

ELETROMAGNETISMO - PARTE 1 - Edição 01.2011

Eduardo Fontana, PhD

Professor Titular

Departamento de Eletrônica e Sistemas

UFPE

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Capítulo 5 - Magnetostática

[5.1. Introdução](#)

[5.2 Força Magnetostática e Densidade de Fluxo Magnético](#)

[5.3. Potencial Vetor Magnético](#)

[5.4 Equações de Maxwell para a Magnetostática](#)

[5.4.1 Formulação diferencial](#)

[5.4.2 Formulação integral](#)

[5.5 Solução de Problemas em Magnetostática com o Emprego da Formulação Integral](#)

[5.6 Dipolo Magnético](#)

[5.7 Campo de uma Distribuição de Dipolos](#)

[5.7.1 Vetor Magnetização](#)

[2.5.4. Correntes de magnetização e vetor campo magnético](#)

[5.8 Tipos de meios materiais](#)

[5.8.1 Meios lineares](#)

[5.8.2 Meios não-lineares](#)

[5.9 Condições de Contorno](#)

[Problemas](#)

5.1. Introdução

Neste capítulo são considerados os fenômenos originados por cargas em movimento que produzem uma distribuição estacionária de corrente. Esta situação ocorre quando a densidade de carga não varia no tempo, e da equação da continuidade, resulta,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

A divergência nula do vetor densidade de corrente implica que correntes estacionárias obrigatoriamente circulam em caminhos ou circuitos fechados. O campo magnetostático é aquele produzido por estes tipos de distribuição de corrente com a condição adicional que a densidade de carga é nula.

Até o século XVIII o magnetismo era reconhecido como um fenômeno produzido por alguns materiais, denominados genericamente de magnetos, que interagem fortemente entre si. A partir de observações experimentais, verificou-se que estes tipos de materiais também podiam interagir com circuitos portadores de corrente elétrica. A evidência experimental na época apontou para a conclusão de que o efeito produzido pelos magnetos era essencialmente originado por correntes atômicas em movimento ordenado naqueles materiais. Sabe-se hoje em dia, a partir da teoria quântica que o elétron e o próton possuem, além da massa e da carga, o *spin* como propriedade intrínseca, cujo efeito é contribuir para a natureza magnética de alguns materiais.

A teoria necessária para a descrição da magnetostática é baseada em um conjunto de leis experimentais, obtidas por Biot, Savart e Ampère no século XVIII. A partir de uma variedade de experimentos, pode-se obter a relação existente entre força magnética e os parâmetros de circuitos portadores de corrente

5.2 Força Magnetostática e Densidade de Fluxo Magnético

Consideremos dois circuitos portadores de corrente conforme ilustrado na Fig.5.1. Experimentalmente observa-se a existência de uma força de interação de origem magnética, se existirem correntes não-nulas, I_1 e I_2 circulando em ambos os circuitos. A força magnetostática pode ser medida experimentalmente e o módulo, direção e sentido desta força podem ser determinados como função de I_1 e I_2 e dos parâmetros geométricos caracterizando cada circuito. Esta relação experimental pode ser matematicamente representada pela superposição de contribuições diferenciais, resultantes da interação envolvendo cada par de elementos diferenciais de comprimento compondo cada circuito. Com base na Fig.5.1, a força magnetostática diferencial $\delta(d\vec{F}_{12})$, exercida pelo elemento diferencial $\delta\vec{l}'$ do circuito C_1 sobre o elemento diferencial $d\vec{l}$ do circuito C_2 , com localizações definidas pelos vetores posição \vec{X}' e \vec{X} , respectivamente, é dada por,

$$\delta(d\vec{F}_{12}) = I_2 d\vec{l} \times \left[\frac{\mu_0 I_1 \delta\vec{l}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \quad (5.1)$$

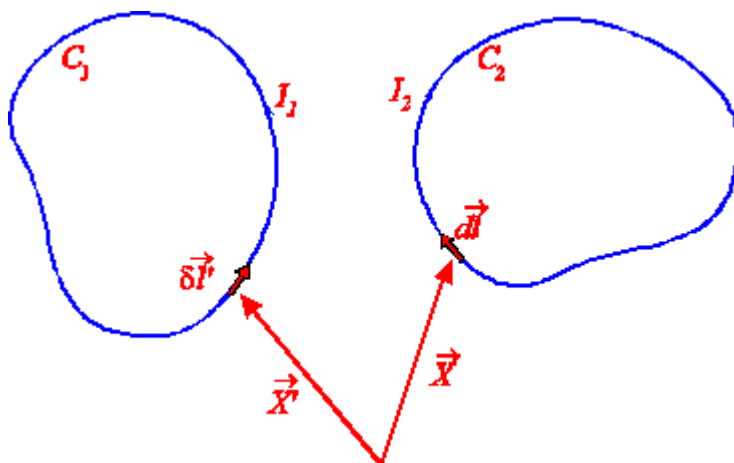


Fig.5.1 Geometria utilizada para formulação matemática da lei de Biot-Savart

O parâmetro μ_0 aparecendo na Eq.(5.1) representa a permeabilidade magnética do vácuo, com valor derivado do sistema MKSC,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/(Am)}.$$

