para* $f, g \in B_{\lambda,q}^1$,

$$\|Af - Ag\|_{B_0^2} \leq \alpha_0 \left(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} + \|g\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|f - g\|_{B_0^1};$$

(ii) $A : B_1^1 \to B_1^2$ *e para* $h \in B_1^1$

$$\|Ah\|_{B_1^2} \leq \alpha_1 \left(\|h\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|h\|_{B_1^1},$$

onde $\alpha_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *são funções contínuas não decrescentes,* $j = 0, 1$.

Então, se $(\theta, p) \geq (\lambda, q)$, A *leva* $B_{\theta,p}^1$ *em* $B_{\theta,p}^2$ *e para qualquer* $f \in B_{\theta,p}^1$

$$\|Af\|_{B_{\theta,p}^2} \leq \alpha \left(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|f\|_{B_{\theta,p}^1},$$

onde, para $r > 0$, $\alpha(r) = 4\alpha_0(4r)^{1-\theta}\alpha_1(3r)^{\theta}$.

Prova: Ver [3]. □

2.4 Desigualdades

Esta seção é dedicada a desigualdades importantes que serão utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

Lema 2.7 (Desigualdade de Young). *Sejam $a, b > 0$ constantes, e $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 2.8 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ que satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lema 2.9 (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lema 2.10 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$. Para qualquer $u \in H^3(\Omega)$ existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_{xxx}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

As demonstrações dos Lemas 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 podem ser encontradas em [6].

Lema 2.11 (Desigualdade Integral de Gronwall). *Seja $u : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ contínua e não negativa satisfazendo*

$$u(t) \leq C + \int_a^t B(s) u(s) ds \qquad \forall\, t \in [a, b],$$

onde $C \geq 0$ é constante e $B : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ é contínua e não negativa. Então temos que

$$u(t) \leq C e^{\int_a^t B(s) ds} \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Lema 1.12 (Desigualdade Diferencial de Gronwall). *Seja a função $u : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ absolutamente contínua e não negativa satisfazendo*

$$u'(t) \leq B(t) u(t),$$

para quase todo $t \in [a,b]$*, onde* $B : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *é contínua e não negativa. Então, temos que*

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t B(s)ds} \qquad \forall\, t \in [a,b].$$

As demonstrações dos Lemas 2.11 e 2.12 podem ser encontradas em [42].

Lema 2.13 (Desigualdade de Ingham). *Sejam* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *uma sequência crescente de números reais tal que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\gamma_\infty = \liminf_{|n|\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| > 0$*. Para todo real* $T > \pi/\gamma_\infty$ *existem duas constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que*

$$C_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2, \tag{2.1}$$

para qualquer sequência finita de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Prova: Ver [34]. $\square$

2.5 Semigrupos de Operadores Lineares

Para detalhes da teoria exibida nesta seção veja [14, 33, 42].

Definição 2.10. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\mathcal{L}(X)$ *a álgebra dos operadores lineares limitados de* X*. Diz-se que uma aplicação* $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ *é um semigrupo de operadores limitados de* X *se:*

(i) $S(0) = I$*, onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$*;*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$*, para todo* $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S *é de classe* C_0 *se*

(iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$*, para todo* $x \in X$.

Proposição 2.2. *Se* S *é um semigrupo de classe* C_0*, então existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M \geq 1$ *tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Definição 2.11. *Se na proposição anterior $\omega = 0$, dizemos que S é uniformemente limitado. Se, além disso, $M = 1$ dizemos que S é um semigrupo de contrações.*

Proposição 2.3. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$, então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \qquad \forall\, x \in X.$$

Definição 2.12. *O operador A definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \ \textit{existe} \right\};$$

$$A(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Teorema 2.12. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Proposição 2.4. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Se $x \in \mathcal{D}(A)$ então, $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geq 0$. Além disso,*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 2.13. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Definindo $A^0 = I$ e supondo que os A^{n-1} estejam definidos, definiremos A^n como:*

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x : x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \ e \ A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A^n).$$

Proposição 2.5. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Então:*

(i) $\mathcal{D}(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X;

(ii) Se $x \in \mathcal{D}(A^n)$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

(iii) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$ *é denso em X.*

Definição 2.14. *Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A, e será denotado por $\rho(A)$. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é dito espectro de A. O operador linear $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, tal que $\lambda \in \rho(A)$, é dito resolvente de A.*

Sejam X um espaço de Banach, e X^* o seu espaço dual. Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$ definimos o conjunto

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \ e \ \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Do Teorema de Hahn-Banach, segue que $F(x)$ é não vazio para todo $x \in X$.

Definição 2.15. *Um operador linear A é dito dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Teorema 2.13 (Lumer-Phillips). *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, então*

(i) *A é dissipativo;*

(ii) $R(\lambda I - A) = X$, $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(i) $D(A)$ *é denso em* X;

(ii) *A é dissipativo;*

(iii) $R(\lambda_0 - A) = X$, *para algum* $\lambda > 0$,

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Prova: Ver [33]. □

Teorema 2.14. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $S(t)$. Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & , t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $f : [0,T] \to X$. Se f é Lipschitz contínua em $[0,T]$, então para cada $u_0 \in D(A)$, o sistema admite uma única solução forte u dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Prova: Ver [33]. $\square$

Proposição 2.6 (Fórmula de Duhamel). *Sejam I um intervalo de tempo e L um operador diferencial linear anti-autoadjunto, isto é, $L^* = -L$. Suponha $u \in C^1(I; \mathcal{S}(R^n))$ solução da equação*

$$\frac{d}{dt}u(t) - Lu(t) = f(t),$$

onde $f \in C(I; \mathcal{S}(R^n))$. Então

$$u(t) = e^{(t-t_0)L}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)L} f(s)ds \qquad \forall\, t_0, t \in I.$$

Prova: Ver [42]. $\square$

Lema 1.14. *Seja $s \geq 3$. Definimos o operador diferencial A, de domínio $\mathcal{D}(A) = H^s(\mathbb{R})$, por $Au = \partial_{xxx}u$, para $u \in \mathcal{D}(A)$. Nessas condições, A é o gerador infinitesimal de um grupo de isometrias fortemente contínuo em $L^2(\mathbb{R})$.*

Prova: Ver [33]. $\square$

Teorema 2.15. *Seja $s \geq 3$. Para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, existe um $T > 0$ tal que o sistema*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Prova: Ver [33]. $\square$

2.6 Teoria do Controle

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e propriedades básicas de controle e estabilização, que podem ser encontradas nas referências [31, 34, 41].

Sejam H e U espaços funcionais de Hilbert. Para dados $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0,T;U)$, considere a solução $u : [0,T] \to H$ do problema de de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = Au + Bf, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \to H$ é um operador diferencial ilimitado e $B : U \to H$ é um operador linear limitado. Assumiremos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em H, denotado por $S(t)$.

Para quaisquer $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $W^{1,1}(0,T;U)$, o problema de Cauchy (2.2) admite uma única solução clássica $u \in C([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,T];H)$ caracterizada pela fórmula de Duhamel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Bf(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Além disso, para dados $u_0 \in H$ e $f \in L^1(0,T;U)$, a fórmula acima ainda faz sentido e define uma solução forte de (2.2).

Definição 2.16. *O sistema* (2.2) *é dito:*

(i) exatamente controlável no tempo $T > 0$, se para quaisquer dados inicial e final $u_0, u_T \in H$, existir uma função $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução correspondente u de (2.2) *satisfaz $u(T) = u_T$;*

(ii) nulamente controlável no tempo $T > 0$, se para qualquer dado inicial $u_0 \in H$, existir uma função $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução correspondente u de (2.2) *satisfaz $u(T) = 0$;*

(iii) aproximadamente controlável no tempo $T > 0$, se para quaisquer dados inicial e final $u_0, u_T \in H$ e $\varepsilon > 0$, existir uma função $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução correspondente u de (2.2) *satisfaz*

$$\|u(T) - u_T\|_H < \varepsilon.$$

Em dimensão finita, pelo Teorema de Kalman, encontrado em [31], essas três definições são equivalentes a uma condição puramente algébrica que depende apenas dos postos das matrizes A e B, e consequentemente o tempo T não importa. Entretanto, para as equações diferenciais parciais:

- não existe um teste algébrico para controlabilidade;
- o tempo importa para equações hiperbólicas;
- em geral, as controlabilidades nula e aproximada não implicam a controlabilidade exata.

Seja A^* a matriz adjunta de A. Então A^* gera um semigrupo fortemente contínuo em H, denotado por $S^*(t)$.

Teorema 2.16. *Seja $T > 0$ dado. O sistema* (2.2) *é exatamente controlável no tempo T, se e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)y_0\|_U^2 dt \geq C\|y_0\|_H^2, \tag{2.3}$$

para todo $y_0 \in H$.

Prova: Ver [34]. $\square$

Observação 2.12. *A desigualdade* (2.3) *é dita observabilidade.*

Note que o teorema anterior garante que a desigualdade de observabilidade implica na controlabilidade exata do sistema. Deste modo, o controle exato do sistema (2.2) pode ser reduzido ao estudo de uma desigualdade, que ao menos conceitualmente, é um problema mais simples.

Teorema 2.17. *Seja $T > 0$ dado. O sistema é aproximadamente controlável no tempo $T > 0$, se e somente se,*

$$B^*S^*(t)y_0 = 0, \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{2.4}$$

implicar $y_0 = 0$.

Prova: Ver [34]. $\square$

Observação 2.13. *A propriedade* (2.4) *é chamada de continuação única.*

Se o sistema (2.2) for nulamente controlável para qualquer tempo $T > 0$, é possível mostrar, usando os Teoremas 2.16 e 2.17, que o sistema (2.2) é aproximadamente controlável para qualquer tempo $T > 0$. Para um operador limitado $K \in \mathcal{L}(H; U)$, seja o operador A_K, de domínio $\mathcal{D}(A_K) = \mathcal{D}(A)$, dado por

$$A_K u = Au + BKu,$$

e seja $S_K(t)$ o semigrupo gerado por A_K.

Definição 2.17. *O sistema* (2.2) *é dito:*

(i) exponencialmente estabilizável, se existe um amortecimento $K \in \mathcal{L}(H; U)$ tal que o operador A_K é exponencialmente estável, isto é, existem constantes $C > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$\|S_K(t)\| \leq Ce^{-\mu t},$$

para todo $t \geq 0$;

(ii) completamente estabilizável, se é exponencialmente estabilizável com uma velocidade de decaimento arbitrária, isto é, para qualquer $\mu \in \mathbb{R}^+$, existe um amortecimento $K \in \mathcal{L}(H; U)$ tal que

$$\|S_K(t)\| \leq Ce^{-\mu t},$$

para todo $t \geq 0$ e alguma contante $C > 0$.

Teorema 2.17. *Suponha que A é o gerador de um grupo. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) O sistema (2.2) *é exatamente controlável para algum tempo $T > 0$;*

(ii) O sistema (2.2) *é nulamente controlável para algum tempo $T > 0$;*

(iii) O sistema (2.2) *é completamente estabilizável.*

Prova: Ver [34]. □

Em particular, se A for um operador anti-autoadjunto, A gera um grupo fortemente contínuo de isometrias em H, e do teorema anterior, obtemos a seguinte consequência.

Corolário 2.1. *Suponha que A é um operador anti-autoadjunto. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) O sistema (2.2) *é exatamente controlável para algum tempo $T > 0$;*

(ii) O sistema (2.2) *é nulamente controlável para algum tempo $T > 0$;*

(iii) O sistema (2.2) *é exponencialmente estabilizável;*

(iv) O sistema (2.2) *é completamente estabilizável;*

(v) Para todo operador positivo autoadjunto $S \in \mathcal{L}(U)$, o operador $A - BSB^*$ gera um semigrupo exponencialmente estável em H.

Prova: Ver [34]. $\square$

Por fim, vamos terminar esta seção, com o seguinte lema técnico.

Lema 2.15. *Suponha A anti-autoadjunto. Então, para dados $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$, defina o operador*

$$D_{\lambda,\varepsilon}\varphi = \int_0^\varepsilon e^{-2\lambda t} S(-t)BB^*S^*(t)\varphi \, dt.$$

Então $D_{\lambda,\varepsilon} \in \mathcal{L}(H, H)$ é autoadjunto e possui inversa limitada. Além disso, para qualquer $\phi \in D(A^*)$, temos que

$$\frac{d}{dt}(W^*(t)\phi, D_{\lambda,\varepsilon}W^*(t)\phi)_H = -\left\|e^{-\lambda\varepsilon}B^*S^*(-\varepsilon)W^*(t)\phi\right\|_U^2 - \|B^*W^*(t)\phi\|_U^2,$$

onde $W(t)$ é um grupo fortemente contínuo, gerado pelo operador $A + \lambda I - BB^*D_{\lambda,\varepsilon}^{-1}$.

Prova: Ver [41]. $\square$

3 EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES LINEAR

Neste capítulo consideraremos o sistema linear

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} = f, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.1}$$

com condições de contorno periódicas, onde através da função controle f, obteremos resultados de controlabilidade exata e estabilização.

De agora em diante, denotaremos produto interno usual de $L^2(\mathbb{T})$ por $(\cdot,\cdot)_0$, e a norma de $H^s(\mathbb{T})$ por $\|\cdot\|_s$, para $s \geq 0$. Definimos os espaços

$$H_0^s(\mathbb{T}) = \{u \in H^s(\mathbb{T}); [u] = 0\} \quad \text{e} \quad L^2(\mathbb{T}) = \left\{u \in L^2(\mathbb{T}); [u] = 0\right\},$$

onde $[u]$, denominado de valor médio de u, é dado por

$$[u] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(x)dx.$$

Além disso, $X \lesssim Y$ denota que $X \leq CY$, para alguma constante $C > 0$, e $X \sim Y$ denota que $X \lesssim Y$ e $Y \lesssim X$.

3.1 Controle Exato Global

Considere o operador diferencial A, associado a equação KdV, dado por

$$Au = -\partial_{xxx}u - \mu\partial_x u, \tag{3.2}$$

de domínio $H^3(\mathbb{T})$. Pelo Lema 2.14, A é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo no espaço $L^2(\mathbb{T})$, denotado por $W(t)$, onde as autofunções são a base ortonormal de Fourier

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dito isso, observe que

$$\begin{aligned} A\phi_k(x) &= -\partial_{xxx}\phi_k(x) - \mu\partial_x\phi_k(x) \\ &= -(ik)^3\phi_k(x) - \mu(ik)\phi_k(x) \\ &= (ik^3 - i\mu k)\phi_k(x), \end{aligned}$$

isto é, os $\lambda_k = ik^3 - i\mu k$ são os autovalores de A, correspondentes à cada ϕ_k. Similarmente, obtemos também que o operador adjunto $A^* = -A$ é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo em $L^2(\mathbb{T})$, tal que $W^*(t) = W(-t)$.

Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} = Gh, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.3}$$

com condições de contorno periódicas, onde $\mu \in \mathbb{R}$, G é o operador definido em (1.5) e $h : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o novo controle aplicado ao sistema. Note que G é um operador autoadjunto em $L^2(\mathbb{T})$, isto é, $G^* = G$. De fato, para quaisquer $u, v \in L^2(\mathbb{T})$, obtemos

$$\begin{aligned} (u, G^*v)_0 &= (Gu, v)_0 \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(x) \left(\int_{\mathbb{T}} u(x)dx - \int_{\mathbb{T}} g(y)u(y)dy \right) v(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(x)g(x)v(x)dx - \int_{\mathbb{T}} g(x) \left(\int_{\mathbb{T}} g(y)u(y)dy \right) v(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(x)g(x)v(x)dx - \int_{\mathbb{T}} g(x)u(x)dx \int_{\mathbb{T}} g(y)v(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(x)g(x) \left(\int_{\mathbb{T}} v(x)dx - \int_{\mathbb{T}} g(y)v(y)dy \right) dx \\ &= (u, Gv)_0. \end{aligned}$$

A partir disso, temos também, do Teorema 2.4, que G é um operador limitado em $L^2(\mathbb{T})$.

A seguir, mostraremos um resultado de controle exato para o sistema linear (3.3).

