Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Departamento de Matemática - DMAT
1^a Lista de Exercícios de EDO

Professor: Roberto Capistrano–Filho

Entregar os exercícios em $\star$ no dia da prova.

1. Aplique a iteração de Picard para a equação linear de primeira ordem
$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1.$$

2. $\star$ Suponha $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, onde U é um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e f é localmente Lipschitz contínua no segundo argumento. Escolha $(t_0, x_0) \in U$ e $\delta, T > 0$ tal que $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$. Sejam
$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \sup_{x \in B_\delta(x_0)} f(s, x) ds$$
e
$$L(t) = \sup_{x \neq y \in B_\delta(x_0)} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x - y|.}$$
Note que $M(t)$ é não decrescente e defina T_0 via $T_0 = \sup\{0 < t \leq T : M(t_0 + t) \leq \delta\}$. Além disso, suponha
$$L_1(T_0) = \int_{t_0}^{t_0 + T_0} L(t) dt < \infty.$$
Prove que existe única solução $\bar{x}(t)$ do PVI $\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$ dada por
$$\bar{x} = \lim_{m \to \infty} K^m(x_0) \in C^1([t_0, t_0 + T_0], \overline{B_\delta(x_0)})$$
onde $K^m(x_0)(t) = x_m(t)$ e $K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$.

3. $\star$ Considere o PVI $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Qual o máximo valor para T_0 (como uma função de x_0) de acordo com o Teorema de Picard-Lindelöf e o Exercício 2, respectivamente. Qual valor máximo você obtém da solução explícita? (Dica: Calcule T_0 como uma função de δ e encontre o melhor δ.)

4. *Equação de Bernoullil.* Mostre que a mudança de variável $x^{1-n} = y$ transforma a equação de Bernoulli $x' = a(t)x + c(t)x^n$ numa equação linear.

5. *Equação de Riccati.* A equção do tipo
$$x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t) \qquad (*)$$
chama-se equação de Riccati. Mostre que se ϕ_1 é uma solução de $(*)$ então $\phi = \phi_1 + \phi_2$ é solução de $(*)$ se e só se ϕ_2 é solução da equação de Bernoulli.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana. Prove que dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe única solução de $\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$ definida em todo $\mathbb{R}$.

7. $\star$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponhamos que ψ definida em $\mathbb{R}$ seja solução do seguinte **sistema autônomo de primeira ordem** $\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$. É possível que exista $t_1 \neq t_0$ tal que $\phi(t_1) = \phi(t_0)$ mas $\phi'(t_1) \neq \phi'(t_0)$?

8. $\star$ Seja $k(x,t,z)$ contínua em $0 \leq t \leq x \leq a$, $-\infty < z < \infty$ e satisfaz a condição de Lipschitz em z,

$$|k(x,t,z) - k(x,t,\bar{z})| \leq L|z - \bar{z}|.$$

Seja $g(x)$ contínua em $0 \leq x \leq a$. Prove, usando ponto fixo, que a equação integral de Volterra

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x,t,u(t))dt$$

possui exatamente uma solução contínua em $[0,a]$.

9. $\star$ Sejam $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas sendo f Lipschitziana. Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), & x(t_0) = x_0, \\ y' = g(x)y, & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única em qualquer intervalo onde ela esteja definida. Pode-se retirar a hipótese de f ser Lipschitziana e obter a mesma conclusão?

10. Suponha $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x - y|$. Prove que a solução $\phi(t, x_0)$ de $\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0$ satisfaz

$$|\phi(t,x_0) - \phi(t,y_0)| \leq |x - x_0| e^{|\int_{t_0}^t L(s)ds|}.$$

11. Considere um sistema autônomo de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$ com $f(x)$ Lipschitz. prove que $x(t)$ é solução se e somente se $x(t_0)$ também é solução. Use tal fato e a unicidade para mostrar que para duas soluções maximais $x_j(t)$, $j = 1, 2$, os conjuntos imagens $\gamma_j = \{x_j(t) : t \in I_j\}$ coincidem ou são disjuntos.

12. $\star$ Considere um sistema autônomo de primeira ordem em $\mathbb{R}$ com $f(x)$ definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Suponha $xf(x) < 0$, para $|x| > R$. Prove que as soluções existem para todo $t > 0$.