O *Weber (Wb)* é a unidade utilizada para medir fluxo magnético, podendo ser expresso em termos das unidades fundamentais do sistema MKSC. A análise dimensional da Eq.(5.1) fornece,

$$\text{Weber} = \frac{(\text{Newton})(\text{metro})(\text{seg})}{(\text{Coulomb})}.$$

O termo entre colchetes no segundo membro da Eq.(5.1) depende apenas dos parâmetros característicos do circuito C_1 e representa a influência do elemento diferencial $\delta\vec{l}'$ sobre elementos diferenciais do circuito C_2 . Definindo,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 \delta\vec{l}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3} \text{ (Wb/m}^2\text{)}, \quad (5.2)$$

a força total exercida por C_1 sobre o elemento $d\vec{l}$ é obtida de,

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1, \quad (5.3)$$

com,

$$\vec{B}_1 \equiv \oint \delta\vec{B}_1 = \oint_{C_1} \frac{\mu_0 I_1 \delta\vec{l}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3} \text{ (Wb/m}^2\text{)}, \quad (5.4)$$

sendo definido como o vetor densidade de fluxo magnético, que representa o campo ou influência de origem magnética resultante de uma corrente circulante no circuito C_1 .

Uma vez determinado \vec{B}_1 da Eq.(5.4), a força total sobre C_2 é obtida por integração da Eq.(5.3), resultando em,

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1. \quad (5.5)$$

O termo vetorial $\delta\vec{l}' \times (\vec{X} - \vec{X}')$ na Eq.(5.2) fornece a direção e sentido do vetor $\delta\vec{B}_1$ em cada ponto do espaço, resultante da ação isolada do elemento diferencial $\delta\vec{l}'$. A orientação da diferencial do vetor densidade de fluxo magnético pode ser determinada de forma simples utilizando a regra da mão direita, conforme ilustrado na Fig.5.2.

A Eq.(5.4) pode ser utilizada para determinação das propriedades magnéticas de circuitos portadores de corrente de geometrias variadas, como ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.1: Campo \vec{B} de um fio retilíneo, infinitamente longo, percorrido por uma corrente I .

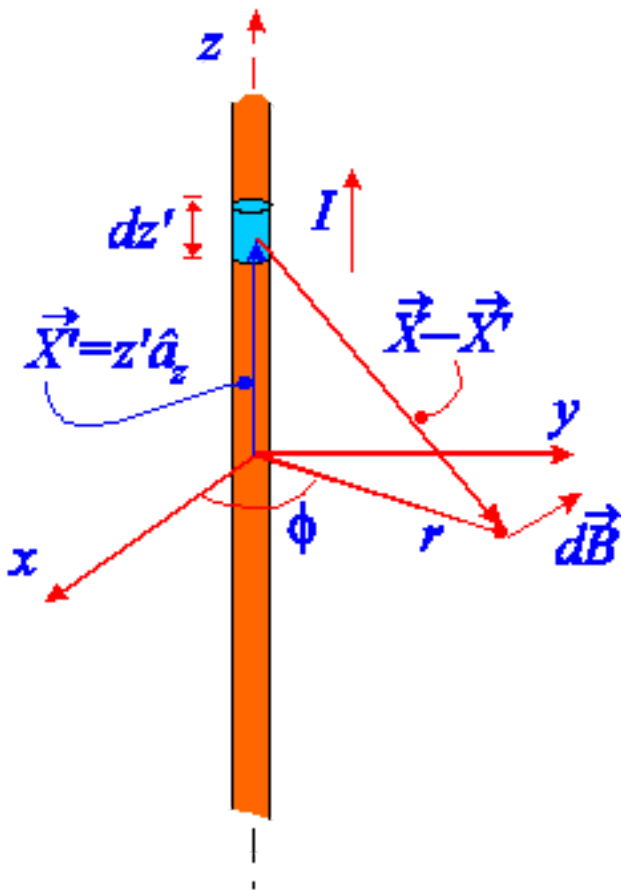


Fig.5.2 Geometria para determinação do vetor de um fio infinitamente longo percorrido por uma corrente I .

Consideremos a situação ilustrada na Fig.5.2, que serve para auxiliar na determinação do vetor \vec{B} nas proximidades de um fio retilíneo longo, que pode ser uma porção de um circuito fechado onde circula uma corrente I . Bem próximo ao fio, podemos fazer uso da aproximação matemática que considera o fio como tendo um comprimento infinito. Uso da Eq. (5.4), e dos parâmetros ilustrados na Fig.5.2, fornece,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I dz' \hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z)}{4\pi |r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' r\hat{a}_\phi}{4\pi (r^2 + z'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Como no ponto de observação o vetor \hat{a}_ϕ é fixo tem-se que,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r \hat{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{4\pi (r^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Após o cálculo da integral, obtém-se,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi.$$

A Eq.(5.6), mostra que o campo \vec{B} do fio retilíneo infinitamente longo varia inversamente com a distância medida no plano perpendicular ao fio e o sentido é aquele do vetor azimutal. As linhas de campo são portanto circunferências fechadas, conforme ilustrado na Fig.5.3.