Teorema 3.1(Controlabilidade exata). *Sejam $T > 0$ e $s \geq 0$ dados. Então para todo $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$, existe um controle $h \in L^2([0,T]; H_0^s(\mathbb{T}))$ tal que o sistema (3.3) tem uma solução $u \in C([0,T]; H_0^s(\mathbb{T}))$ satisfazendo*

$$u(x,T) = u_1(x).$$

Prova: Por simplicidade, assuma $\mu = 0$, ou seja, consideraremos o sistema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = Gh, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.4}$$

com condições de contorno periódicas, e o operador $A = -\partial_{xxx}$. Deste modo, $\lambda_k = ik^3$ são os autovalores de A, correspondentes às funções $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Os dados inicial u_0 e final u_1 tem suas expansões em série, convergentes em $H^s(\mathbb{T})$, dadas por

$$u_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{j,k}\phi_k(x), \quad u_{j,k} = \int_{\mathbb{T}} u_j(x)\overline{\phi_k(x)}dx, \tag{3.5}$$

para $j = 0, 1$. Considere o sistema associado homogêneo

$$v_t + v_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R},$$

com condições de contorno periódicas, que tem as seguintes soluções

$$v_k(x,t) = e^{\lambda_k t}\phi_k(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $u = u(x,t)$ satisfazendo (3.4) e $h = h(x,t)$, suave e periódica em $\mathbb{T}$, usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx &= \int_{\mathbb{T}} u_t(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx - ik^3\int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}ddx - \int_{\mathbb{T}} u_{xxx}(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\ &\quad - ik^3\int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx + ik\int_{\mathbb{T}} u_{xx}(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\ &\quad - ik^3\int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx - k^2 \int_{\mathbb{T}} u_x(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\
&\quad - ik^3 \int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx + ik^3 \int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\
&\quad - ik^3 \int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}dx.
\end{aligned}
$$

Agora, integrando a igualdade acima, com respeito ao tempo, obtemos

$$
\int_{\mathbb{T}} u(x,T)\overline{v_k(x,T)}dx - \int_{\mathbb{T}} u(x,0)\overline{v_k(x,0)}dx = \int_0^T \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{v_k(x,t)}dxdt. \tag{3.6}
$$

Por densidade, temos que a igualdade acima continua válida se $h \in L^2([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$, para $s \geq 0$. Definindo

$$
\tilde{u}_k = \int_{\mathbb{T}} u(x,T)\overline{\phi_k(x)}dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},
$$

ao multiplicar (3.6) por $e^{\lambda_k T}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$
\tilde{u}_k - e^{\lambda_k T} u_{0,k} = \int_0^T e^{\lambda_k (T-t)} \int_{\mathbb{T}} (Gh)(x,t)\overline{\phi_k(x)}dxdt. \tag{3.7}
$$

Podemos ver que os $\lambda_k = ik^3$ satisfazem as condições do Lema 2.13. De fato, basta notar que

$$
\lambda_{k+1} - \lambda_k = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \geq 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},
$$

e

$$
\lim_{|k|\to\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \infty.
$$

Então definindo $p_k(t) = e^{\lambda_k t}$, podemos ver que o conjunto $\mathcal{P} = \{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Riesz para $\overline{ger[\mathcal{P}]}$, em $L^2(0,T)$. Seja $\mathcal{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{Z}\}$ a única base dual de Riesz para $\mathcal{P}$ em $\overline{ger[\mathcal{P}]}$ tal que

$$
\int_0^T q_j(t)\overline{p_k(t)}dt = \delta_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{Z}, \tag{3.8}
$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker.

Escolhemos o controle h, em (3.4), da forma

$$
h(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j q_j(t)(G\phi_j)(x), \tag{3.9}
$$

onde os coeficientes h_j serão determinados de modo que a série (3.9) convirja apropriadamente. Substituindo (3.9) em (3.7) e usando (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_k - e^{\lambda_k T} u_{0,k} &= \int_0^T e^{\lambda_k (T-t)} \int_{\mathbb{T}} \left(G \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j q_j(t) (G\phi_j)(x) \right) \overline{\phi_k(x)} dx dt \\
&= e^{\lambda_k T} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j \int_0^T e^{-\lambda_k t} q_j(t) \int_{\mathbb{T}} G(G\phi_j)(x) \overline{\phi_k(x)} dx dt \\
&= e^{\lambda_k T} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_j \int_0^T q_j(t) \overline{p_k(t)} dt \int_{\mathbb{T}} G(G\phi_j)(x) \overline{\phi_k(x)} dx \\
&= h_k e^{\lambda_k T} \int_{\mathbb{T}} G(G\phi_k)(x) \overline{\phi_k(x)} dx,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sabemos que G é autoadjunto em $L^2(\mathbb{T})$, então

$$\int_{\mathbb{T}} G(G\phi_k)(x) \overline{\phi_k(x)} dx = \|G\phi_k\|_0^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Do fato que $|\phi_k(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|G\phi_k\|_0^2 &= \int_{\mathbb{T}} \left| g(x) \left(\phi_k(x) - \int_{\mathbb{T}} g(y)\phi_k(y) dy \right) \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 |\phi_k(x)|^2 dx - 2\mathrm{Re} \left(\int_{\mathbb{T}} g(x)^2 \phi_k(x) dx \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y) \overline{\phi_k(y)} dy \right) \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \cdot \left| \int_{\mathbb{T}} g(x)\phi_k(x) dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx - 2\mathrm{Re} \left(\int_{\mathbb{T}} g(x)^2 \phi_k(x) dx \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y) \overline{\phi_k(y)} dy \right) \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \cdot \left| \int_{\mathbb{T}} g(x)\phi_k(x) dx \right|^2 := \alpha_k.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Como $2\pi[g] = 1$ e $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx - 2 \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 \phi_0(x) dx \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y)\phi_0(y) dy + \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \cdot \left| \int_{\mathbb{T}} g(x)\phi_0(x) dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx - \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \cdot \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx - \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx = 0.
\end{aligned}$$

Como $g(x)$ só assume valores reais, vemos que em qualquer intervalo $g(x)\phi_k(x)$ não pode ser um múltiplo constante de $g(x)$, assim de (3.11) temos que $\alpha_k > 0$, se $k \in \mathbb{Z}^*$. Pela Proposição

2.1, segue que

$$\int_{\mathbb{T}} g(x)\phi_k(x)dx = \sqrt{2\pi}\hat{g}(k) \to 0,$$

quando $|k| \to \infty$. Então, novamente de (3.11), vemos que

$$\lim_{|k|\to\infty} \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx \neq 0. \tag{3.12}$$

Observe que de (3.10), temos que $\tilde{u}_0 = u_{0,0} = u_{1,0}$, pois $\alpha_0 = 0$ e a massa dos sistema é conservada. Veja também que de (3.12), unido ao fato que $\alpha_k > 0$, se $k \in \mathbb{Z}^*$, temos que existe um $\gamma > 0$ tal que

$$\alpha_k > \frac{1}{\gamma}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*.$$

Definindo $h_0 = 0$ e

$$h_k = \frac{e^{-\lambda_k T}u_{1,k} - u_{0,k}}{\alpha_k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \tag{3.13}$$

temos de (3.10) que $\tilde{u}_k = u_{1,k}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $u(x,T) = u_1(x)$.

Dados $u_0, u_1 \in H^s(\mathbb{T})$, resta mostrar que h definido por (3.9) e (3.13) está no espaço $L^2([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$. Para isso, consideraremos

$$G\phi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{jk}\phi_j(x), \tag{3.14}$$

onde

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{T}} G\phi_j(x)\overline{\phi_k(x)}dx, \quad \forall\, j,k \in \mathbb{Z}.$$

Deste modo,

$$h(x,t) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} h_j a_{jk} q_j(t)\phi_k(x).$$

Então, do Lema 2.13, temos que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^2([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))} &= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{jk}h_j q_j(t) \right|^2 dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \int_0^T \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{jk}h_j q_j(t) \right|^2 dt \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_j|^2 |a_{jk}|^2 \\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_j|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |a_{jk}|^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
|a_{jk}| &= |(G\phi_j, \phi_k)_0| \\
&= \left| \int_{\mathbb{T}} g(x) \left(\phi_j(x) - \int_{\mathbb{T}} g(y)\overline{\phi_j(y)}dy \right) \overline{\phi_k(x)}dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{T}} g(x)\phi_j(x)\overline{\phi_k(x)}dx - \int_{\mathbb{T}} g(x)\overline{\phi_k(x)}dx \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y)\overline{\phi_j(y)}dy \right| \\
&= |(g\phi_j, \phi_k)_0 - (g, \phi_k)_0 (g, \phi_j)_0| \\
&= \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(\phi_m\phi_j, \phi_k)_0 - \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(\phi_m, \phi_k)_0 \right) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(\phi_m, \phi_j)_0 \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{k-j} - g_k g_j \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |g_{k-j}| + |g_k g_j|,
\end{aligned}
$$

onde

$$
g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \phi_m(x).
$$

Logo,

$$
|a_{jk}|^2 \leq C(|g_{k-j}|^2 + |g_k|^2|g_j|^2).
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |a_{jk}|^2 &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |g_{k-j}|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |g_j|^2 |g_j|^2 \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k+j|)^{2s} |g_k|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |g_k|^2 |g_j|^2 \\
&\lesssim (1+|j|)^{2s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |g_k|^2 + |g_j|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} |g_k|^2 \\
&\lesssim \left((1+|j|)^{2s} + |g_j|^2 \right) \|g\|_s^2.
\end{aligned}
$$

Por fim, de (3.13), (3.15) e da desigualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^2([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))} &\lesssim \|g\|_s^2 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \left((1+|j|)^{2s} + |g_j|^2 \right) |h_j|^2 \right) \\
&\lesssim \|g\|_s^2 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \left((1+|j|)^{2s} + |g_j|^2 \right) \frac{|e^{\lambda_j T} u_{1,j} - u_{0,j}|^2}{|\alpha_j|^2} \right) \\
&\lesssim \gamma^2 \|g\|_s^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} (1+|j|)^{2s} \left(|u_{1,j}|^2 + |u_{0,j}|^2 \right)
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \gamma^2 \|g\|_s^2 (\|u_1\|_s^2 + \|u_0\|_s^2),$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.1. *Sejam $T > 0$ e $s \geq 0$ dados. Existe um operador linear limitado*

$$\Phi : H_0^s(\mathbb{T}) \times H_0^s(\mathbb{T}) \mapsto L^2([0,T]; H_0^s(\mathbb{T}))$$

tal que para qualquer $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$,

$$W(T)u_0 + \int_0^T W(T-t)G(\Phi(u_0,u_1))(t)dt = u_1$$

e

$$\|\Phi(u_0,u_1)\|_{L^2([0,T];H^s(\mathbb{T}))} \leq C(\|u_0\|_s + \|u_1\|_s),$$

onde $C > 0$ depende apenas de T e g.

Prova: Para quaisquer $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$ dados, as equações (3.9), (3.13) e (3.14) definem o operador

$$h = \Phi(u_0, u_1),$$

e o resultado segue. □

Corolário 2.2 (Observabilidade). *Seja $T > 0$ dado. Existe um $c > 0$ tal que*

$$\int_0^T \|GW(t)\phi\|_0^2 \geq c\|\phi\|_0^2$$

para qualquer $\phi \in L_0^2(\mathbb{T})$.

Prova: Ver [37]. □

3.2 Estabilização Global

Nesta seção, consideraremos o sistema

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} = -GG^*u, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.16}$$

com condições de contorno periódicas, onde foi aplicado o amortecimento $h(x,t) = -G^*u(x,t)$, de tal forma que o sistema é agora dissipativo. De fato, primeiro observemos que

$$\int_{\mathbb{T}} \mu u_x(x,t)u(x,t)dx = \frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{d}{dx}\left(u(x,t)^2\right)dx = \frac{\mu}{2}\left(u(2\pi,t)^2 - u(0,t)^2\right) = 0,$$

e também que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} u_{xxx}(x,t)u(x,t)dx &= u_{xx}(2\pi,t)u(2\pi,t) - u_{xx}(0,t)u(0,t) - \int_{\mathbb{T}} u_{xx}(x,t)u_x(x,t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{d}{dx}\left(u_x(x,t)^2\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(u_x(2\pi,t)^2 - u_x(0,t)^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Então, multiplicando o sistema (3.16) por u, e integrando no espaço, obtemos

$$\int_{\mathbb{T}} (u_t + \mu u_x + u_{xxx})(x,t)\cdot u(x,t)dx = -\int_{\mathbb{T}} GGu(x,t)\cdot u(x,t)dx.$$

E assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_0^2 = -\|Gu\|_0^2 \leq 0. \tag{3.17}$$

A proposição seguinte, nos diz que o sistema (3.16) é exponencialmente estável.

Proposição 3.1 (Estabilização exponencial). *Seja $s \geq 0$ dado. Existe uma constante $\kappa > 0$, independente de s, tal que para qualquer $w_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$, a solução w correspondente a* (3.16) *satisfaz*

$$\|w(\cdot,t)\|_s \leq C^{-\kappa t}\|w_0\|_s, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de s.

Prova: Primeiro, assuma $s = 0$. Novamente, por simplicidade na demonstração, consideraremos o operador $A = -\partial_{xxx}$ e o sistema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = -GG^*u, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Fixe $w_0 \in L_0^2(\mathbb{T})$, e seja w a solução de (3.18). Pelo Teorema 3.1, podemos escolher um controle $f \in L^2([0,T]; L_0^2(\mathbb{T}))$ tal que a solução v do sistema

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} = Gf, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.19}$$

satisfaz

$$v(x,T) = w(x,T).$$

Deste modo, note que $\|v(x,0)\|_0 = 0$. Então, pelo Corolário 3.1, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \leq C_1 \|v(\cdot,T)\|_0 = C_1 \|w(\cdot,T)\|_0. \tag{3.20}$$

Pelo Corolário 3.1, observe que v é da forma

$$v(x,t) = \int_0^t W(t-\tau) G f(x,\tau) d\tau. \tag{3.21}$$

Pela desigualdade de Hölder, de (3.20), (3.21) e do fato que G é um operador limitado em $L^2(\mathbb{T})$, para qualquer $t \in [0,T]$, segue que

$$\begin{aligned}
\|v(\cdot,t)\|_0^2 &= \left\| \int_0^t W(t-\tau) G f(\cdot,\tau) d\tau \right\|_0^2 \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^t W(t-\tau) G f(\cdot,\tau) d\tau \right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^t \left(W(t-\tau) G f(\cdot,\tau) \right)^2 d\tau \right) \left(\int_0^t 1^2 d\tau \right) dx \\
&= t \|W(t-\tau) G f\|_{L^2(0,t;L^2(\mathbb{T})}^2 \\
&\leq T C_2 \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))}^2 \\
&\leq C_3 \|w(\cdot,T)\|_0^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Integrando (3.17) em relação ao tempo, obtemos

$$\int_{\mathbb{T}} w(x,T)^2 dx - \int_{\mathbb{T}} w(x,0)^2 dx = -\int_0^T \int_{\mathbb{T}} (GGw(x,t)) w(x,t) dx dt. \tag{3.23}$$

Analogamente, temos também

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} w(x,T)^2 dx &= \int_{\mathbb{T}} w(x,T) v(x,T) dx - \int_{\mathbb{T}} w(x,0) v(x,0) dx \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}} w(x,t) (Gf)(x,t) dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{T}} (GGw)(x,t) v(x,t) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}} (Gw)(x,t) (f(x,t) - Gv(x,t)) dx dt \\
&\leq \|Gw\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \|f - Gv\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

De (3.20) e (3.22), podemos ver que existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\|f - Gv\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \leq C_4 \|w(\cdot, T)\|_0^2. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.24), obtemos

$$\|w(\cdot, T)\|_0^4 \leq C_4 \|Gw\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \|w(\cdot, T)\|_0^2,$$

isto é,

$$\|Gw\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \geq \frac{1}{C_4} \|w(\cdot, T)\|_0^2. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.23), temos

$$\|w(\cdot, T)\|_0^2 - \|w(\cdot, 0)\|_0^2 = -\|Gw\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \leq -\frac{1}{C_4} \|w(\cdot, T)\|_0^2,$$

o que implica

$$\|w(\cdot, T)\|_0^2 \leq \gamma \|w(\cdot, 0)\|_0^2,$$

onde $\gamma = (1 + \frac{1}{C_4})^{-1}$. Repetindo este argumento sucessivamente nos intervalos $[kT, (k+1)T]$, substituindo w_0 e $w(\cdot, T)$ por $w(\cdot, kT)$ e $w(\cdot, (k+1)T)$, respectivamente, obtemos

$$\|w(\cdot, kT)\|_0^2 \leq \gamma^k \|w(\cdot, 0)\|_0^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

onde $0 < \gamma < 1$. Como $\|w(\cdot, t)\|_0 \leq \|w(\cdot, kT)\|_0$, para todo $t \geq kT$, temos que

$$\|w(\cdot, t)\|_0^2 \leq C e^{-\kappa t} \|w(\cdot, 0)\|_0^2, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C = \frac{1}{\gamma}$ e $\kappa = -\frac{log\gamma}{T}$. Assim, provamos o caso $s = 0$.

Agora, seja $s = 3$. Tome $v \in H_0^3(\mathbb{T})$ e seja v a solução de (3.16) correspondente. Definindo $w = v_t$, observe que w é solução do sistema

$$\begin{cases} w_t + \mu w_x + w_{xxx} = -GG^* w, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $w_0(x) = -v_0'''(x) - \mu v_0'(x) - GG^* v_0(x)$.

Note que $w_0 \in L_0^2(\mathbb{T})$. De fato, é fácil ver que $w_0 \in L^2(\mathbb{T})$, então basta notar que

$$[v_0'''] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v_0'''(x) dx = \frac{1}{2\pi} (v_0''(2\pi) - v''(0)) = 0,$$

$$[\mu v_0'] = \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v_0'(x)dx = \frac{\mu}{2\pi}(v_0(2\pi) - v_0(0)) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}[GGv_0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} GGv_0(x)dx = \int_{\mathbb{T}} g(x)\left(Gv_0(x) - \int_{\mathbb{T}} Gv_0(y)g(y)dy\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(x)Gv_0(x)dx - \int_{\mathbb{T}} Gv_0(y)g(y)dy = 0.\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o caso $s = 0$ em w, temos que

$$\|v_t(\cdot,t)\|_0 = \|w(\cdot,t)\|_0 \leq C_0 e^{-\kappa t}\|w_0\|_0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Assim, do fato que $w = -GG^*v - \mu v_x - v_{xxx}$, obtemos

$$\|v(\cdot,t)\|_3 \leq C_3 e^{-\kappa t}\|v_0\|_3, \quad \forall\, t \geq 0,$$

e provamos o caso $s = 3$.

Por fim, o caso $0 < s < 3$, segue usando interpolação. Seja $0 < \theta < 1$, tomando $s_1 = 0$ e $s_2 = 3$ no Teorema 2.9, para qualquer $s = 3\theta$, temos a interpolação

$$\left[L^2(\mathbb{T}), H^3(\mathbb{T})\right]_\theta = H^s(\mathbb{T}).$$

Os outros casos de s seguem de forma similar, provando assim o resultado. □

Para a prova do próximo resultado o seguinte lema técnico será necessário.

Lema 3.1. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. Seja T_f o operador multiplicação por f. Defina $[D^s, T_f] = D^sT_f - T_fD^s$. Então $[D^s, T_f]$ leva $H_0^r(\mathbb{T})$ em $H_0^{r-s+1}(\mathbb{T})$.*

Prova: Nesta demonstração faremos uso da notação

$$|k|_* = \begin{cases} |k| & se\ k \neq 0, \\ 1 & se\ k = 0. \end{cases}$$

Seja $u \in H_0^r(\mathbb{T})$, então da definição de D^s, temos que

$$\mathcal{F}_x(D^s(T_fu))(n) = |n|_*^s\mathcal{F}_x(T_fu)(n) = |n|_*^s(\hat{f} * \hat{u})(n) = |n|_*^s\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n-k)\hat{u}(k).$$

Similarmente, temos também que

$$\mathcal{F}_x(T_f(D^s u))(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)|k|_*^s \hat{u}(k).$$

E assim,

$$\mathcal{F}([D^s, T_f]u)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)(|n|_*^s - |k|_*^s)\hat{u}(k).$$

Do fato que $n^s - k^s = (n-k)(n^{s-1} + n^{s-2}k + \cdots + nk^{s-2} + k^{s-1})$, segue que

$$|n|_*^s - |k|_*^s \lesssim |n-k| \left(|n|_*^{s-1} + |k|_*^{s-1}\right).$$

Logo,

$$|\mathcal{F}_x([D^s, T_f]u)(n)| \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left|\hat{f}(n-k)\right| |n-k| \left(|n|_*^{s-1} + |k|_*^{s-1}\right) |\hat{u}(k)|.$$

Usando que $|n|_*^{2\rho} \lesssim |n-k|_*^{2|\rho|}|k|_*^{2\rho}$ para qualquer $\rho \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_x([D^s, T_f]u)(n)\|_{r-s+1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|_*^{2(r-s+1)} \left| |n|_*^s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)\hat{u}(k) \right|^2 \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|_*^{2(r-s+1)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |n|_*^{s-1}|\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|_*^{2(r-s+1)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |k|_*^{s-1}|\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|_*^{2r} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|_*^{2(r-s+1)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |k|_*^{s-1}|\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |n-k|_*^{|r|}|k|_*^r \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |n-k|_*^{|r-s+1|}|k|_*^r \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right| |\hat{u}(k)| \right)^2 \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Em seguida, daremos uma estimativa para I_1. Por Cauchy-Schwartz, temos

$$I_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |n-k|_*^{\frac{|r|}{2}+\frac{|r|}{2}} \left|\hat{f}(n-k)(n-k)\right|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} |k|_*^r|\hat{u}(k)| \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |n-k|_*^{|r|} \left| \hat{f}(n-k)(n-k) \right| \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |n-k|_*^{|r|} \left| \hat{f}(n-k)(n-k) \right| |k|_*^{2r} |\hat{u}(k)|^2 \right) \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|_*^{|r|} \left| k\hat{f}(k) \right| \right)^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|_*^{2r} |\hat{u}(k)|^2 \right) \\
&\leq C\|u\|_r^2,
\end{aligned}
$$

onde C depende apenas de f. De forma análoga estimamos I_2 e o resultado está provado. $\square$

Agora, mostraremos um resultado de decaimento envolvendo o operador L_λ definido a seguir. Para $\lambda > 0$, defina

$$
L_\lambda \varphi = \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) G G^* W^*(-\tau) \varphi d\tau,
$$

para qualquer $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$. Para $\lambda = 0$, definimos $L_0 = I$.

Deste modo, L_λ é um operador linear limitado de $H^s(\mathbb{T})$ em $H^s(\mathbb{T})$. Agora, note que

$$
\begin{aligned}
(L_\lambda\varphi, \varphi)_0 &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) G G W^*(-\tau) \varphi d\tau \varphi dx \\
&= \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} \left(\int_{\mathbb{T}} W(-\tau) G G W^*(-\tau) \varphi \cdot \varphi dx \right) d\tau \\
&= \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} (W(-\tau) G G W^*(-\tau)\varphi, \varphi)_0 d\tau \\
&= \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} |G W^*(-\tau)\varphi|_0^2 d\tau \geq 0,
\end{aligned}
$$

e também que

$$
\begin{aligned}
(L_\lambda\varphi, \phi)_0 &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) G G W^*(-\tau) \varphi d\tau \phi dx \\
&= \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} (W(-\tau) G G W^*(-\tau)\varphi, \phi)_0 d\tau \\
&= \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} (\varphi, W(-\tau) G G W^*(-\tau)\phi)_0 d\tau \\
&= (\varphi, L_\lambda \phi)_0.
\end{aligned}
$$

Isto é, L_λ é um operador positivo autoadjunto em $L_0^2(\mathbb{T})$. De forma similar obtemos o mesmo para sua inversa L_λ^{-1}. Portanto, L_λ é um isomorfismo de $L_0^2(\mathbb{T})$ em $L_0^2(\mathbb{T})$.

No lema a seguir, veremos que o mesmo vale em $H_0^s(\mathbb{T})$.

Lema 3.2. *L_λ é um isomorfismo de $H_0^s(\mathbb{T})$ em $H_0^s(\mathbb{T})$, para todo $s \geq 0$.*

Prova: O caso $s = 0$ já foi provado anteriormente. Já sabemos que L_λ leva $H_0^s(\mathbb{T})$ em $H_0^s(\mathbb{T})$. Então basta provar que para qualquer $v \in L_0^2(\mathbb{T})$, se $L_\lambda v \in H_0^s(\mathbb{T})$, então $v \in H_0^s(\mathbb{T})$, ou seja, $D^s v \in H_0^s(\mathbb{T})$.

Pelo Lema 3.1 e pela continuidade de L_λ^{-1} em $L_0^2(\mathbb{T})$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|D^s v\|_0 &= \|L_\lambda^{-1} L_\lambda D^s v\|_0 \\
&\leq C \|L_\lambda D^s v\|_0 \\
&\leq C \left\| \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) G G^* W^*(-\tau) D^s v d\tau \right\|_0 \\
&\leq C \left\| \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) ([GG^*, D^s] + D^s GG) W^*(-\tau) v d\tau \right\|_0 \\
&\leq C \left\| D^s \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) G G^* W^*(-\tau) v d\tau \right\|_0 \\
&\quad + C \left\| D^s \int_0^1 e^{-2\lambda\tau} W(-\tau) [GG^*, D^s] W^*(-\tau) v d\tau \right\|_0 \\
&\leq C \|L_\lambda v\|_s + C_s \|v\|_{s-1}.
\end{aligned}$$

Assim, o resultado segue para $0 \leq s \leq 1$. Por uma indução obtemos o resultado para qualquer $s \geq 0$. □

Agora, aplicando o amortecimento $h = -G^* L_\lambda^{-1} u$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} = -K_\lambda u, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{3.28}$$

com condições de contorno periódicas, onde $K_\lambda = GG^* L_\lambda^{-1}$.

Na proposição seguinte, provamos que o amortecimento aplicado no sistema anterior nos permite tomar uma velocidade de decaimento exponencial arbitrariamente grande.

Proposição 3.2 (Estabilização completa). *Sejam $s \geq 0$ e $\lambda > 0$ dados. Então, para qualquer $v_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$, o sistema (3.28) admite uma única solução $v \in C(\mathbb{R}^+; H^s(\mathbb{T}))$. Além disso, existe uma constante $C_s > 0$, que depende apenas de s, tal que*

$$\|v(\cdot, t)\|_s \leq C_s e^{-\lambda t} \|v_0\|_s,$$

para todo $t \geq 0$.

Prova: Suponha $s = 0$ e considere a seguinte equação

$$v_t = (A + \lambda I - K_\lambda)v.$$

Os operadores $A - K_\lambda$ e $A + \lambda I - K_\lambda$ geram grupos fortemente contínuos $S(t)$ e $T(t)$, respectivamente, em $L^2_0(\mathbb{T})$.

Pelo Lema 2.15, para qualquer $\phi \in L^2_0(\mathbb{T})$, temos

$$\frac{d}{dt}(T^*(t)\phi, L_\lambda T^*(t)\phi)_0 = -\|e^{-\lambda}G^*W^*(-1)T^*(t)\phi\|_0^2 - \|G^*T(t)\phi\|_0^2 \leq 0.$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T^*_\lambda(t)\| \leq C$, para todo $t \geq 0$. Como $T(t) = e^{(A+\lambda I - K_\lambda)t} = e^{\lambda t}S(t)$, segue que

$$\|S(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Então, basta notar que para um dado $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, a solução de (3.28) correspondente é da forma $u(t) = S(t)u_0$. Portanto,

$$\|u(t)\|_0 \leq Ce^{-\lambda t}\|u_0\|_0.$$

Assim, fica provado o caso $s = 0$. De maneira análoga como feito na Proposição 3.1, mostra-se que o resultado se verifica para $s \geq 0$. Fica provado assim o resultado. $\square$

4 ESPAÇOS DE BOURGAIN E PROPAGAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que são essenciais para estabelecer a controlabilidade exata e estabilização para a equação KdV não linear.

4.1 Espaços de Bourgain

Nesta seção vamos introduzir os espaços de Bourgain associados a equação KdV em domínio periódico $\mathbb{T}$, assim como algumas de suas propriedades. Citamos como referências [4], [8], [24], e [42], para maiores detalhes.

Para uma função $u : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotaremos por $\tilde{u}(k,\tau)$ ou $\mathcal{F}(u(x,t))(k,\tau)$ a transformada de Fourier em relação a variável espacial x e a variável temporal t. Por $\hat{u}(k,t)$ ou $\mathcal{F}_x(u(x,t))(k)$ denotaremos a transformada de Fourier em relação à variável espacial, e $\mathcal{F}_t(u(x,t))(\tau)$ denota a transformada em relação a variável temporal. Além disso, definimos

$$\langle\cdot\rangle := 1 + |\cdot| \sim (1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 4.1. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, definimos o operador D^s, em $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, denominado de multiplicador de Fourier, por*

$$\widehat{D^s u}(k) = \begin{cases} |k|^s\hat{u}(k), & se\ k \neq 0, \\ \hat{u}(0), & se\ k = 0. \end{cases}$$

Definição 4.2. *Para $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ periódica, definimos o operador*

$$W(t)u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{it(k^3-\mu k)+ixk}\hat{u}(k),$$

denominado de propagador linear associado ao símbolo da KdV.

Observe que, da definição anterior, qualquer função temporal $\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ comuta com o operador $W(t)$.

Sejam $b, s \in \mathbb{R}$. O espaço de Bourgain $X^{b,s}_{\tau=k^3-\mu k}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, ou simplesmente $X^{b,s}$, associado a equação KdV no toro, é definido como o fecho do espaço das funções de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, munido da norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{X^{b,s}} &= \|\langle k\rangle^s \langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^b \tilde{u}(k,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))} \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k\rangle^{2s}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2b} \big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

O lema a seguir assegura que as soluções do operador KdV pertencem a classe $X^{b,s}$.

Lema 4.1. *Seja $u \in H^s(\mathbb{T})$, para algum $s \in \mathbb{R}$. Para qualquer $\eta(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, existe uma constante $C = C_{b,\eta} > 0$ tal que*

$$\|\eta(t)W(t)u\|_{X^{b,s}} \leq C\|u\|_s.$$

Prova: Primeiro, note que se $n = k$, então

$$\widehat{e^{ixk}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ixk}e^{-ixk}dx = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.$$

Entretanto, para qualquer $n \neq k$, temos que $\widehat{e^{ixn}}(k) = 0$. Com isso, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta(t)W(t)u(x))(k,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}} \left(\eta(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{it(n^3-\mu n)+ixn}\hat{u}(n)\right) e^{-it\tau}e^{-ixk}dtdx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\hat{u}(n)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ixn}e^{-ixk}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\eta(t)e^{it(n^3-\mu n)}e^{-t\tau}dt\right)\right] \\ &= \hat{u}(k)\mathcal{F}_t(\eta(t))(\tau - k^3 + \mu k). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}_t(\eta(t))(\tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, isto é, é de decrescimento rápido, segue que

$$\begin{aligned} \|\eta(t)W(t)u\|^2_{X^{b,s}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \langle k\rangle^{2s}\langle\tau - k^3+\mu k\rangle^{2b}\big|\hat{u}(k)\mathcal{F}_t(\eta(t))(\tau-k^3+\mu k)|^2 d\tau \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\rangle^{2s}|\hat{u}(k)|^2\int_{\mathbb{R}}\langle\tau-k^3+\mu k\rangle^{2b}\big|\mathcal{F}_t(\eta(t))(\tau-k^3+\mu k)|^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\leq C\|u\|_s^2,$$

e o lema está provado. $\square$

Observe que $X^{b,s}$ são espaços de Banach e possuem uma boa interpolação nos índices b e s. Em adição, para $b_1 \leq b_2$ e $s_1 \leq s_2$, obtemos a imersão contínua $X^{b_2,s_2} \hookrightarrow X^{b_1,s_1}$. Além disso, temos a relação de dualidade $(X^{b,s})^* = X^{-b,-s}$. O detalhamento destas propriedades podem ser lidas em [42].

Segue direto da definição que $X^{0,s} = L^2(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}))$. Mais geralmente, para qualquer $u \in X^{b,s}$, temos que

$$\|u\|_{X^{b,s}} = \|W(-t)u\|_{H^b(\mathbb{R},H^s(\mathbb{T}))}.$$

De fato, seja $v(x,t) \coloneqq W(-t)u(x,t)$, então

$$\hat{u}(k,t) = \mathcal{F}_x(W(t)v(x,t))(k) = \mathcal{F}_x\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{it(n^3-\mu n)+ixn}\hat{v}(n,t)\right)(k) = e^{it(k^3-\mu k)}\hat{v}(k,t).$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X^{b,s}} &= \|\langle k\rangle^s\langle\tau - k^3 + \mu k\rangle^b\mathcal{F}_t(e^{it(k^3-\mu k)}\hat{v}(k,t))(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))}\\
&= \|\langle k\rangle^s\langle\tau - k^3 + \mu k\rangle^b\mathcal{F}_t(\hat{v}(k,t))(\tau - k^3 + \mu k)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))}\\
&= \|\langle k\rangle^s\langle\tau\rangle^b\tilde{v}(k,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))}\\
&= \|v\|_{H^b(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 2.7.

Como consequência da definição temos que, para qualquer $r \in \mathbb{R}$, se $u \in X^{b,s}$, então $D^r u \in X^{b,s-r}$. Com efeito, basta notar que $|k|^r \leq \langle k\rangle^r$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}
\|D^r u\|_{X^{b,s-r}} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s-2r}\langle\tau - k^3 + \mu k\rangle^{2b}\left|\widetilde{D^r u}(k,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s-2r}|k|^{2r}\langle\tau - k^3 + \mu k\rangle^{2b}\left|\tilde{u}(k,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s-2r}\langle k\rangle^{2r}\langle\tau - k^3 + \mu k\rangle^{2b}\left|\tilde{u}(k,\tau)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|u\|_{X^{b,s}}.
\end{aligned}$$

Outra propriedade simples de verificação é de que o operador D^r comuta com a derivada ∂_x^m de ordem $m \in \mathbb{N}$, se $k \neq 0$. De fato,

$$\widehat{D^r \partial_x^m u}(k) = |k|^r \widehat{\partial_x^m u}(k) = |k|^r (ik)^m \hat{u}(k) = (ik)^m \widehat{D^r u}(k) = \widehat{\partial_x^m D^r u}(k).$$

Definiremos agora o espaço $X^{b,s}(I)$ como a restrição do espaço $X^{b,s}$ ao intervalo $I \subset \mathbb{R}$, isto é,

$$X^{b,s}(I) = \left\{ u|_{\mathbb{T}\times I} : u \in X^{b,s} \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{X^{b,s}(I)} = \inf \left\{ \|v\|_{X^{b,s}} : v \equiv u \text{ em } \mathbb{T} \times I \ , \ v \in X^{b,s} \right\}.$$

Se $I = (0, T)$, por simplicidade, denotaremos $X^{b,s}(I)$ por $X_T^{b,s}$.

De forma totalmente similar, definimos também os espaços de Bourgain $Y^{b,s}$ e $Z^{b,s} = X^{b,s} \cap Y^{b-\frac{1}{2},s}$, munidos das normas

$$\|u\|_{Y^{b,s}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^s \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^b \big| \tilde{u}(k,\tau) \big| d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

$$\|u\|_{Z^{b,s}} = \|u\|_{X^{b,s}} + \|u\|_{Y^{b-\frac{1}{2},s}}, \tag{4.3}$$

respectivamente.

As seguintes propriedades dos espaços de Bourgain $X_T^{b,s}$ e $Z_T^{b,s}$ podem ser verificadas:

(i) $X_T^{b,s}$ é um espaço de Hilbert;

(ii) Para $b_1 \leq b_2$ e $s_1 \leq s_2$, temos a imersão contínua $X_T^{b_2,s_2} \hookrightarrow X_T^{b_1,s_1}$;

(iii) Para $b_1 < b_2$ e $s_1 < s_2$, temos a imersão compacta $X_T^{b_2,s_2} \overset{c}{\hookrightarrow} X_T^{b_1,s_1}$;

(iv) Para todo $s \in \mathbb{R}$, temos a imersão contínua $Z_T^{\frac{1}{2},s} \hookrightarrow C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$.