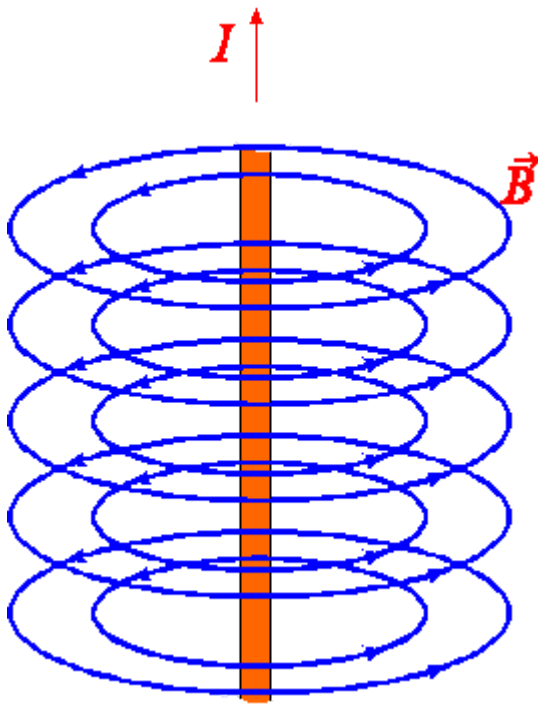


Fig.5.3. Linhas de campo para um fio retilíneo percorrido por corrente.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Exemplo 5.2: Força magnetostática entre fios retilíneos paralelos.

Uma vez determinado o campo \vec{B} produzido pelo fio retilíneo longo, pode-se determinar, por exemplo, a força magnetostática de interação entre fios retilíneos dispostos paralelamente entre si e separados por uma distância d , conforme ilustrado na Fig.5.4. A força total em um trecho de comprimento dz do fio percorrido pela corrente I_2 é obtida da Eq. (5.5),

$$d\vec{F}_{12} = I_2 dz \hat{a}_z \times \vec{B}_1$$

Da Eq.(5.6) e da Fig.5.4, o campo produzido pelo fio 1 sobre o fio 2, é dado por,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{a}_x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}_{12}}{dz} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{a}_y$$

A expressão anterior mostra que a força é atrativa se ambas as correntes fluem no mesmo sentido, sendo repulsiva para sentidos opostos dos fluxos de corrente.

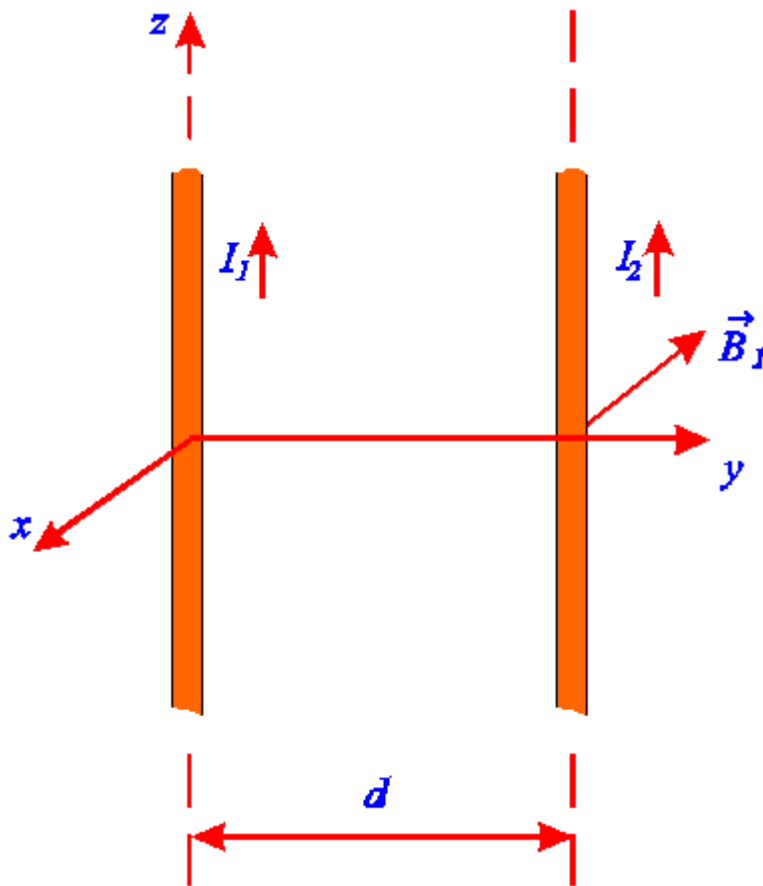


Fig.5.4. Geometria utilizada para determinação da força magnetostática de interação entre fios retilíneos percorridos por correntes elétricas.