Lema 4.2. *Sejam $b, s \in \mathbb{R}$ e $T > 0$ dados. Então:*

(i) Para toda $\phi \in H^s(\mathbb{T})$,

$$\|W(t)\phi\|_{X_T^{b,s}} \lesssim \|\phi\|_s,$$

$$\|W(t)\phi\|_{X_T^{b,s}} \lesssim \|\phi\|_s;$$

(ii) Se $b > \frac{1}{2}$*, para toda* $u \in X_T^{b-1,s}$*,*

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\|_{X_T^{b,s}} \lesssim \|u\|_{X_T^{b-1,s}};$$

(iii) Para toda $u \in Z_T^{-\frac{1}{2},s}$*,*

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \lesssim \|u\|_{Z_T^{-\frac{1}{2},s}}.$$

Prova: A demonstração é semelhante à feita no Lema 4.1, por isso será omitida (para detalhes ver [8, 42]). □

Para a demonstração do próximo lema usaremos a estimativa

$$\left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} c_{k,l} e^{i(kx+lt)} \right\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \lesssim \left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} (1+|l-k^3+\mu k|)^{\frac{2}{3}} |c_{k,l}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4}$$

que pode ser encontrada em [4].

Lema 4.3 (Estimativas do tipo Strichartz). *Valem as seguintes estimativas:*

(i) $\|u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|u\|_{X^{\frac{1}{3},0}}$;

(ii) $\|u\|_{L^4(\mathbb{T}\times(0,T))} \lesssim \|u\|_{X_T^{\frac{1}{3},0}}$.

Prova: Primeiro, note que para quaisquer $f \in L^2(0,1)$ e $g \in L^4(0,1)$, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

e

$$\left| \int_0^1 g(x)dx \right| \leq \left(\int_0^1 |g(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 |1|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} = \left(\int_0^1 |g(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{4.6}$$

Agora, provaremos o item (i). Tome $u \in X^{\frac{1}{3},0}$ escrita na forma

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(k,\tau) e^{i(xk+t\tau)} d\tau.$$

Considere $\tau = l + \theta$, onde $l \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in [0,1)$. Deste modo, podemos escrever

$$u(x,t) = \int_0^1 e^{it\theta} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(k,l+\theta) e^{i(kx+tl)} d\theta.$$

Por (4.4), (4.5) e (4.6), temos que

$$
\begin{aligned}
\|u\|^4_{L^4(\mathbb{T}^2)} &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_0^1 e^{it\theta} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(k, l+\theta) e^{i(kx+tl)} d\theta \right|^4 dxdt \\
&\le \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 \left| e^{it\theta} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(k, l+\theta) e^{i(kx+tl)} \right|^4 d\theta dxdt \\
&\le \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(k, l+\theta) e^{i(kx+tl)} \right|^4 dxdtd\theta \\
&= \int_0^1 \left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(k, l+\theta) e^{i(kx+tl)} \right\|^4_{L^4(\mathbb{T}^2)} d\theta \\
&\le C \int_0^1 \left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} (1+|l-k^3+\mu k|)^{\frac{2}{3}} |\tilde{u}(k, l+\theta)|^2 \right)^2 d\theta \\
&\le C \left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 (1+|l-k^3+\mu k|)^{\frac{2}{3}} |\tilde{u}(k, l+\theta)|^2 d\theta \right)^2 \\
&\le C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{\frac{2}{3}} |\tilde{u}(k,\tau)|^2 d\tau \right)^2 \\
&= C \|u\|^4_{X^{\frac{1}{3},0}}.
\end{aligned}
$$

Resta mostrar o item (ii). Para $T > 0$ dado, escolha $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo $T \le 2\pi N$. Para $u \in X_T^{\frac{1}{3},0}$, tome uma extensão $v \in X^{\frac{1}{3},0}$ de u tal que

$$\|v\|_{X^{\frac{1}{3},0}} \le 2\|u\|_{X_T^{\frac{1}{3},0}}.$$

Então, pelo item (i) e fazendo $r = \frac{t}{N}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|u\|^4_{L^4(\mathbb{T}\times(0,T))} \le \|v\|^4_{L^4(\mathbb{T}\times(0,2\pi p))} &= \int_0^{2\pi N} \int_{\mathbb{T}} |v(x,t)|^4 dxdt = N \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |v(x,tp)|^4 dxdt \\
&= N\|v\|^4_{L^4(\mathbb{T}^2)} \le N \left(C_0 \|v\|_{X^{\frac{1}{3},0}} \right)^4 \le C\|u\|_{X_T^{\frac{1}{3},0}},
\end{aligned}
$$

onde C depende apenas de T. O resultado fica assim demonstrado. $\square$

Lema 4.4. *Sejam $u \in X^{b,s}$ e $\eta(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se $-\frac{1}{2} < b' \le b < \frac{1}{2}$, então para qualquer $0 < T < 1$ e $b > 0$, existe uma constante $C = C_{b,b',\eta} > 0$ tal que*

$$\|\eta(t/T)u\|_{X^{b',s}} \le CT^{b-b'}\|u\|_{X^{b,s}}.$$

Prova: Ver [42]. □

Lema 4.5 (Estimativa bilinear). *Sejam* $0 < T < 1$ *e* $s \geq 0$. *Se* $u, v \in X_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$, *então existem constantes* $C > 0$ *independente de u,v e T, e* $\theta > 0$ *tais que*

$$\|(uv)_x\|_{Z_T^{-\frac{1}{2},s}} \leq CT^\theta \|u\|_{X_T^{\frac{1}{2},s}} \|v\|_{X_T^{\frac{1}{2},s}}.$$

Prova: Por simplicidade nos cálculos, assumiremos $u = v$, $\mu = 0$ e $\langle k \rangle = |k|$. Defina $w := \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$, então

$$\widetilde{w}(k,\tau) \sim k\widetilde{(u^2)}(k,\tau) = k(\tilde{u} * \tilde{u})(k,\tau),$$

e consequentemente

$$|\widetilde{w}(k,\tau)| \leq |k| \sum_{k_1 \neq 0} \int_{\mathbb{R}} (|\tilde{u}(k_1,\tau_1)| \tilde{u}(k-k_1, \tau-\tau_1)|)\, d\tau. \tag{4.7}$$

Defina

$$c(k,\tau) := |k|^s (1 + |\tau - k^3|)^{\frac{1}{2}} |\tilde{u}(k,\tau)|, \tag{4.8}$$

assim

$$\|u\|_{X^{b,s}} = \|c(k,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{T}))}.$$

Primeiro, provaremos a estimativa para $\|w\|_{X^{-\frac{1}{2},s}}$. Por (4.7) e (4.8), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{|k|^s |\widetilde{w}(k,\tau)|}{(1+|\tau-k^3|)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \sum_{k_1 \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|k|^{s+1} |k_1|^{-s} |k-k_1|^{-s} c(k_1,\tau_1) c(k-k_1, \tau-\tau_1)}{(1+|\tau-k^3|)^{\frac{1}{2}} (1+|\tau_1-k_1^3|)^{\frac{1}{2}} (1+|\tau-\tau_1-(k-k_1)^3)|^{\frac{1}{2}}} d\tau \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Lembre-se que por suposição em $\hat{u}(0,t) = 0$, logo $c(0,\tau) = 0$, e assim em (4.9) podemos assumir $k_1 \neq 0$, $k - k_1 \neq 0$ e $k \neq 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \left|(\tau - k^3) - \left[(\tau_1 - k_1^3) + (\tau - \tau_1 - (k-k_1)^3)\right]\right| &= \left|-k^3 + k_1^3 + (k-k_1)^3\right| \\ &= |3k_1(k-k_1)k| \\ &> 2k^2. \end{aligned}$$

Então pelo menos um dos seguintes casos acontece:

(a) $|\tau - k^3| > \frac{1}{2}k^2$;

(b) $|\tau_1 - k_1^3| > \frac{1}{2}k^2$;

(c) $|\tau - \tau_1 - (k-k_1)^3| > \frac{1}{2}k^2$.

Além disso, note que

$$|k|^s \leq 2|k_1|^s|k-k_1|^s. \tag{4.10}$$

Caso (a): Por (a) e (4.10), o lado direito de (4.9) é limitado por

$$\sum_{k_1\neq 0,k}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{c(k_1,\tau_1)c(k-k_1,\tau-\tau_1)}{(1+|\tau_1-k_1^3|)^{\frac{1}{2}}(1+|\tau-\tau_1-(k-k_1)^3)|^{\frac{1}{2}}}\right)d\tau.$$

Defina

$$F(x,t) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{c(m,\lambda)}{(1+|\lambda-m^3|)^{\frac{1}{2}}}e^{i(mx+\lambda t)}\right)d\lambda,$$

e assim,

$$\widetilde{F^2}(k,\tau) = \sum_{k_1\neq 0,k}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{c(k_1,\tau_1)c(k-k_1,\tau-\tau_1)}{(1+|\tau_1-k_1^3|)^{\frac{1}{2}}(1+|\tau-\tau_1-(k-k_1)^3)|^{\frac{1}{2}}}\right)d\tau.$$

Então,

$$\|w\|_{X^{-\frac{1}{2},s}} \leq \left(\sum_{k\neq 0}\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{F^2}(k,\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|F^2\|_{L^2_{loc}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))} \lesssim \|F\|_{L^4_{loc}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T}))},$$

onde para obtermos a estimativa local no tempo, escrevemos $w(x,t)$ como $w(x,t)\psi(t)$, para alguma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Assim, $\widetilde{w}$ e $\widetilde{F^2}$ são escritos como $\widetilde{w}*\widetilde{\psi}$ e $\widetilde{F^2}*\widetilde{\psi}$, respectivamente. Como $\frac{2}{3} < 1$, pela estimativa (4.4), segue que

$$\|F\|_{L^4(\mathbb{T})} \lesssim \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} c(m,\lambda)^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{X^{\frac{1}{2},s}}.$$

As estimativas dos casos (b) e (c), e de $\|w\|_{Y^{-1,s}}$ seguem de forma análoga, e por isso serão omitidas (para detalhes ver [4]). $\square$

A seguir mostraremos algumas propriedade de multiplicação do espaço $X^{b,s}$.

Proposição 4.1. *Sejam $u \in X^{b,s}$ e $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Então $\psi(t)u \in X^{b,s}$. Além disso, se $u \in X_T^{b,s}$, então $\psi(t)u \in X_T^{b,s}$.*

Prova: Vamos primeiro entender como os espaços de Bourgain $X^{b,s}$ se comportam com respeito ao mapa $u(x,t) \mapsto e^{it\tau_0}u(x,t)$, para algum $\tau_0 \in \mathbb{R}$ fixo.

Da desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \tau + \tau_0 - k^3 + \mu k \rangle &= 1 + |\tau + \tau_0 - k^3 + \mu k| \\
&\leq 1 + |\tau_0| + |\tau - k^3 + \mu k| \\
&\leq 1 + |\tau_0| + |\tau - k^3 + \mu k| + |\tau_0||\tau - k^3 + \mu k| \\
&\leq (1 + |\tau_0|)(1 + |\tau - k^3 + \mu k|) \\
&= \langle \tau_0 \rangle \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle.
\end{aligned}$$

Também observe que

$$\mathcal{F}_t(e^{it\tau_0}u(x,t))(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} e^{it\tau_0} u(x,t)dt = \mathcal{F}_t(u(x,t))(\tau - \tau_0).$$

Então, por uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{it\tau_0}u\|_{X^{b,s}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^{2s} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \widetilde{e^{it\tau_0}u}(k,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^{2s} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \tilde{u}(k,\tau - \tau_0) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^{2s} \langle \tau + \tau_0 - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \tilde{u}(k,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^{2s} \langle \tau_0 \rangle^{2b} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \tilde{u}(k,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle \tau_0 \rangle^{b} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle k \rangle^{2s} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \tilde{u}(k,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle \tau_0 \rangle^{b} \|u\|_{X^{b,s}}.
\end{aligned}$$

Em seguida, escrevendo $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau_0}\mathcal{F}_t\psi(\tau_0)d\tau_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)u\|_{X^{b,s}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_t\psi(\tau_0)e^{it\tau_0}u(x,t)d\tau_0 \right\|_{X^{b,s}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_t\psi(\tau_0)| \left(\|e^{it\tau_0}u\|_{X^{b,s}} \right) d\tau_0
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_t \psi(\tau_0)| \, \langle \tau_0 \rangle^b d\tau_0 \right) \|u\|_{X^{b,s}}$$
$$\lesssim \|u\|_{X^{b,s}},$$

pois $\mathcal{F}_t \psi(\tau_0)$ é de decrescimento rápido.

Para obtermos o resultado em $X_T^{b,s}$, tome $v \in X^{b,s}$ uma extensão arbitrária de u, e assim

$$\|\psi u\|_{X_T^{b,s}} \leq \|\psi v\|_{X^{b,s}} \lesssim \|v\|_{X^{b,s}}.$$

Portanto, tomando o ínfimo de todas as v, o resultado segue. □

Da proposição anterior, observamos que não perdemos regularidade nos índices de $X_T^{b,s}$ ao multiplicarmos por uma função $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entretanto, no caso de multiplicação por uma função $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{T})$, pode ser que $\phi(x)u$ não pertença a $X_T^{b,s}$, se $u \in X_T^{b,s}$. Ou seja, temos que lidar com uma perda de regularidade no índice b.

Por exemplo, considere a sequência $u_n(x,t) = \psi(t) e^{inx} e^{i(n^3 - \mu n)t}$, para uma $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Note que (u_n) está uniformemente limitada em $X^{b,0}$ para todo $b > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{X^{b,0}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \tilde{u}_n(k,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \widehat{e^{ixn}}(k) \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)\left(\tau - n^3 + \mu k\right) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau - n^3 + \mu n \rangle^{2b} \left| \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)\left(\tau - n^3 + \mu n\right) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \left| \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)(\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Entretanto, multiplicando a sequência (u_n) pela função e^{ix}, observamos que

$$\begin{aligned}
\|e^{ix} u_n\|_{X^{b,0}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - k^3 + \mu k \rangle^{2b} \left| \widehat{e^{ix(n+1)}}(k) \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)\left(\tau - n^3 + \mu k\right) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau - (n+1)^3 + \mu(n+1) \rangle^{2b} \left| \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)\left(\tau - n^3 + \mu(n+1)\right) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau - 3n^2 - 3n - 1 \rangle^{2b} \left| \mathcal{F}_t\left(\psi(t)\right)(\tau) \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\sim n^{2b} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty,
\end{aligned}$$

e portanto a sequência $(e^{ix}u_n)$ não está limitada nos espaços $X^{b,0}$, para $b>0$. A próxima proposição nos mostra que a multiplicação por e^{ix} é o pior caso na perda de regularidade do índice b.

Proposição 4.2. *Sejam $-1\le b\le 1$ e $s\in\mathbb{R}$. Se $\phi(x)\in C^\infty(\mathbb{T})$ e $u\in X^{b,s}$, então $\phi(x)u\in X^{b,s-2|b|}$. Além disso, se $u\in X_T^{b,s}$ então $\phi(x)u\in X_T^{b,s-2|b|}$.*

Prova: Primeiro, provaremos os casos $b=0$ e $b=1$. Em seguida, estenderemos o resultado para os outros casos de b.

Se $b=0$, vemos que $X^{0,s}=L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))$, então $\phi(x)u\in X^{0,s}$.

Se $b=1$, afirmamos que

$$u\in X^{1,s} \iff u\in L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T})) \text{ e } u_t-Au\in L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T})),$$

com a norma

$$\|u\|^2_{X^{1,s}}=\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))}+\|u_t-Au\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))}. \tag{4.11}$$

Com efeito, basta notar que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{X^{1,s}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\langle\tau-k^3+\mu k\rangle^2\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}(1+|\tau-k^3+\mu k|^2)\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|\tau-k^3+\mu k\big|^2\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|(i\tau+(ik)^3+ik\mu)\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|\tilde{u}(k,\tau)\big|^2d\tau+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\langle k\rangle^{2s}\big|\mathcal{F}\left(u_t-Au\right)(k,\tau)\big|^2d\tau\\
&=\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))}+\|u_t-Au\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}))},
\end{aligned}$$

e a afirmação segue.

Assim, pelo caso $b=0$ e por (4.11), temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi u\|^2_{X^{1,s-2}} &= \|\phi u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}+\|(\phi u)_t-A(\phi u)\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}\\
&\le \|\phi u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}+\|\phi(u_t-Au)\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}+\|[\phi,-A]u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))} + \|u_t - Au\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))}\right) + \|[\phi,-A]u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \|u\|^2_{X^{1,s-2}} + \|[\phi,-A]u\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^{s-2}(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \|u\|^2_{X^{1,s-2}} + C_1\|u\|^2_{X^{0,s}} \\
&\lesssim \|u\|^2_{X^{1,s}},
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade segue da imersão contínua, e a penúltima segue do fato que o operador

$$
\begin{aligned}
[\phi,-A]u &= \phi(-Au) - (-A(\phi)u) \\
&= \phi((\partial_{xxx} + \mu\partial_x)u) - (\phi u)_{xxx} - \mu(\phi u)_x \\
&= \phi u_{xxx} + \mu\phi u_x - \phi u_{xxx} - 3\phi_x u_{xx} - 3\phi_{xx}u_x - \phi_{xxx}u - \mu\phi_x u - \mu\phi u_x \\
&= -3\phi_x u_{xx} - 3\phi_{xx}u_x - \mu\phi_x u - \phi_{xxx}u
\end{aligned}
$$

ser de segunda ordem.

Para provar o resultado para os outros casos de b, utilizaremos interpolação. Note que $X^{b,s}$ pode ser visto como

$$
L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \langle k\rangle^{2s}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2b}\nu\otimes\sigma\right),
$$

onde ν é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e σ é a medida discreta em $\mathbb{Z}$. Assim, segue do Teorema 2.10, que para quaisquer $0<\theta<1$ e $s = s_1(1-\theta)+s_2\theta$,

$$
\begin{aligned}
[X^{0,s_1}, X^{1,s_2}]_\theta &\approx \left[L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \langle k\rangle^{2s_1}\nu\otimes\sigma\right), L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \langle k\rangle^{2s_2}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2}\nu\otimes\sigma\right)\right]_\theta \\
&\approx L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \langle k\rangle^{2s_1(1-\theta)}\langle k\rangle^{2s_2\theta}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2\theta}\nu\otimes\sigma\right) \\
&\approx L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \langle k\rangle^{2s}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2\theta}\nu\otimes\sigma\right) \\
&\approx X^{\theta,s}.
\end{aligned}
$$

Até o momento, provamos que a multiplicação por $\phi(x)$ leva $X^{0,s}$ em si mesmo, e leva $X^{1,s}$ em $X^{1,s-2}$. Então para qualquer $0\le b\le 1$, a multiplicação por ϕ leva $[X^{0,s}, X^{1,s}]_b = X^{b,s}$ em $[X^{0,s}, X^{1,s-2}]_b = X^{b,s(1-b)+(s-2)b} = X^{b,s-2b}$, e temos uma perda de $2b$ na regularidade.

Agora, por dualidade, concluímos também que a multiplicação por ϕ leva $(X^{b,s-2b})^* = X^{-b,-s+2b}$ em $(X^{b,s})^* = X^{-b,-s}$, para qualquer $0\le b\le 1$. Do fato que $s\in\mathbb{R}$ é arbitrário, vemos que vale para $-1 \leq b \leq 0$, com uma perda de $-2b$ na regularidade. Portanto, o resultado segue para $X^{b,s}$.

Por fim, provamos o resultado nos espaços restrição $X_T^{b,s}$. Seja $u \in X_T^{b,s}$, e tome $v \in X^{b,s}$ uma extensão de u. Então

$$\|\phi u\|_{X_T^{b,s-2|b|}} \leq \|\phi v\|_{X^{b,s-2|b|}} \lesssim \|v\|_{X^{b,s}}.$$

Logo, tomando o ínfimo sobre as funções v, o resultado segue. □

4.2 Propagação de Compacidade e de Regularidade

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades de propagação de compacidade e de regularidade para a equação KdV inspirados pelo que foi feito por Laurent, em [24], para a equação de Schrödinger em domínio periódico $\mathbb{T}$. Tais propriedades serão de extrema importância na estabilização do caso não linear da equação KdV.

Consideremos o operador diferencial linear

$$L = \partial_t + \mu\partial_x + \partial_{xxx},$$

associado a equação KdV. Assim, o primeiro resultado que provaremos é a propagação de compacidade.

Proposição 4.3 (Propagação de compacidade). *Sejam $0 \leq b' \leq b \leq 1$ e $T > 0$ dados, com $b > 0$. Suponha que $u_n \in X_T^{b,0}$ e $f_n \in X_T^{-b,-2+2b}$ satisfazem:*

(i) $Lu_n = f_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{X_T^{b,0}} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\|u_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}} + \|f_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}} + \|u_n\|_{X_T^{-b',-1+2b'}} \to 0$, *quando* $n \to \infty$;

(iv) Para algum $\Omega \subset \mathbb{T}$ aberto não vazio,

$$u_n \longrightarrow 0 \textit{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então

$$u_n \longrightarrow 0 \textit{ fortemente em } L^2_{loc}((0,T);L^2(\mathbb{T})).$$

Prova: Sejam $\psi \in C_0^\infty((0,T))$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$ funções de valor real. Defina os operadores

$$B \coloneqq \phi(x)D^{-2} \quad \text{e} \quad A \coloneqq \psi(t)B.$$

Então, segue direto da definição que

$$A^* = \psi(t)D^{-2}\phi(x).$$

Para um $0 < \varepsilon \leq 1$ fixo, defina as regularizações

$$B_\varepsilon \coloneqq Be^{\varepsilon \partial_{xx}} \quad \text{e} \quad A_\varepsilon \coloneqq \psi(t)B_\varepsilon,$$

de B e A, respectivamente.

Por um lado, obtemos

$$\begin{aligned}
a_{n,\varepsilon} &\coloneqq ([A_\varepsilon, L]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (A_\varepsilon(Lu_n) - L(A_\varepsilon u_n), u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (A_\varepsilon(\partial_{xxx} + \mu\partial_x)u_n + A_\varepsilon\partial_t u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad - ((\partial_{xxx} + \mu\partial_x)A_\varepsilon u_n + \partial_t A_\varepsilon u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (A_\varepsilon(\partial_{xxx} + \mu\partial_x)u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} + (A_\varepsilon\partial_t u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad - ((\partial_{xxx} + \mu\partial_x)A_\varepsilon u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} - (A_\varepsilon\partial_t u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad - (\psi'(t)B_\varepsilon u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= ([A_\varepsilon, \partial_{xxx} + \mu\partial_x]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} - (\psi'(t)B_\varepsilon u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
a_{n,\varepsilon} &= (A_\varepsilon(Lu_n), u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} - (L(A_\varepsilon u_n), u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (A_\varepsilon f_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} - (A_\varepsilon u_n, L^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (f_n, A_\varepsilon^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} + (A_\varepsilon u_n, Lu_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (f_n, A_\varepsilon^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} + (A_\varepsilon u_n, f_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde foi usado o item (i) e que $L^* = -L$.

Pela desigualdade de Hölder, Proposições 4.1 e 4.2, segue que

$$\begin{aligned}
\left|(A_\varepsilon u_n, f_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &= \left|\int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{A_\varepsilon u}(k,t)\hat{f}(k,t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{b-b}\langle \tau - k^3 + \mu k\rangle^{2-2b-2+2b}\widehat{A_\varepsilon u}(k,t)\hat{f}(k,t)dt\right| \\
&\lesssim \|A_\varepsilon u_n\|_{X_T^{b,2-2b}}\|f_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}} \lesssim \|B_\varepsilon u_n\|_{X_T^{b,2-2b}}\|f_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}} \\
&\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,2-2b-2+2b}}\|f_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}} \lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,0}}\|f_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, pelos itens (ii) e (iii), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\le 1} \left|(A_\varepsilon u_n, f_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| = 0.$$

De forma análoga, podemos ver que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\le 1} \left|(f_n, A_\varepsilon^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| = 0$$

e também que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\le 1} \left|(\psi'(t)B_\varepsilon u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| = 0.$$

Então, de (4.13) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\le 1} |a_{n,\varepsilon}| = 0.$$

Portanto, de (4.12) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\varepsilon\le 1} \left|([A_\varepsilon, \partial_{xxx} + \mu\partial_x]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| = 0.$$

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \left|([A, \partial_{xxx} + \mu\partial_x]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| = 0.$$

Como o operador D^{-2} comuta com ∂_x, temos que

$$\begin{aligned}
[A, \partial_{xxx} + \mu\partial_x] = -3\psi(t)\phi_x(x)\partial_{xx}D^{-2} - 3\psi(t)\phi_{xx}(x)\partial_x D^{-2} \\
- \psi(t)(\phi_{xxx}(x) + \mu\phi_x(x))D^{-2}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Estimando o terceiro termo da igualdade acima, da mesma forma que fizemos em (4.14), segue que

$$\left|(\psi(t)(\phi_{xxx}(x) + \mu\phi_x(x))D^{-2}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,0}}\|u_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}},$$

e novamente de (ii) e (iii),

$$\lim_{n\to\infty}(\psi(t)(\phi_{xxx}(x)+\mu\phi_x(x))D^{-2}u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}=0.$$

Note que estimando o segundo termo de (4.15), usando as mesmas estimativas para o índice b, a perda de regularidade seria muito grande. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned}\left|(\psi(t)\phi_{xx}(x)\partial_x D^{-2}u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,2-2b-2+2b+1}}\|u_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}}\\ &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,1}}\|u_n\|_{X_T^{-b,-2+2b}},\end{aligned}$$

onde não temos controle sobre a norma de u_n no espaço $X_T^{b,1}$. Entretanto, estimando sobre o índice b', nós temos que

$$\begin{aligned}\left|(\psi(t)\phi_{xx}(x)\partial_x D^{-2}u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b',1-2b'}}\|u_n\|_{X_T^{-b',-1+2b'}}\\ &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b',1-2b'-2+2b'+1}}\|u_n\|_{X_T^{-b',-1+2b'}}\\ &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b',0}}\|u_n\|_{X_T^{-b',-1+2b'}}\\ &\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,0}}\|u_n\|_{X_T^{-b',-1+2b'}},\end{aligned}$$

pois $X^{b,0}\hookrightarrow X^{b',0}$, já que $b'\leq b$. Logo,

$$(\psi(t)\phi_{xx}(x)\partial_x D^{-2}u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\to 0,$$

quando $n\to\infty$. Agora, para o primeiro termo de (4.15), note que

$$\mathcal{F}_x(-\partial_{xx}D^{-2}u)(k)=-(ik)^2|k|^{-2}\hat{u}(k)=\hat{u}(k),$$

ou seja, $-\partial_{xx}D^{-2}$ é uma projeção ortogonal, no subespaço das funções com $\hat{u}(0)=0$. Então, pelo Lema de 2.2, combinado ao fato que $b>0$, temos que $\hat{u}_n(0,t)\to 0$ fortemente em $L^2(0,T)$, e portanto

$$(\psi(t)\phi_x\hat{u}_n(0,t),u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\to 0,$$

quando $n\to\infty$. Assim, concluímos que para quaisquer $\psi(t)\in C_0^\infty((0,T))$ e $\phi(x)\in C^\infty(\mathbb{T})$,

$$(\psi(t)\phi_x u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\to 0, \tag{4.16}$$

quando $n \to \infty$. Observe que para uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$, existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$ tal que $\varphi = \phi_x$, se e somente se, $\int_{\mathbb{T}} \varphi(x)dx = 0$. De fato, para a condição suficiente, basta notar que

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{T}} \phi_x(x)dx = \phi(2\pi) - \phi(0) = 0.$$

Já para a condição necessária, defina

$$\phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Deste modo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é fácil ver que $\phi_x = \varphi$ e que $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$.

Logo, para qualquer $\chi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ e qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{T}$, a função $\varphi(x) = \chi(x) - \chi(x - x_0)$ pode ser escrita como $\varphi = \phi'$ par alguma $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$. Assim, pelo item (iv) temos que

$$\lim_{n\to\infty} (\psi(t)\chi u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} = 0.$$

Então, do limite acima e de (4.16), temos também que

$$\lim_{n\to\infty} (\psi(t)\chi(\cdot - x_0)u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} = 0.$$

Por fim, basta construir uma partição da unidade em $\mathbb{T}$ envolvendo as funções do tipo $\chi_i(\cdot - x_i)$, onde $\chi_i \in C_0^\infty(\mathbb{T})$ e $x_i \in \mathbb{T}$, para obter que

$$\lim_{n\to\infty} (\psi(t)u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} = 0,$$

e o resultado segue. □

Para a prova da propriedade de propagação de regularidade o seguinte lema técnico é necessário. Sua demonstração pode ser encontrada em [24].

Lema 4.7. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ e $\rho_\varepsilon = e^{\varepsilon^2\partial_{xx}}$, onde $0 \le \varepsilon \le 1$. Então, $[\rho_\varepsilon, T_f]$ é um operador uniformemente limitado de $H^s(\mathbb{T})$ em $H^{s+1}(\mathbb{T})$.*

Agora, mostraremos um resultado de propagação de regularidade para o operador da KdV.

Proposição 4.4 (Propagação de regularidade). *Sejam $0 \le b < 1$, $T > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ dados. Seja $f \in X_T^{-b,r}$, e suponha $u \in X_T^{b,r}$ solução da equação*

$$Lu = f.$$

Se existe um $\Omega \subset \mathbb{T}$ aberto não vazio, tal que $u \in L^2_{loc}((0,T), H^{r+\rho}(\Omega))$ para algum

$$0 < \rho \leq \min\left\{1 - b, \frac{1}{2}\right\},$$

então $u \in L^2_{loc}((0,T), H^{r+\rho}(\mathbb{T}))$.

Prova: Seja $s = r + \rho$ e defina $E_n \coloneqq e^{\frac{1}{n}\partial_{xx}}$, para todo $n \in \mathbb{R}$. Considere as sequências de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dadas por

$$u_n = E_n u \quad \text{e} \quad f_n = E_n f,$$

respectivamente. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{X_T^{b,r}} \leq C \quad \text{e} \quad \|f_n\|_{X_T^{-b,r}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sejam $\psi \in C_0^\infty((0,T))$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$ funções de valores reais, e defina os operadores

$$B \coloneqq D^{2s-2}\phi(x) \quad \text{e} \quad A \coloneqq \psi(t)B.$$

Como feito na proposição anterior, temos que

$$\begin{aligned}
&([A, \partial_{xxx} + \mu\partial_x]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} - (\psi'(t)Bu_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (f_n, A^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} + (Au_n, f_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}.
\end{aligned}$$

Assim, novamente pelas Proposições 4.1 e 4.2, segue que

$$\begin{aligned}
\left|(Au_n, f_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\leq \|Au_n\|_{X_T^{b,-r}} \|f_n\|_{X_T^{-b,r}} \lesssim \|Bu_n\|_{X_T^{b,-r}} \|f_n\|_{X_T^{-b,r}} \\
&\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,-r+2s-2+2b}} \|f_n\|_{X_T^{-b,r}} \lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,2r+2\rho-2+2b}} \|f_n\|_{X_T^{-b,r}} \\
&\lesssim \|u_n\|_{X_T^{b,r}} \|f_n\|_{X_T^{-b,r}} \leq C_0,
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue do fato que $X_T^{b,2r+2\rho-2+2b} \hookrightarrow X_T^{b,r}$, pois como por escolha $\rho \leq (1-b)$, então

$$r + 2\rho - 2 + 2b \leq r + 2(1-b) - 2 + 2b = r.$$

Da mesma forma, obtemos as estimativas

$$\left|(f_n, A^* u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_0 \quad \text{e} \quad \left|(\psi'(t)Bu_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_0.$$

Assim, segue que

$$\left|([A, \partial_{xxx} + \mu\partial_x]u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_1. \tag{4.17}$$

Notando que

$$[A, \partial_{xxx} + \mu\partial_x] = -3\psi(t)D^{2s-2}\phi_x\partial_{xx} - 3\psi(t)D^{2s-2}\phi_{xx}\partial_x - \psi(t)D^{2s-2}(\phi_{xxx} + \mu\phi_x), \tag{4.18}$$

e que por escolha $2\rho \leq 1$, obtemos

$$(2s-2) + 1 = 2(r+\rho) - 1 \leq 2r + 1 - 1 = 2r.$$

Deste modo, estimando o segundo termo de (4.18), segue que

$$\begin{aligned}
\left|(\psi(t)D^{2s-2}\phi_{xx}\partial_x u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\leq \|\psi(t)D^{2s-2}\phi_{xx}\partial_x u_n\|_{X_T^{0,-r}}\|u_n\|_{X_T^{0,r}} \\
&\lesssim \|u_n\|_{X^{0,-r+2s-2+1}}\|u_n\|_{X_T^{0,r}} \lesssim \|u_n\|^2_{X_T^{0,r}} \\
&\lesssim \|u_n\|^2_{X_T^{b,r}} \leq C_2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma estimamos o terceiro termo de (4.18),

$$\left|(\psi(t)D^{2s-2}(\phi_{xxx} + \mu\phi_x)u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_2.$$

Portanto, das estimativas acima e de (4.17), obtemos

$$\left|(\psi(t)D^{2s-2}\phi_x\partial_{xx}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_3. \tag{4.19}$$

Agora, para uma $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
(\psi(t)D^{2s-2}\chi^2\partial_{xx}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} &= (\psi(t)D^{s-2}\chi^2\partial_{xx}u_n, D^s u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (\psi(t)D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n, \chi D^s u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad + (\psi(t)[D^{s-2}, \chi]\chi\partial_{xx}u_n, D^s u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&= (\psi(t)D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n, D^s \chi u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad + (\psi(t)D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n, [\chi, D^s]u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))} \\
&\quad + (\psi(t)[D^{s-2}, \chi]\chi\partial_{xx}u_n, D^s u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Do fato que a função χ tem suporte compacto em $\Omega \subset \mathbb{T}$ e das hipóteses, segue que $\chi u \in L^2_{loc}((0,T); H^s(\mathbb{T}))$ e que $\chi\partial_{xx}u \in L^2_{loc}((0,T); H^{s-2}(\mathbb{T}))$. Então, pelo Lema 4.7 e do fato que

$$s - 1 = r + \rho - 1 \leq r,$$

segue que

$$\chi u_n = E_n \chi u + [\chi, E_n]u$$

é uniformemente limitada em $L^2_{loc}((0,T), H^s(\mathbb{T}))$.