Passamos agora a generalização da lei de Biot-Savart para situações em que a corrente esteja distribuída em uma superfície ou volume. Se a corrente produzindo o campo está distribuída em uma superfície de forma arbitrária, conforme ilustrado na Fig.5.5a, com a distribuição de corrente sendo descrita por um vetor densidade superficial de corrente \vec{K} , a integral de linha na Eq.(5.4) é transformada em uma integração de superfície, a partir da substituição

$$Id\vec{l}' \rightarrow \vec{K}dS',$$

resultando em,

$$\vec{B} = \int_S \frac{dS' \mu_0 \vec{K}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3}, \quad (5.6)$$

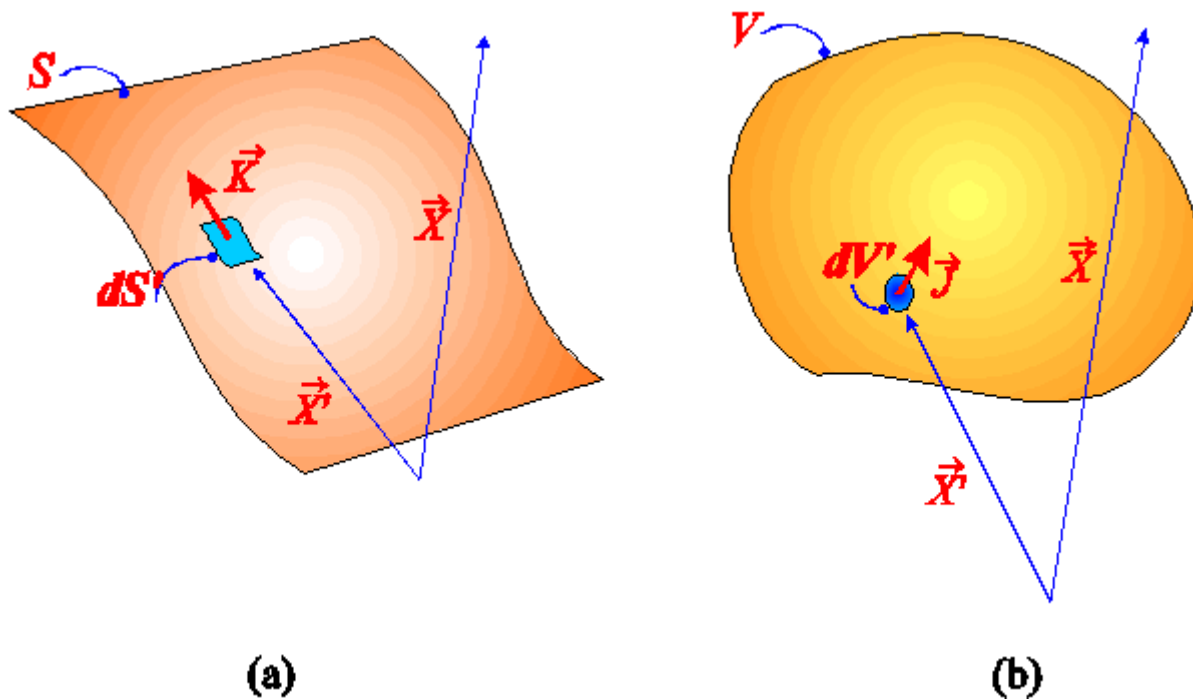


Fig.5.5. Geometrias utilizadas no cálculo do vetor densidade de fluxo magnético a partir da lei de Biot-Savart, para: (a) distribuição superficial e (b) distribuição volumétrica de corrente

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Se a corrente se distribui em um volume, e é descrita por um vetor densidade de corrente \vec{J} , tal como ilustrado na Fig.5.5b, o segundo membro da Eq(5.7) é transformado em uma integral volumétrica, a partir da substituição,

$$Id\vec{l}' \rightarrow \vec{J}dV',$$

fornecendo,

$$\vec{B} = \int_V \frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3}, \quad (5.7)$$

A força magnetostática para o caso de distribuições superficiais ou volumétricas de corrente sob a ação de um campo \vec{B} pode ser generalizada da mesma forma, a partir da Eq. (5.5), resultando em,

$$\vec{F}_B = \int_S dS' \vec{K}(\vec{X}') \times \vec{B}(\vec{X}'), \quad (5.8)$$

para distribuições superficiais e,

$$\vec{F}_B = \int_V dV' \vec{J}(\vec{X}') \times \vec{B}(\vec{X}'), \quad (5.9)$$

para distribuições volumétricas.