Fazendo o mesmo argumento em $\chi\partial_{xx}u_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|(\psi(t)D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n, D^s\chi u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\leq \left\|\psi(t)^{1/2}D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n\right\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{T}))} \\
&\quad \cdot \left\|\psi(t)^{1/2}D^s\chi u_n\right\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \left\|\psi(t)^{1/2}\chi\partial_{xx}u_n\right\|_{L^2((0,T),H^{s-2}(\mathbb{T}))} \\
&\quad \cdot \left\|\psi(t)^{1/2}\chi u_n\right\|_{L^2((0,T),H^s(\mathbb{T}))} \\
&\leq C_4.
\end{aligned}$$

Do Lema 3.1 e do fato que $2\rho - 1 \leq 0$ segue que

$$\begin{aligned}
\left|(\psi(t)D^{s-2}\chi\partial_{xx}u_n, [\chi, D^s]u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &\leq \|D^{r-2}\chi\partial_{xx}u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \\
&\quad \cdot \|D^\rho[\chi, D^s]u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \|u_n\|_{L^2(0,T;H^{r-2+2}(\mathbb{T}))}\|u_n\|_{L^2(0,T;H^{\rho+s-1}(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \|u_n\|_{L^2(0,T;H^r(\mathbb{T}))}\|u_n\|_{L^2(0,T;H^{2\rho+r-1}(\mathbb{T}))} \\
&\lesssim \|u_n\|^2_{L^2(0,T;H^r(\mathbb{T}))} \leq C_5,
\end{aligned}$$

e, da mesma forma

$$\left|(\psi(t)[D^{s-2}, \chi]\chi\partial_{xx}u_n, D^s u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_6.$$

Deste modo, de (4.20) obtemos

$$\left|(\psi(t)D^{2s-2}\chi^2\partial_{xx}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_7.$$

Assim, da estimativa acima e de (4.19), com $\phi_x(x) = \chi^2(x) - \chi^2(x - x_0)$ para algum $x_0 \in \mathbb{T}$, temos que

$$\left|(\psi(t)D^{2s-2}\chi^2(\cdot - x_0)\partial_{xx}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_8.$$

Novamente por partição da unidade, segue que

$$\left|(\psi(t)D^{2s-2}\partial_{xx}u_n, u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| \leq C_9.$$

Por fim, notando que

$$
\begin{aligned}
\left|(\psi(t)D^{2s-2}\partial_{xx}u_n,u_n)_{L^2(\mathbb{T}\times(0,T))}\right| &= \left|\int_0^T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_x(\psi(t)D^{2-2}\partial_{xx}u(x,t))(k)\cdot\hat{u}(k,t)dt\right|\\
&= \left|\int_0^T\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^{2s-2}(ik)^2|\hat{u}(k,t)|^2dt\right|\\
&= \left|\int_0^T\psi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^{2s}|\hat{u}(k,t)|^2dt\right|,
\end{aligned}
$$

o resultado segue pela arbitrariedade da função ψ. □

Corolário 4.1. *Assuma que* $u\in C^\infty(\Omega\times(0,T))$, *onde* $\Omega\subset\mathbb{T}$ *é um aberto não vazio. Se* $u\in X_T^{\frac{1}{2},0}$ *é uma solução da equação não linear*

$$
u_t+\mu u_x+u_{xxx}+uu_x=0 \quad \text{em } \mathbb{T}\times(0,T), \tag{4.21}
$$

então $u\in C^\infty(\mathbb{T}\times(0,T))$.

Prova: Pelo Lema 4.5, temos que $uu_x\in Z_T^{-\frac{1}{2},0}$. Em particular, temos também que $uu_x\in X_T^{-\frac{1}{2},0}$. Tomando $f=-uu_x$ na Proposição 4.4, segue que $u\in L^2_{loc}((0,T);H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}))$. Assim, escolhemos um $t_0\in(0,T)$ tal que $u(t_0)\in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Podemos então resolver a equação (4.21) em $X_T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ com o dado inicial $u(t_0)$. Logo, pela unicidade da solução em $X_T^{\frac{1}{2},0}$, concluímos que $u\in X_T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Repetindo este argumento, agora com $u\in X_T^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ solução de (4.21), vemos que $u\in L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))$ para todo $s\in\mathbb{R}$, e assim $u\in C^\infty(\mathbb{T}\times(0,T))$. □

Lema 4.1 (Continuação única). *Sejam* $T>0$ *e* $\Omega\subset\mathbb{T}$ *aberto não vazio. Se* $u\in C^\infty(\mathbb{T}\times(0,T))$ *é solução do sistema*

$$
\begin{cases}
u_t+\mu u_x+u_{xxx}+uu_x=0 & \text{em } \mathbb{T}\times(0,T),\\
u=0 & \text{em } \Omega\times(0,T),
\end{cases}
$$

então $u=0$ *em* $\mathbb{T}\times(0,T)$.

Prova: Ver [38].

Corolário 4.2. *Sejam* $T>0$ *e* $\Omega\subset\mathbb{T}$ *aberto não vazio. Suponha* $u\in X_T^{\frac{1}{2},0}$ *solução do sistema*

$$
\begin{cases}
u_t+\mu u_x+u_{xxx}+uu_x=0 & \text{em } \mathbb{T}\times(0,T),\\
u=c & \text{em } \Omega\times(0,T),
\end{cases}
$$

onde c é uma constante real. Então $u = c$ *em* $\mathbb{T} \times (0, T)$.

Prova: Pelo Corolário 4.1, obtemos que $u \in C^{\infty}(\mathbb{T} \times (0, T))$. Logo, pelo lema anterior, obtemos que $u = c$ em $\mathbb{T} \times (0, T)$. $\square$

5 EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES NÃO LINEAR

A primeira parte deste capítulo é dedicada à mostrar as propriedades de estabilização do sistema não linear

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} + uu_x = -K_\lambda u, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{5.1}$$

com condições de contorno periódicas, onde $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ e o número real $\lambda \geq 0$ são dados. Por fim, provamos um resultado de controle global exato.

5.1 Boa Colocação

Primeiro, mostraremos uma estimativa nos espaços de Bourgain $Z_T^{\frac{1}{2},s}$, que será necessária na demonstração do próximo teorema.

Lema 5.1. *Sejam $s \geq 0$ e $\lambda \geq 0$ dados. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constate $C = C(\varepsilon)$ tal que*

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)(K_\lambda u)(\tau)d\tau \right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq CT^{1-\varepsilon} \|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}. \tag{5.2}$$

Prova: Fixando $u \in Z_T^{\frac{1}{2},s}$, por definição podemos tomar uma extensão de u a $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$, denotada por v, tal que

$$\|v\|_{Z^{\frac{1}{2},s}} \leq 2\|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}.$$

Agora, escolha uma função $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ suportada em $(-2,2)$ tal que $\eta(t) = 1$ em $[-1,1]$. Pelo item (iii) do Lema 4.2, temos que

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)\eta(\tau/T)^2 (K_\lambda v)(\tau) d\tau \right\|_{Z^{\frac{1}{2},s}} \lesssim \left\| \eta(t/T)^2 K_\lambda v \right\|_{Z^{-\frac{1}{2},s}}.$$

Assim, basta mostrar que

$$\left\| \eta(t/T)^2 K_\lambda v \right\|_{Z^{-\frac{1}{2},s}} \leq C T^{1-\varepsilon} \|v\|_{Z^{\frac{1}{2},s}}. \tag{5.3}$$

Lembre-se que a norma $\|\cdot\|_{Z^{b,s}} = \|\cdot\|_{X^{b,s}} + \|\cdot\|_{Y^{b-\frac{1}{2},s}}$. Estimaremos primeiro o termo na norma de $X^{-\frac{1}{2},s}$. Pelos Lemas 3.2 e 4.4, para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \eta(t/T)^2 K_\lambda v \right\|_{X^{-\frac{1}{2},s}} &\leq \left\| \eta(t/T)^2 K_\lambda v \right\|_{X^{\frac{\varepsilon-1}{2},s}} \leq C T^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \left\| \eta(t/T) K_\lambda v \right\|_{X^{0,s}} \\ &\leq C T^{\frac{1-\varepsilon}{2}} T^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \|K_\lambda v\|_{X^{\frac{1-\varepsilon}{2},s}} \leq C T^{1-\varepsilon} \|K_\lambda v\|_{X^{\frac{1}{2},s}} \leq C^{1-\varepsilon} \|v\|_{X^{\frac{1}{2},s}}. \end{aligned}$$

Deste modo, segue também que

$$\|\eta(t/T)^2 K_\lambda v\|_{Y^{-1,s}} \leq \left\| \eta(t/T)^2 K_\lambda v \right\|_{X^{\frac{\varepsilon-1}{2},s}} \leq C^{1-\varepsilon} \|v\|_{X^{\frac{1}{2},s}}.$$

Portanto, obtemos (5.3) e o lema está provado. □

Em seguida, checamos que o sistema (5.1) está globalmente bem colocado no espaço $H^s(\mathbb{T})$, para qualquer $s \geq 0$.

Teorema 5.1 (Boa colocação). *Sejam $\lambda \geq 0$ e $s \geq 0$ dados. Então para quaisquer $T > 0$ e $u_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$ existe uma única solução $u \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap C([0,T]; L^2(\mathbb{T}))$ de (5.1). Além disso, a seguinte estimativa vale*

$$\|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq \alpha_{T,s}(\|u_0\|_0)\|u\|_s, \tag{5.4}$$

onde $\alpha_{T,s} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não decrescente, que depende apenas de T e s.

Prova: Primeiramente, demonstraremos a existência e a unicidade de uma solução $u \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$ da equação (5.1) para um tempo $T > 0$ suficientemente pequeno.

Seja $u_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$ dado arbitrariamente. Escrevemos o sistema (5.1) na sua forma integral,

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-\tau)(uu_x)(\tau)d\tau - \int_0^t W(t-\tau)(K_\lambda u)(\tau)d\tau, \tag{5.5}$$

onde $W(t) = e^{-t(\partial_{xxx} - \mu\partial_x)}$ é um grupo.

Em seguida, para o estado u_0 fornecido, defina o mapa

$$\Gamma(v) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-\tau)(vv_x)(\tau)d\tau - \int_0^t W(t-\tau)(K_\lambda v)(\tau)d\tau.$$

Deste modo, segue dos itens (i) e (ii) do Lema 4.2, e dos Lemas 4.5 e 5.1 que para quaisquer $v, v' \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$, temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma(v)\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} &\leq C_1\|u_0\|_s + C_2\|vv_x\|_{Z_T^{-\frac{1}{2},s}} + C_3T^{1-\varepsilon}\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \\ &\leq C_1\|u_0\|_s + C_2T^\theta\|v\|^2_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + C_3T^{1-\varepsilon}\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

e da mesma forma, notando que

$$vv_x - v'v'_x = \frac{1}{2}\left((v+v')(v-v')\right)_x,$$

temos também

$$\|\Gamma(v) - \Gamma(v')\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_2T^\theta\|v+v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + C_3T^{1-\varepsilon}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}, \tag{5.7}$$

onde C_1, C_2, C_3 e θ são constantes positivas.

Agora, defina $d \coloneqq 2C_1\|u_0\|_s$ e escolha $T > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$2dC_2T^\theta + C_3T^{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{2}. \tag{5.8}$$

Supondo que $\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq d$ e $\|v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq d$, de (5.6) e (5.7) obtemos

$$\|\Gamma(v)\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_1\|u_0\|_s + C_2T^\theta d^2 + C_3T^{1-\varepsilon}d \leq \frac{d}{2} + d(dC_2T^\theta + C_3T^{1-\varepsilon}) \leq d,$$

e similarmente, segue que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(v) - \Gamma(v')\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} &\leq 2dC_2T^\theta\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + C_3T^{1-\varepsilon}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \\ &\leq (2dC_2T^\theta + C_3T^{1-\varepsilon}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq \frac{1}{2}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}. \end{aligned}$$

Logo, Γ é uma contração na bola $\overline{B(0;d)}$ de $Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$, na norma de $Z_T^{\frac{1}{2},s}$. Então pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, o ponto fixo u de Γ é a solução de (5.1) procurada no espaço $Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$. Da propriedade (iv) dos espaços de Bourgain, segue que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ com

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^s(\mathbb{T}))} \leq C_4\|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_5\|u_0\|_s,$$

por imersão contínua e da definição de d, onde $C_5 \coloneqq 2C_1C_4$. Com isso, provamos a boa colocação local.

Agora, provaremos a existência global de uma solução. Primeiro, assuma que $s = 0$. Lembre-se que $K_\lambda = GG^*L_\lambda^{-1}$. Então a solução u do sistema (5.1) satisfaz

$$\|u(\cdot,t)\|_0^2 - \|u_0\|_0^2 = -\int_0^t (GL_\lambda^{-1}u, Gu)_0(\tau)d\tau, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{5.9}$$

Note que se $\lambda = 0$, então

$$\|u(\cdot,t)\|_0^2 = \|u_0\|_0^2 - \int_0^t \|Gu\|_0^2(\tau)d\tau \leq \|u_0\|_0^2, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Aplicando o Lema de Gronwall em (5.9), temos que

$$\|u(\cdot,t)\|_0^2 \leq e^{Ct}\|u_0\|_0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5.10}$$

onde $T > 0$ satisfaz (5.8) e $C = \|G\|^2\|L_\lambda^{-1}\|$.

Assim, tomando $v_0 = u(x,T)$ como dado inicial do sistema (5.1), pela argumentação anterior, segue que

$$\|u(\cdot,T+t)\|_0 = \|v(\cdot,t)\|_0 \leq e^{Ct}\|v_0\|_0 \leq e^{2Ct}\|u_0\|_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_0^2 \leq e^{Ct}\|u_0\|_0 \quad 0 \leq t \leq 2T.$$

Portanto, iterando o argumento, obtemos a boa colocação global do sistema em $L_0^2(\mathbb{T})$.

A seguir, mostraremos que o sistema está globalmente bem colocado em $H^3(\mathbb{T})$. Suponha u solução suave de (5.1), e defina $v \coloneqq u_t$. Então v é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} v_t + \mu v_x + v_{xxx} + (uv)_x = -K_\lambda u, & x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{5.11}$$

com condições de contorno periódicas, onde $v_0 = -K_\lambda u - u_0''' - \mu u_0' - u_0u_0'$. Para $T > 0$ satisfazendo (5.8), temos que

$$\|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq d = 2C_1\|u_0\|_0.$$

Pelos mesmos cálculos usados em (5.6), obtemos

$$\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq C_1\|u_0\|_0 + (4C_1C_2T^\theta\|u_0\|_0 + C_3T^{1-\varepsilon})\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}},$$

e assim,

$$\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq 2C_1\|v_0\|_0,$$

para um $0 < T < S(\|u_0\|_0)$, onde $S(\cdot)$ é uma função contínua não crescente. Portanto,

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \leq C_4\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq C_5\|v_0\|_0,$$

para $0 < T < S(\|u_0\|_0)$. Pelas desigualdades de Gagliardo-Niremberg e Young, da equação

$$u_{xxx} = -K_\lambda u - v - \mu u_x - uu_x,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_{xxx}\|_0 &\leq \|K_\lambda u\|_0 + \|v\|_0 + \|(\mu + u)u_x\|_0 \\
&\leq C_6\|u\|_0 + \|v\|_0 + C_7\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \|u\|_0\|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&\leq C_6\|u\|_0 + \|v\|_0 + C_8\|u_{xxx}\|_0 + C_9\|u\|_0^{\frac{3}{2}}\|u_{xxx}\|_0^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_6\|u\|_0 + \|v\|_0 + C_8\|u_{xxx}\|_0 + C_{10}\left(\|u\|_0^3 + \|u_{xxx}\|_0\right) \\
&\leq C_{11}\|u_{xxx}\|_0 + \|v_0\|_0 + C_{12}\left(\|u\|_0 + \|u\|_0^3\right),
\end{aligned}$$

para $0 < t < T < S(\|u_0\|_0)$. Consequentemente,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(\mathbb{T}))} \leq \alpha_{T,3}\left(\|u_0\|_0\right)\|u_0\|_3$$

para $T < S(\|u_0\|_0)$.

Isso combinado a (5.10), nos mostra que $u \in C(\mathbb{R}^+; H_0^3(\mathbb{T}))$, e que (5.4) vale para $s = 3$. Para qualquer $s = 3n$, onde $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um resultado semelhante. Para os outros valores de s, a boa colocação global segue da interpolação não linear. □

5.2 Estabilização Local

Nesta seção provaremos um resultado de estabilização exponencial local do sistema (5.1) nos espaços $H^s(\mathbb{T})$. Porém, antes devemos mostrar algumas estimativas para o grupo $W_\lambda(t)$, gerado pelo operador $A - K_\lambda$.

Lema 5.2. *Sejam $s \geq 0$, $\lambda \geq 0$ e $T > 0$ dados. Então:*

(i) Para qualquer $\phi \in H_0^s(\mathbb{T})$,

$$\|W_\lambda(t)\phi\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \lesssim \|\phi\|_s;$$

(ii) Para quaisquer $u, v \in Z_T^{\frac{1}{2},s}$,

$$\left\|\int_0^t W_\lambda(t-\tau)(uv)_x(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \lesssim \|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}.$$

Prova: Definindo $w(t) := W_\lambda(t)\phi$, vemos que a função w é solução do sistema linear (3.28). Então, escrevendo o sistema em sua forma integral, obtemos

$$W_\lambda(t)\phi = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)\left(K_\lambda W_\lambda(\tau)\phi\right)d\tau. \tag{5.12}$$

Deste modo, pelo item (i) do Lema 4.2 e pelo Lema 5.1, temos que

$$\begin{aligned}\|W_\lambda(t)\phi\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} &\leq \|W(t)\phi\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)(K_\lambda W_\lambda(\tau)\phi)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\\ &\leq C\|\phi\|_s + CT^{1-\varepsilon}\|W_\lambda(t)\phi\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}.\end{aligned}$$

Assim, o item (i) segue para $T > 0$ suficientemente pequeno, digamos $T \leq T'$. Para $T > T'$, o resultado segue por uma indução.