Exemplo 5.3: Campo de um plano com distribuição de corrente superficial:

Consideremos a situação ilustrada na Fig.5.6, onde uma corrente superficial existe em um plano infinitamente extenso. A densidade superficial de corrente é constante sobre o plano e definida por, $\vec{K} = K_0 \hat{a}_x$ (A/m). A corrente total que atravessa o segmento ab mostrado na Fig.5.5 é dada por,

$$I_{ab} = \int_a^b \vec{K} \cdot \hat{n} dl$$

Se o segmento atravessado pela corrente é paralelo ao eixo y , a porção que atravessa um comprimento dy é simplesmente, $dI = K_0 dy$. Do Exemplo 5.1, o campo diferencial produzido pela corrente dI , é dado por,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(z^2 + y^2)^{3/2}} \left[\hat{a}_x \times \frac{z\hat{a}_z - y\hat{a}_y}{|z\hat{a}_z - y\hat{a}_y|} \right],$$

onde o produto vetorial no 2º. membro aponta na direção de $d\vec{B}$. Desenvolvendo a expressão anterior, obtém-se,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 dI (z\hat{a}_y + y\hat{a}_z)}{2\pi(z^2 + y^2)} = -\frac{\mu_0 K_0 (z\hat{a}_y + y\hat{a}_z)}{2\pi(z^2 + y^2)} dy$$

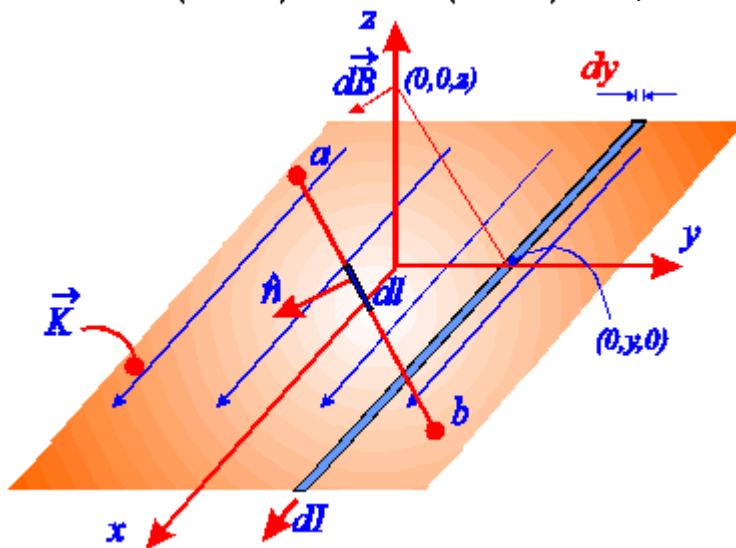


Fig.5.6. Geometria utilizada para o cálculo do vetor densidade de fluxo magnético para uma distribuição superficial de corrente no plano $z=0$.

O campo total é portanto,

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z\hat{a}_y + y\hat{a}_z)}{(z^2 + y^2)} dy = -\frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \left[\hat{a}_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dy}{(z^2 + y^2)} + \hat{a}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dy}{(z^2 + y^2)} \right].$$

O 2º termo do 2º membro envolve a integração de um função ímpar, sendo portanto nulo. A primeira integral é calculada a partir das substituições,

$$y = z \tan \theta, \quad dy = z(\sec \theta)^2 d\theta,$$

$$y \rightarrow -\infty, \quad \theta \rightarrow -\frac{|z|\pi}{z},$$

$$y \rightarrow +\infty, \quad \theta \rightarrow \frac{|z|\pi}{z},$$

forneendo,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \hat{a}_y \int_{-\frac{|z|\pi}{z}}^{\frac{|z|\pi}{z}} \frac{z^2 (\sec \theta)^2 d\theta}{z^2 (\sec \theta)^2} = -\frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \hat{a}_y \frac{|z|\pi}{z},$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = -\frac{\mu_0 K_0}{2} \frac{|z|}{z} \hat{a}_y$$

Da Eq.(5.7) conclui-se que o campo de um plano de corrente infinitamente extenso é constante em todo o espaço. Essa é uma situação obtida pela idealização matemática de uma distribuição de corrente ocupando todo o plano $z = 0$, não podendo ser realizada fisicamente. No entanto, os resultados aqui obtidos servem para descrever o comportamento do campo nas proximidades de uma superfície de corrente. As linhas de campo são paralelas ao plano e dispostas conforme ilustrado na Fig.5.7.

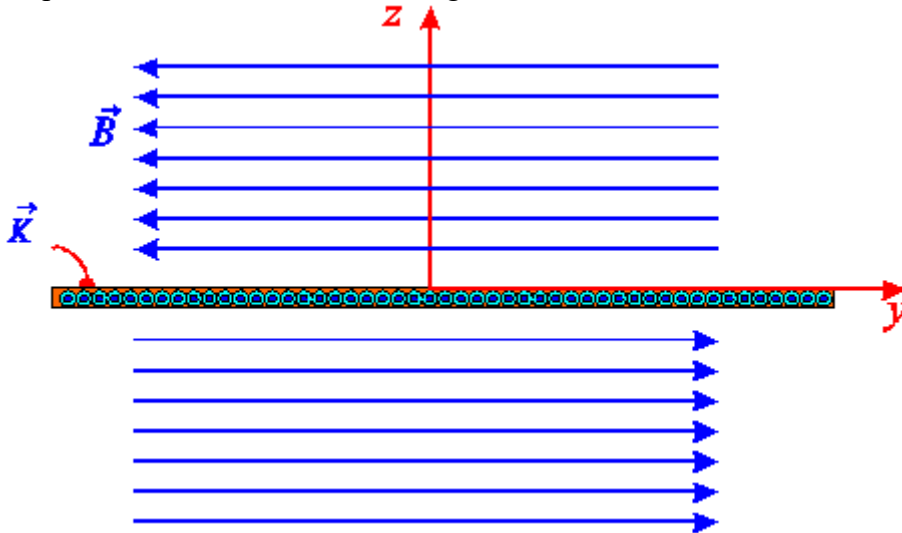


Fig.5.7 Linhas de campo do vetor densidade de fluxo magnético produzido por um plano de corrente

5.3. Potencial Vetor Magnético

A lei de Coulomb é a relação experimental da eletrostática que permite obter especificações para o divergente e rotacional do campo eletrostático de uma dada distribuição de cargas. No caso magnetostático, a lei de Biot-Savart é a relação experimental fundamental a partir da qual pretende-se obter especificações para o divergente e rotacional do campo \vec{B} produzido por uma dada distribuição de corrente, especificações essas necessárias para uma completa obtenção daquela grandeza, conforme determina o teorema de Helmholtz. Antes de procedermos com o desenvolvimento das equações de Maxwell para a magnetostática, vamos

definir uma função potencial, auxiliar para a determinação do vetor \vec{B} , tal como realizado no caso eletrostático onde se definiu o potencial escalar, útil na determinação de \vec{E} .

Considerando a lei de Biot-Savart, na forma mais geral, dada pelo Eq.(5.9), reproduzida a seguir,

$$\vec{B}(\vec{X}) = \int_V \frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3}, \quad (5.7)$$

Como já demonstrado no Capítulo 2, o fator no integrando,

$$\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3},$$

pode ser obtido da operação gradiente,

$$\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right),$$

onde o operador $\vec{\nabla}$, atua sobre as variáveis que definem o vetor posição \vec{X} . Portanto, a Eq. (5.7) pode ser escrita na forma,

$$\vec{B}(\vec{X}) = - \int_V \frac{dV' \mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{X}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right).$$

Fazendo uso da identidade vetorial,

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = \vec{\nabla} f \times \vec{v} + f\vec{\nabla} \times \vec{v},$$

com, $\vec{v} = \vec{J}(\vec{X}')$ e $f = \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$, tem-se que,

$$-\vec{J}(\vec{X}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) - \frac{\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|},$$

e notando que o vetor \vec{X}' é um parâmetro constante na operação diferencial do 2º membro da expressão anterior, tem-se que,

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{X}') = \vec{0},$$

e o campo \vec{B} pode ser posto na forma,

$$\vec{B}(\vec{X}) = \int_V \vec{\nabla} \times \left(\frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} \right).$$

Como o operador $\vec{\nabla}$ não atua nas variáveis de integração, pode-se expressar a última relação na forma,

$$\vec{B}(\vec{X}) = \vec{\nabla} \times \left[\int_V \frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} \right]. \quad (5.10)$$

O vetor resultante da integração do 2º membro da Eq.(5.12) é definido como o *potencial vetor magnético*,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|}, \quad (5.11)$$

que desempenha para a magnetostática um papel semelhante àquele do potencial escalar no caso eletrostático, pois pode ser formalmente utilizado como passo intermediário na determinação do campo \vec{B} . Uma análise dimensional da Eq.(5.13) indica que o vetor \vec{A} é medido em Wb/m no sistema MKSC. Uma vez determinado \vec{A} , o vetor \vec{B} é obtido utilizando a Eq.(5.10), ou equivalentemente,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.12)$$

Apesar de não ter uma interpretação física imediata tal como a relação direta entre potencial eletrostático e energia potencial elétrica, é fácil notar a forma com que cada elemento de volume de uma distribuição de corrente contribui para a composição do potencial vetor magnético. Com base na Eq.(5.11), a contribuição de um elemento de volume dV' da distribuição de corrente, definido pelo vetor posição \vec{X}' , é um vetor diferencial $d\vec{A}(\vec{X})$, tendo a mesma direção e sentido do vetor $\vec{J}(\vec{X}')$, como pode ser observado da Fig.5.8. Conseqüentemente, se a distribuição é formada por um vetor densidade de corrente que aponte em uma única direção em todos os pontos da distribuição, tal como ocorre quando a corrente gerando o campo percorre um fio retilíneo, o potencial vetor resultante será paralelo ao vetor \vec{J} que define a distribuição.