Para provar o item (ii), usamos a igualdade

$$\int_0^t W_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t W(t-\tau)f(\tau)d\tau - \int_0^t W(t-\tau)K_\lambda\left(\int_0^\tau W_\lambda(\tau-r)f(r)dr\right)d\tau,$$

que para $f = (uv)_x$, obtemos

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t W_\lambda(t-\tau)(uv)_x(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\\ &\leq \left\|\int_0^t W(t-\tau)(uv)_x(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + \left\|\int_0^t W(t-\tau)K_\lambda\left(\int_0^\tau W_\lambda(\tau-r)(uv)_x(r)dr\right)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\\ &\leq \|(uv)_x\|_{Z_T^{-\frac{1}{2},s}} + CT^{1-\varepsilon}\left\|\int_0^t W_\lambda(t-\tau)(uv)_x(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\\ &\leq CT^\theta\|u\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\|v\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} + CT^{1-\varepsilon}\left\|\int_0^t W_\lambda(t-\tau)(uv)_x(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}},\end{aligned}$$

onde usamos os Lemas 4.2, 4.5 e 5.1. Logo, o item (ii) segue para $T > 0$ suficientemente pequeno, digamos $T \leq T'$. Para $T > T'$, o resultado segue por (i) e por indução. □

Em seguida apresentamos o resultado de estabilização local, com velocidade de decaimento exponencial arbitrariamente grande, devido ao amortecimento $h = -K_\lambda u$ aplicado.

Teorema 5.2 (Estabilização completa local). *Sejam $s \geq 0$ e $0 < \lambda' < \lambda$ dados. Existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $u_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$ com $\|u_0\|_s \leq \delta$, a solução u de* (5.1) *correspondente a u_0, satisfaz*

$$\|u(\cdot, t)\|_s \leq Ce^{-\lambda' t}\|u_0\|_s \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de u_0.

Prova: Seja $u_0 \in H_0^s(\mathbb{T})$ dado. O sistema (5.1) pode ser escrito na sua forma integral equivalente

$$u(t) = W_\lambda(t)u_0 - \int_0^t W_\lambda(t-\tau)(uu_x)(\tau)d\tau. \tag{5.13}$$

Novamente, note que $W_\lambda(t)u_0$ é solução do sistema (3.28). Então, pela Proposição 3.2, para o dado $s \geq 0$, existe uma constante $C = C_s > 0$ tal que

$$\|W_\lambda(t)u_0\|_s \leq Ce^{-\lambda t}\|u_0\|_s, \tag{5.14}$$

para todo $t \geq 0$. Podemos tomar $T > 0$ suficientemente grande, tal que

$$2Ce^{-(\lambda-\lambda')T} \leq 1,$$

isto é,

$$2Ce^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda' t}, \tag{5.15}$$

para todo $t \geq T$. De (5.13), definimos o mapa

$$\Gamma(v) = W_\lambda u_0 - \int_0^t W_\lambda(t-\tau)(vv_x)(\tau)d\tau.$$

Procuramos, então, uma solução u de (5.1), como um ponto fixo do mapa Γ, em alguma bola $B(0;R)$ no espaço $Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L_0^2(\mathbb{T}))$ para a norma de $Z_T^{\frac{1}{2},s}$. No momento, isto será feito supondo que $\|u_0\|_s \leq \delta$, para um $\delta > 0$ pequeno, ainda a ser determinado. Além disso, para garantir a estabilização exponencial com a velocidade de decaimento λ', os valores de δ e R serão tomados de forma que

$$\|u(T)\|_s \leq e^{-\lambda' T}\|u_0\|_s.$$

Pelo Lema 5.2, existem constantes C_1 e C_2, independentes de R e δ, tais que

$$\|\Gamma(v)\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_1\|u_0\|_s + C_2\|v\|^2_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \tag{5.16}$$

e

$$\|\Gamma(v)-\Gamma(v')\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_2\|v+v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}, \tag{5.17}$$

para quaisquer $v, v' \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L_0^2(\mathbb{T}))$. No entanto, como temos $Z_T^{\frac{1}{2},s} \hookrightarrow C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$, existe uma constante $C' > 0$ tal que para todo $v \in B(0;R)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(v)(T)\|_s &\leq \|W_\lambda(T)u_0\|_s + \left\|\int_0^T W_\lambda(T-\tau)(vv_x)(\tau)d\tau\right\|_s \\
&\leq Ce^{-\lambda T}\|u_0\|_s + C'\left\|\int_0^T W_\lambda(T-\tau)(vv_x)(\tau)d\tau\right\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \\
&\leq Ce^{-\lambda T}\|u_0\|_s + C_3\|v\|^2_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \\
&\leq Ce^{-\lambda T}\delta + C_3R^2,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde usamos o item (ii) do Lema 5.2 na segunda desigualdade. Agora, escolhemos $C_4 > 0$ e $R > 0$ de modo que:

(a) $\frac{C_3}{C_4} \leq Ce^{-\lambda T}$;

(b) $(C_1C_4 + C_2)R^2 \leq R$;

(c) $2RC_2 \leq \frac{1}{2}$.

Defina $\delta \coloneqq C_4R^2$. Assim por (a) e (b), usando (5.16), segue que

$$\|\Gamma(v)\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq C_1\delta + C_2R^2 \leq R,$$

e por (c), de (5.17) obtemos

$$\|\Gamma(v)-\Gamma(v')\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq 2RC_2\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq \frac{1}{2}\|v-v'\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}},$$

para todo $v, v' \in B(0;R)$.

Portanto, Γ é uma contração na bola $B(0;R)$ do espaço $Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L_0^2(\mathbb{T}))$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, obtemos seu único ponto fixo $u \in B(0;R)$ e, usando (5.15) e (5.18), concluímos que u satisfaz

$$\|u(T)\|_s = \|\Gamma(u)(T)\|_s \leq Ce^{-\lambda T}\delta + \frac{C_3}{C_4}C_4R^2 \leq Ce^{-\lambda T}\delta + Ce^{-\lambda T}\delta \leq e^{-\lambda' T}\delta.$$

Por fim, assuma que $0 < \|u_0\|_s < \delta$. Trocando δ por $\delta' := \|u_0\|_s$ e R por $R' = (\frac{\delta'}{\delta})^{\frac{1}{2}}R$, temos que

$$\|u(T)\|_s \leq Ce^{-\lambda T}\delta' + C_3\frac{\delta'}{\delta}R^2 \leq Ce^{-\lambda T}\delta' + Ce^{-\lambda T}C_4\frac{\delta'}{\delta}R^2 \leq 2Ce^{-\lambda T}\delta' \leq e^{-\lambda' T}\|u_0\|_s.$$

Indutivamente, obtemos também que $\|u(nT)\|_s \leq e^{-\lambda' nT}\|u_0\|s$. Como $Z_T^{\frac{1}{2},s} \hookrightarrow C([0,T]; H_0^s(\mathbb{T}))$, por propriedade do semigrupo, temos que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_s \leq C_0 e^{-\lambda' t}\|u_0\|_s \quad \forall\, t \geq 0,$$

uma vez que $\|u_0\| \leq \delta$. Finalizamos, assim a demonstração. $\square$

5.3 Estabilização Global

Nesta seção provaremos a estabilização global do sistema (5.1). Primeiro, estabeleceremos este resultado no espaço $L_0^2(\mathbb{T})$, em seguida, estendemos tal resultado para os espaços $H_0^s(\mathbb{T})$, onde $s \geq 0$.

Proposição 5.1 (Desigualdade de observabilidade). *Suponha $\lambda = 0$. Sejam $T > 0$ e $R > 0$ dados. Então existe uma constante $\beta > 1$ tal que, para qualquer $u_0 \in L_0^2(\mathbb{T})$ com*

$$\|u_0\|_0 \leq R_0,$$

a solução correspondente u de (5.1) satisfaz

$$\|u_0\|_0^2 \leq \beta \int_0^T \|Gu\|_0^2(t)dt. \tag{5.19}$$

Prova: Lembre-se que o operador $K_0 = GG^*$. Faremos a demonstração por contradição. Suponha que (5.19) não ocorre. Então, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções do sistema (5.1) no espaço $Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T; L_0^2(\mathbb{T}))$ com

$$\|u_n(0)\|_0 \leq R_0$$

satisfazendo

$$\int_0^T \|Gu_n\|_0^2 dt < \frac{1}{n}\|u_n(0)\|_0^2. \tag{5.20}$$

Como $a_n := \|u_n(0)\|_0 \leq R_0$, podemos escolher uma subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por (a_n), tal que

$$a_n \to a.$$

Dividiremos a demonstração nos dois casos possíveis: $a > 0$ e $a = 0$.

Primeiro caso: $a > 0$

Note que a sequência (u_n) é limitada nos espaços $X_T^{\frac{1}{2},0}$ e $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))$. De fato, pelo Teorema 5.1 temos que

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \leq C_1\|u_n\|_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq C_2 a_n \leq C_2 R_0.$$

Observe também que a sequência $(\partial_x(u_n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço $X_T^{-\frac{1}{2},0}$. Com efeito, pelo Lema 4.5 segue que

$$\|\partial_x(u_n^2)\|_{Z_T^{-\frac{1}{2},0}} \leq C_3\|u_n\|^2_{Z_T^{\frac{1}{2},0}} \leq C_4 R_0^2.$$

Por outro lado, temos a imersão compacta $X_T^{\frac{1}{2},0} \overset{c}{\hookrightarrow} X_T^{0,-1}$. Deste modo, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e pela imersão compacta, podemos extrair uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ fracamente em } X_T^{\frac{1}{2},0}, \text{ e fortemente em } X_T^{0,-1}, \\ &-\frac{1}{2}\partial_x(u_n^2) \to f \text{ fracamente em } X_T^{-\frac{1}{2},0}, \end{aligned}$$

para $u \in X_T^{\frac{1}{2},0}$ e $f \in X_T^{-\frac{1}{2},0}$. Além disso, pelo item (ii) do Lema 4.3, obtemos a imersão contínua $X_T^{\frac{1}{2},0} \hookrightarrow L^4(\mathbb{T}\times(0,T))$. Então, $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\mathbb{T}\times(0,T))$. Ou seja, a sequência $(\partial_x(u_n^2))$ é limitada em

$$L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{T})) = X_T^{0,-1}.$$

Fazendo uma interpolação entre os espaços $X_T^{-\frac{1}{2},0}$ e $X_T^{0,-1}$, obtemos que $(\partial_x(u_n)^2)$ é também limitada nos espaços intermediários

$$X_T^{-\frac{1}{2}(1-\theta)+0\theta,\ 0(1-\theta)-1\theta} = X_T^{-\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2},-\theta},$$

para $0 \leq \theta \leq 1$. Como temos a imersão compacta $X_T^{-\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2},-\theta} \overset{c}{\hookrightarrow} X_T^{-\frac{1}{2},-1}$ para $0 < \theta < 1$, podemos novamente extrair uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que

$$-\frac{1}{2}\partial_x(u_n^2) \to f \text{ fortemente em } X_T^{-\frac{1}{2},-1}.$$

De (5.20), segue que
$$\int_0^T \|Gu_n\|_0^2 dt \to \int_0^T \|Gu\|_0^2 dt = 0,$$
o que implica que $Gu(x,t) = 0$. Deste modo, por definição do operador G, temos que
$$g(x)u(x,t) = g(x)\int_{\mathbb{T}} g(y)u(y,t)dy,$$
e assim, para $x \in \omega = \{x \in \mathbb{T} : g(x) > 0\}$, obtemos
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{T}} g(y)u(y,t)dt,$$
isto é, $u(x,t) = h(t)$ em $\omega \times (0,T)$, para alguma função $h(t)$.

Portanto, fazendo n tender ao infinito, por (5.1) temos que
$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} = f & \text{em } \mathbb{T} \times (0,T), \\ u = h(t) & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{5.21}$$
Defina $w_n := u_n - u$ e $f_n := -\frac{1}{2}\partial_x(u_n^2) - f - K_0 u_n$. Deste modo, w_n satisfaz a equação
$$Lw_n = f_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
onde $L = \partial_t + \mu\partial_x + \partial_{xxx}$. Agora, note que
$$\begin{aligned} \int_0^T \|Gw_n\|_0^2 dt &= \int_0^T \|Gu_n - Gu\|_0^2 dt \\ &= \int_0^T \|Gu_n\|_0^2 dt + \int_0^T \|Gu\|_0^2 dt - \int_0^T (Gu_n, Gu)_0 dt \to 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$
Por outro lado,
$$\begin{aligned} \int_0^T \|Gw_n\|_0^2 dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{T}} \left| g(x)\left(w_n(x,t) - \int_{\mathbb{T}} g(y)w_n(y,t)dy \right) \right|^2 dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 w_n(x,t)^2 dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 \left(\int_{\mathbb{T}} g(y)w_n(y,t)dy \right)^2 dxdt \\ &\quad - 2\int_0^T \int_{\mathbb{T}} g(x)^2 w_n(x,t) \left(\int_{\mathbb{T}} g(y)w_n(y,t)dy \right) dxdt. \end{aligned} \tag{5.23}$$
Como $w_n \to 0$ fracamente em $X_T^{\frac{1}{2},0}$, do Lema 2.2 obtemos que
$$\int_{\mathbb{T}} g(y)w_n(y,t)dy \to 0,$$

fortemente em $L^2(0,T)$. Isso combinado a (5.22) e (5.23), nos dá

$$\int_0^T\int_{\mathbb{T}} g(x)^2 w_n(x,t)^2 dxdt \to 0.$$

Logo,

$$w_n \to 0 \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\tilde{\omega})),$$

$$f_n \to 0 \text{ fortemente em } X_T^{-\frac{1}{2},-1},$$

onde $\tilde{\omega} := \left\{x \in \omega; g(x) > \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}/2\right\}$.

Aplicando a Proposição 4.3 com $b = \frac{1}{2}$ e $b' = 0$, às funções w_n e f_n, vemos que

$$w_n \to 0 \text{ fortemente em } L^2_{loc}((0,T);L^2(\mathbb{T})).$$

Consequentemente, obtemos que $u_n^2 \to u^2$ fortemente em $L^1_{loc}((0,T);L^1(\mathbb{T}))$, e que $\partial_x(u_n^2) \to \partial_x(u^2)$ no sentido das distribuições. Portanto, $f = -\frac{1}{2}\partial_x(u^2)$ e $u \in X^{\frac{1}{2},0}$ satisfaz

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} + uu_x = 0 & \text{em } \mathbb{T}\times(0,T), \\ u = h(t) & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Da sistema acima, segue que $h'(t) = 0$ em $\omega\times(0,T)$, isto é, $h(t) = c$ em $\omega\times(0,T)$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Isto aliado ao Corolário 4.2, implica que

$$u(x,t) = c$$

em $\mathbb{T}\times(0,T)$. Como o valor médio $[u] = 0$, temos que $c = 0$. Logo, $u_n \to 0$ fortemente em $L^2_{loc}((0,T);L^2(\mathbb{T}))$. Podemos tomar um $t_0 \in [0,T]$ tal que $u_n(t_0) \to 0$ fortemente em $L^2(\mathbb{T})$. Como

$$\|u_n(0)\|_0^2 = \|u_n(t_0)\|_0^2 + \int_0^{t_0} \|Gu_n\|_0^2 dt,$$

de (5.20), temos que $a_n = \|u_n(0)\|_0 \to 0$, uma contradição visto que $a > 0$.

Segundo caso: $a = 0$

Note que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, podemos definir

$$v_n := \frac{u_n}{a_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$Lv_n + \frac{a_n}{2}\partial_x(v_n^2) = -K_0 v_n,$$

e por (5.20), também temos

$$\int_0^T \|Gv_n\|_0^2 dt < \frac{1}{n}. \tag{5.24}$$

Como

$$\|v_n(0)\|_0 = 1, \tag{5.25}$$

a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada nos espaços $X_T^{\frac{1}{2},0}$ e $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))$. De fato, $\|v_n(t)\|_0$ é uma função não crescente, e a limitação de $\|v_n\|_{X_T^{\frac{1}{2},0}}$ segue para valores de T suficientemente pequenos, por um argumento similar ao feito na desigualdade (5.6). Podemos então extrair uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), tal que $v_n \to v$ fracamente em $X_T^{\frac{1}{2},0}$ e fortemente em $X_T^{0,-1}$ e $X_T^{-\frac{1}{2},-1}$. Além disso, a sequência $(\partial_x(v_n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço $X_T^{-\frac{1}{2},0}$, e portanto $a_n\partial_x(v_n^2) \to 0$ nesse espaço. Por fim,

$$\int_0^T \|Gv\|_0^2 dt = 0.$$

Logo, v é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} v_t + \mu v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } \mathbb{T}\times(0,T), \\ v = h(t) & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases} \tag{5.26}$$

Pelo Teorema 2.3, vemos que $v(x,t) = h(t) = c$ em $\mathbb{T}\times(0,T)$, e como o valor médio $[v] = 0$, obtemos também que $c = 0$. De (5.24), temos que

$$\int_0^T \|Gv_n\|_0^2 dt \longrightarrow 0,$$

e assim $K_0 v_n \to 0$ fortemente em $X_T^{-\frac{1}{2},-1}$. Aplicando novamente a Proposição 4.3, vemos que $v_n \to 0$ fortemente em $L^2_{loc}((0,T);L^2(\mathbb{T}))$. Então, podemos tomar um $t_0 \in (0,T)$ tal que $v_n(t_0) \to 0$ fortemente em $L^2(\mathbb{T})$. Como

$$\|v_n(0)\|_0^2 = \|v_n(t_0)\|_0^2 + \int_0^{t_0} \|Gv_n\|_0^2 dt,$$

de (5.20) vemos que $\|v_n(0)\|_0 \to 0$ uma contradição a (5.25). $\square$

A seguir, mostramos a estabilização global do sistema (5.1) com $\lambda = 0$ no espaço $L_0^2(\mathbb{T})$, que é uma consequência direta da desigualdade de observabilidade provada na proposição anterior.