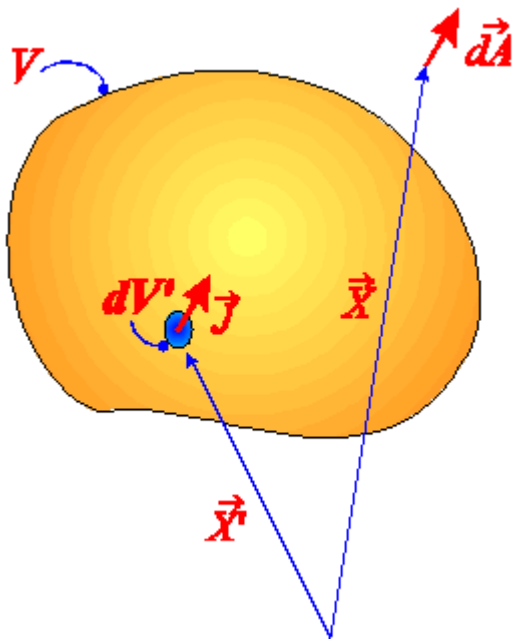


Fig.5.8. Contribuição de um elemento diferencial de volume para o potencial vetor magnético.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Se a distribuição de corrente é localizada em uma superfície caracterizada por uma densidade superficial de corrente \vec{K} , faz-se a substituição, $\vec{J}dV' \rightarrow \vec{K}dS'$, resultando em,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{dS' \mu_0 \vec{K}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} \quad (5.13)$$

Para uma distribuição linear a substituição $\vec{J}dV' \rightarrow Id\vec{l}'$ fornece,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \oint_C \frac{\mu_0 Id\vec{l}'}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} \quad (5.14)$$

Exemplo 5.4: Campo de um fio finito.

Consideremos a determinação do potencial vetor magnético para o fio finito percorrido por uma corrente I , conforme ilustrado na Fig. 5.9. Neste exemplo, a distribuição de corrente é linear e o vetor densidade de corrente aponta em uma única direção, i.e., a direção z . Conseqüentemente, o potencial vetor em todo o espaço é paralelo ao eixo z , e pela simetria da distribuição, o potencial vetor dependerá apenas das coordenadas cilíndricas r e z . Nestas condições, sem perda de generalidade, o potencial vetor pode ser calculado, por exemplo, no plano $x=0$.

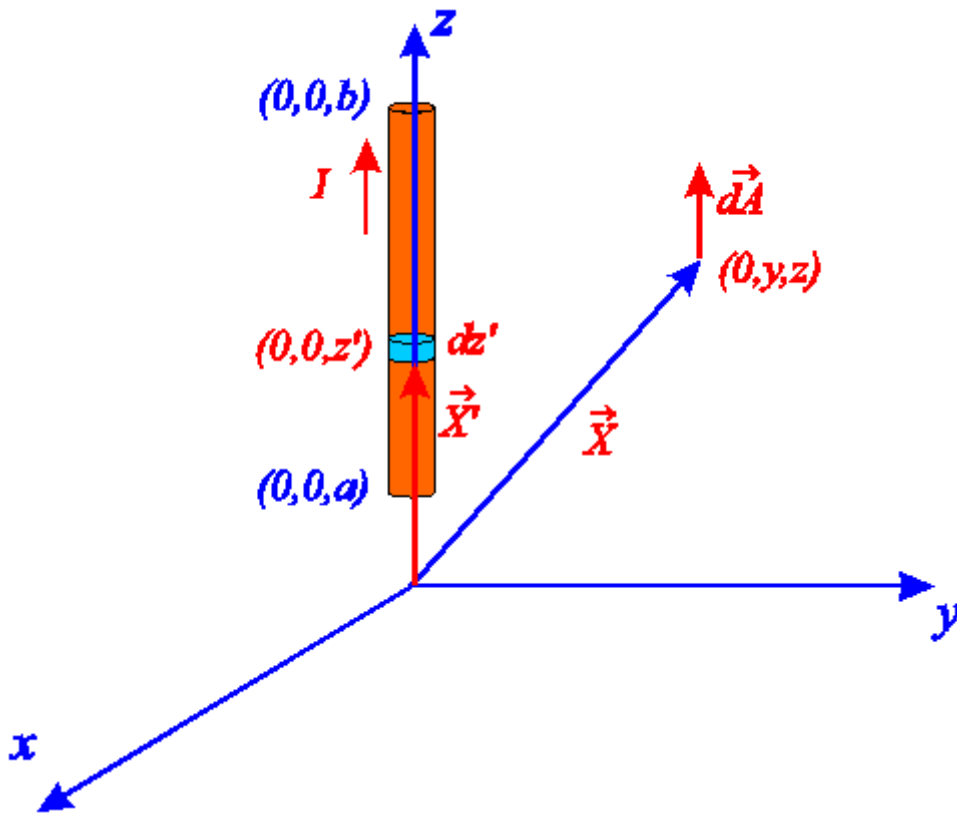


Fig.5.9 Geometria utilizada para o cálculo do potencial vetor de um fio finito.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Considerando o ponto de observação de coordenadas $(0, y, z)$, mostrado na Fig.5.9, uso da Eq.(5.16) fornece,

$$\vec{X} = y\hat{a}_y + z\hat{a}_z, \quad \vec{X}' = z'\hat{a}_z, \quad d\vec{l}' = dz'\hat{a}_z \quad \therefore$$