Teorema 5.3. *Suponha $\lambda = 0$. Existe um $\kappa > 0$ tal que para qualquer $R_0 > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que para qualquer $u_0 \in L_0^2(\mathbb{T})$ com*

$$\|u_0\|_0 \leq R_0,$$

a solução correspondente u de (5.1) satisfaz

$$\|u(\cdot,t)\|_0 \leq Ce^{-\kappa t}\|u_0\|_0, \tag{5.27}$$

para todo $t \geq 0$.

Prova: Assumindo $\lambda = 0$, temos que

$$\|u(\cdot,t)\|_0^2 = \|u_0\|_0^2 - \int_0^t \|Gu\|_0^2(\tau)d\tau \quad \forall\, t \geq 0.$$

Para $T > 0$ dado, pela Proposição 5.1, segue que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,T)\|_0^2 &\leq \beta \int_0^T \|Gu\|_0^2(t)dt - \int_0^T \|Gu\|_0^2(t)dt \\ &\leq (\beta - 1)\int_0^T \|Gu\|_0^2(t)dt \\ &\leq (\beta-1)(\|u(\cdot,T)\|_0^2 - \|u_0\|_0^2),\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,T)\|_0^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\|u_0\|_0^2.$$

Deste modo, indutivamente obtemos que

$$\|u(\cdot,kT)\|_0^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^k \|u_0\|_0^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e assim (5.27) segue. Por fim, obtemos uma constante κ independente de R_0, notando que para $t > c(\|u_0\|)$, a norma $\|u(\cdot,t)\|_0 \leq 1$. Então, podemos simplesmente tomar o κ correspondente a $R_0 = 1$. □

Precisamos de um resultado estabilização exponencial para o sistema linearizado

$$\begin{cases} w_t + \mu w_x + w_{xxx} + hw_x = -K_\lambda w, & x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \\ w(x,0) = w_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{5.28}$$

com condições periódicas, onde a função $h \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))$ é dada.

Lema 5.3. *Assuma $\lambda = 0$, e seja κ o ínfimo dos κ obtidos na Proposição 3.1 e no Teorema 5.3. Seja $s \geq 0$ dado e suponha que $h \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))$ para todo $T > 0$. Então para qualquer $0 < \kappa' < \kappa$, existem $T > 0$ e $\beta > 0$ tais que se*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|h\|_{Z^{\frac{1}{2},s}_{[nT,(n+1)T]}} \leq \beta, \tag{5.29}$$

então

$$\|w(\cdot,t)\|_s \leq Ce^{-\kappa' t}\|w_0\|_s \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de w_0.

Prova: Um argumento totalmente análogo ao feito no Teorema 5.1, nos mostra que para todo $T > 0$ e $s \geq 0$, se $h \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))$, então (5.28) admite uma única solução $w \in Z_T^{\frac{1}{2},s} \cap L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))$ tal que

$$\|w\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}} \leq \gamma\left(\|h\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\right)\|w_0\|_s, \tag{5.30}$$

onde $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não decrescente. Escrevendo (5.28) na sua forma integral

$$w(t) = W_0(t)w_0 - \int_0^t W_0(t-\tau)(hw)_x(\tau)d\tau, \tag{5.31}$$

onde $W_0(t)$ é o grupo fortemente contínuo gerado por $A - K_0$. Assim, para qualquer $T > 0$, pela Proposição 3.1 e pelo Lema 5.2, segue, por (5.30) e (5.31), que

$$\begin{aligned}\|w(\cdot,T)\|_s &\leq C_1e^{-\kappa T}\|w_0\|_s + C_2\|h\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\|w\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\\ &\leq C_1e^{-\kappa T}\|w_0\|_s + C_2\|h\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\gamma\left(\|h\|_{Z_T^{\frac{1}{2},s}}\right)\|w_0\|s,\end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é independe de $T > 0$ e $C_2 > 0$ pode depender de T. Note que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}w(\cdot,(n+1)T) &= W_0((n+1)T)w_0 - \int_0^{(n+1)T} W_0((n+1)T-t)(hw)_x(\tau)d\tau\\ &= W_0(T)W_0(nT)w_0 - W_0(T)\int_0^{nT} W_0(nT-\tau)(hw)_x(\tau)d\tau\\ &\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} W_0((n+1)T-t)(hw)_x(\tau)d\tau\\ &= W_0(T)\left(W_0(nT)w_0 - \int_0^{nT} W_0(nT-\tau)(hw)_x(\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{nT}^{(n+1)T} W_0((n+1)T-t)(hw)_x(\tau)d\tau \\
&= W_0(T)w(\cdot,nT) - \int_{nT}^{(n+1)T} W_0((n+1)T-t)(hw)_x(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Daí, segue por (5.30), que

$$
\|w(\cdot,(n+1)T)\|_s \leq C_1 e^{-\kappa t}\|w(\cdot,nT)\|_s + C_2\|h\|_{Z^{\frac{1}{2},s}_{[nT,(n+1)T]}}\gamma\left(\|h\|_{Z^{\frac{1}{2},s}_{[nT,(n+1)T]}}\right)\|w(\cdot,nT)\|_s.
$$

Agora, escolha $T > 0$ suficientemente grande e $\beta > 0$ suficientemente pequeno tais que

$$
C_1 e^{-\kappa T} + C_2\beta\gamma(\beta) \leq e^{-\kappa' T}.
$$

Deste modo, desde que (5.29) aconteça, obtemos

$$
\|w(\cdot,(n+1)T)\|_s \leq e^{-\kappa' T}\|w(\cdot,nT)\|_s \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.
$$

E assim,

$$
\|w(\cdot,nT)\|_s \leq e^{-\kappa' nT}\|w_0\|_s, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.
$$

Consequentemente,

$$
\|w(\cdot,t)\|_s \leq Ce^{-\kappa' t}\|w_0\|_s,
$$

para todo $t \geq 0$. Provando assim o resultado. □

Finalmente, provaremos que o sistema (5.1) com $\lambda = 0$ tem decaimento exponencial para qualquer espaço $H^s(\mathbb{T})$, tal que $s \geq 0$.

Teorema 5.4 (Estabilização exponencial global). *Assuma $\lambda = 0$ e $\kappa > 0$ como no lema anterior. Sejam $s \geq 0$ e $0 < \kappa' < \kappa$ dados. Então existe uma função $\alpha_{s,\kappa'} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que para qualquer $u_0 \in H^s_0(\mathbb{T})$, a solução correspondente u de (5.1) satisfaz*

$$
\|u(\cdot,t)\|_s \leq \alpha_{s,\kappa'}(\|u_0\|_0)e^{-\kappa' t}\|u_0\|_s
$$

para todo $t \geq 0$.

Prova: Note que o caso $s = 0$, já foi provado no Teorema 5.3, com $\kappa' = \kappa$. Primeiro, consideraremos o caso $s = 3$.

Fixe $R_0 > 0$, e seja $u_0 \in H_0^3(\mathbb{T})$ tal que $\|u_0\| \leq R_0$. Seja u solução de (5.1) correspondente ao dado inicial u_0. Definindo $v := u_t$, temos que v é solução do sistema

$$\begin{cases} v_t + \mu v_x + v_{xxx} + (uv)_x = -K_0 v, & x \in \mathbb{T},\, t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{5.32}$$

com condições de contorno periódicas, onde $v_0 = -K_0 u_0 - \mu u_0 - u_0 u_0' - u_0'''$.

De (5.4) e (5.27), para qualquer $T > 0$, existem contantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ dependendo apenas de T e R_0, respectivamente, tais que

$$\|u(\cdot,t)\|_{Z^{\frac{1}{2},0}_{[t+T,T]}} \leq C_1 \|u(\cdot,t)\|_0 \leq C_1 C_2 e^{-\kappa t} \|u_0\|_0,$$

para todo $t \geq 0$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $t' > 0$ de modo que

$$\|u(\cdot,t)\|_{Z^{\frac{1}{2},0}_{[t+T,T]}} \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq t'$. Seja β tal como no Lema 5.3, e escolha $0 < \varepsilon < \beta$.

Aplicando o Lema 5.3 no sistema (5.32), obtemos

$$\|v(\cdot,t)\|_0 \leq C_1 C_2 e^{-\kappa'(t-t')} \|v(\cdot,t')\|_0,$$

para qualquer $t \geq t'$. Ou ainda,

$$\|v(\cdot,t)\|_0 \leq C_3 e^{-\kappa' t} \|v_0\|_0, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C_3 > 0$ depende apenas de R_0. Então, segue da equação

$$u_{xxx} = -K_0 u - u u_x - \mu u_x - v$$

e do Teorema 5.3, que

$$\|u(\cdot,t)\|_3 \leq C e^{-\kappa' t} \|u_0\|_3, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C > 0$ depende apenas de R_0.

O teorema foi provado para os casos $s = 0$ e $s = 3$. Usando a mesma argumentação para $u_1 - u_2$ e $h = u_1 + u_2$ para duas soluções diferentes u_1 e u_2, obtemos a estimativa

$$\|(u_1 - u_2)(\cdot,t)\|_0 \leq C e^{-\kappa' t} \|(u_1 - u_2)(\cdot,0)\|_0$$

para a interpolação não linear, e os casos $0 < s < 3$ seguem. Os outros casos de s podem ser provados de forma similar. $\square$

5.4 Controle Exato Global

Agora, finalmente temos as ferramentes necessárias para provar que o sistema

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + u_{xxx} + uu_x = Gh, & x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{5.33}$$

com condições de contorno periódicas, é globalmente exatamente controlável nos espaços $H^s(\mathbb{T})$, para $s \geq 0$.

Teorema 5.5 (Controle exato global). *Sejam $s \geq 0$ e $R_0 > 0$ dados. Existe um tempo $T > 0$ tal que se $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$ satisfazem*

$$\|u_0\|_s \leq R_0, \quad \|u_1\|_s \leq R_0,$$

então é possível encontrar um controle $h \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{T}))$ de forma que o sistema (5.33) admita uma solução $u \in C([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))$ satisfazendo

$$u(x,T) = u_1(x).$$

Prova: Assuma $\lambda = 0$ no sistema (5.1) e tome $T_0 > 0$ arbitrário. Pelo Teorema A (ver introdução), existe um $\delta > 0$, tal que para quaisquer $w_0, w_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$ com

$$\|w_0\|_s \leq \delta, \quad \|w_1\|_s \leq \delta,$$

é possível encontrar um controle $h \in L^2(0,T_0;H_0^s(\mathbb{T}))$ de forma que o sistema (5.33) admita uma solução $u \in C([0,T_0];H_0^s(\mathbb{T}))$ satisfazendo

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w(x,T_0) = w_1(x).$$

Sejam $u_0, u_1 \in H_0^s(\mathbb{T})$ dados com

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq R_0, \quad \|u_1\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq R_0.$$

Pelo Teorema 5.4, existe um $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que as soluções u e u' de (5.1), correspondentes a u_0 e u_1, respectivamente, satisfazem

$$\|u(\cdot,t_0)\|_s \leq \delta, \quad \|u'(\cdot,t_0)\|_s \leq \delta.$$

Portanto, pela reversibilidade no tempo da equação KdV, o resultado segue. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R. A. *Sobolev Space*, Academic Press, London, 1975.

[2] Bergh, J. and Löfstrom, J. *Interpolation Spaces, An Introduction*. Grundlehern der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[3] Bona, J. L., Sun, S. M. and Zhang, B. -Y. *The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane*. Trans. American Math. Soc. 354:427–490, 2001.

[4] Bourgain, J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to non-linear evolution equations, part II: The KdV equation*. Geom. & Funct. Anal. 3:209–262, 1993.

[5] Boussinesq, J. *Essai sur la théorie des eaux courantes* [Essay on the theory of running water]. Mémoires Présentés par Divers Savants à l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France 23:1–680. Phil. Mag. 39:422–443, 1877.

[6] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle, Thèorie et Applications*, Dunod, Paris, 1999.

[7] Chandler-Wilde, S. N., Hewett, D. P. and Moiola, A. *Interpolation of Hilbert and Sobolev spaces: Quantitative estimates and counterexamples.* Mathematika 61 414–443, 2015.

[8] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* Ω. Journal of the AMS 16:705–749, 2001.

[9] de Jager, E. M. *On the origin of the Korteweg-de Vries equation.* Preprint arXiv:math.HO/0602661, 2006.

[10] Dehman, B., Gérard, P. and Lebeau, G. *Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface*. Math. Z 254:729–749, 2006.

[11] Dehman, B., Lebeau, G. and Zuazua, E. *Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation.* Anna. Sci. Ec. Norm. Super. 36:525–551, 2003.

[12] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[13] Garrett, P. *Functions on the Circle.* 2012. Disponível em: `<www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes/09_sobolev.pdf>`. Acesso em: 20/05/2018.

[14] Gomes, A. M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, Textos de Métodos Matemáticos*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza Instituto de Matemática, 1985.

[15] Hirayama, H. *Local well-posedness for the periodic higher order KdV type equations.* NoDEA Nonlinear Differential Equations, 19, 677-693, 2012.

[16] Hörmander, L. *Linear Partial Differential Equations.* Springer Verlag, 1969.

[17] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* New York: Springer-Verlag, 1983.

[18] Kappeler, T. and Topalov, P. *Well-posedness of KdV on* $H^{-1}(\mathbb{T})$. DukeMath. J. 135:327–360, 2006.

[19] Kato, T. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equations*. In: Advances in Mathematics Supplementary Studies. Studies in Applied Mathematics, Vol. 8. New York: Academic Press, pp. 93–128, 1983.

[20] Kenig, C. E., Ponce, G. and Vega, L. *Well-posedness of the initial value problem for the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc. 4:323–347, 1991.

[21] Kenig, C. E., Ponce, G. and Vega, L. *A bilinear estimate with applications to the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc. 9:573–603, 1996.

[22] Korteweg, D. J. and de Vries, G. *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 39 no. 240, 422–443, 1895.

[23] Kruskal, M. D. and Zabusky, N. J. *Interaction of "solitons"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Physical review letters 15.6 : 240, 1965.

[24] Laurent, C. *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on an interval.* ESAIM Control Optim. Cal. Var. DOI: 10.1051/cocv/2009001, 2009.

[25] Laurent, C. *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on some compact manifolds of dimension 3.* To appear in SIAM J. Math. Anal, 2009.

[26] Laurent, C. Rosier, L. and Zhang, B.-Y. *Control and stabilization of the Korteweg-de Vries equation on a periodic domain.* Communications in Partial Differential Equations 35 no. 4, 707–744, 2010.

[27] Lax, P. D. *Functional analysis, Pure and applied mathematics.* Wiley, 2002.

[28] Lions, J. L. et Magenes, E. *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1968.

[29] Medeiros, L. A. e Milla Miranda, M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[30] Medeiros, L. A. e Rivera, P. H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[31] Micu, S. and Zuazua, E. *An introduction to the controllability of partial differential equations.* Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, 2004.

[32] Miura, R. M. *The Korteweg-de Vries equation: A survey of results.* SIAM Rev. 18:412–459, 1976.

[33] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferencial Equations*, Spronger-Verlag, New York, 1983.

[34] Rosier, L. *A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations*, RS-JESA 41 (3–4) 365–411, 2007.

[35] Russell, D. L. *Computational study of the Korteweg-de Vries equation with localized control action*. In: Chen, G., Lee, E. B., Littman, W., Markus, L., eds. Distributed Parameter Control Systems: New Trends and Applications. Lecture Notes in Pure and Appl. Mathematics, Vol. 128. New York: Marcel Dekker, pp. 195–203, 1991.

[36] Russell, D. L. and Zhang, B. -Y. *Controllability and stabilizability of the third order linear dispersion equation on a periodic domain*. SIAM J. Cont. Optim. 31:659–676, 1993.

[37] Russell, D. L. and Zhang, B. -Y. *Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation*. Trans. Amer. Math. Soc. 348:3643–3672, 1996.

[38] Saut, J. -C. and Scheurer, B. *Unique continuation for some evolution equations*. J. Diff. Eqs. 66:118–139, 1987.

[39] Saut, J. -C. and Temam, R. *Remarks on the Korteweg-de Vries equation*. Israel J. Math. 24:78–87, 1976.

[40] Schwartz, L. *Théorie des Distributions*. Hermann, 1966.

[41] Slemrod, M. *A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space*. SIAM J. Control 12:500–508, 1974.

[42] Tao, T. *Nonlinear Dispersive Equations, Local and Global Analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 106. Providence, RI:American Mathematical Society, 2006.

[43] Tartar, L. *Interpolation non linéaire et régularité* [Nonlinear interpolation and regularity]. J. Funct. Anal. 9:469–489, 1972.

[44] Temam, R. *Sur un problème non linéaire* [On a nonlinear problem]. J. Math. Pures Appl. 48:159–172, 1969.

[45] Zhang, B.-Y. and Zhao, X. Q. *Global controllability and stabilizability of kawahara equation on a periodic domain*, 5, 335–358, 2015.

[46] Zhang, B. -Y. *Taylor series expansion for solutions of the Korteweg-de Vries equation with respect to their initial values.* J. Funct. Anal. 129:293–324, 1995.

[47] Zhang, B. -Y. *Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation.* SIAM J. Cont. Optim. 37:543–565, 1999.