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_a^b \frac{\mu_0 I dz' \hat{a}_z}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} = \int_a^b \frac{\mu_0 I dz' \hat{a}_z}{4\pi [y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \equiv \hat{a}_z A_z,$$

$$A_z = \int_a^b \frac{\mu_0 I dz'}{4\pi [y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{dz'}{[y^2 + (z - z')^2]^{1/2}}.$$

A solução da última integral é obtida através da substituição de variáveis,

$$z' - z = y \tan \alpha, \quad dz' = y (\sec \alpha)^2 d\alpha,$$

e os limites de integração passam a ser,

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{a - z}{y}\right), \quad \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b - z}{y}\right) \quad \therefore$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{y(\sec \alpha)^2 d\alpha}{y[1+(\tan \alpha)^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{y(\sec \alpha)^2 d\alpha}{y \sec \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sec \alpha d\alpha \quad \therefore$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sec \alpha_2 + \tan \alpha_2}{\sec \alpha_1 + \tan \alpha_1} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left\{ \frac{b-z + [y^2 + (b-z)^2]^{1/2}}{a-z + [y^2 + (a-z)^2]^{1/2}} \right\}.$$

A expressão geral para o potencial vetor em coordenadas cilíndricas, pode ser obtida fazendo-se a substituição, $y \rightarrow r$, que fornece,

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left\{ \frac{b-z + [r^2 + (b-z)^2]^{1/2}}{a-z + [r^2 + (a-z)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

O vetor \vec{B} é obtido a partir da Eq.(5.12),

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{a}_x \frac{\partial A_z}{\partial y} \equiv B_x \hat{a}_x.$$

Esta operação diferencial é mais simplesmente realizada na expressão integral para A_z , que equivale a utilização da lei de Biot-Savart, fornecendo,

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \frac{dz'}{[y^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b dz' \frac{\partial}{\partial y} [y^2 + (z-z')^2]^{-1/2} \quad \therefore$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b dz' (-y) \frac{\partial}{\partial y} [y^2 + (z-z')^2]^{-3/2}.$$

Empregando-se a substituição de variáveis já utilizada anteriormente, resulta,

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-y) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \frac{y(\sec \alpha)^2}{y^3 (\sec \alpha)^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \cos \alpha \quad \therefore$$

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

A generalização deste último resultado em coordenadas cilíndricas é obtida com o uso das substituições,

$$y \rightarrow r, \quad -\hat{a}_x \rightarrow \hat{a}_\phi, \quad \text{no plano } x = 0,$$

com os ângulos α_1 e α_2 relacionados às coordenadas r e z pelas relações,

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{a-z}{r}\right), \quad \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b-z}{r}\right),$$

e a expressão para o campo se reduz a,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{a}_\phi.$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

5.4 Equações de Maxwell para a Magnetostática

5.4.1 Formulação diferencial

De acordo com o teorema de Helmholtz, uma condição necessária para especificação de um campo vetorial, é o estabelecimento do divergente e rotacional deste campo. Da Eq. (5.12), e utilizando a identidade vetorial dada pela Eq.(1.33), obtém-se,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.15)$$

A Eq.(5.15) é uma das equações de Maxwell para a magnetostática e especifica que o vetor densidade de fluxo magnético possui divergência nula, independentemente da forma da distribuição de corrente produzindo este campo. Comparando a presente situação com o caso elétrico, onde conclui-se que a divergência do vetor campo elétrico em um determinado ponto do espaço era uma medida da densidade de carga naquele ponto, a divergência nula do vetor \vec{B} permite concluir que não existem cargas ou monopolos magnéticos na natureza, i.e., as linhas de campo \vec{B} formam curvas fechadas no espaço.

Para obtenção do rotacional do vetor \vec{B} , consideremos novamente a Eq.(5.12), e a operação,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Utilizando a identidade vetorial dada pela Eq.(1.39),i.e.,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

vem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (5.16)$$

Consideremos o primeiro termo do segundo membro da equação anterior. Utilizando a Eq.(5.11), tem-se que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \int_V dV' \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|},$$

e notatndo que o operador $\vec{\nabla}$ atua apenas sobre as coordenadas do vetor \vec{X} , vem,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right]. \quad (5.17)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Uso da identidade vetorial dada pela Eq.(1.26) fornece,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{J}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) + \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{X}')$$

Como o operador $\vec{\nabla}$ não atua sobre as coordenadas do vetor \vec{X}' , $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{X}') = 0$, portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{J}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right). \quad (5.18)$$

Consideremos agora a operação diferencial utilizando o operador $\vec{\nabla}'$, na forma,

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{J}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) + \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{X}')$$

Como no caso magnetostático, a distribuição de corrente é considerada estacionária, tem-se que,

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{X}') = 0$$

resultando em,

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \vec{J}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right).$$

A operação diferencial no segundo membro da equação anterior pode ser escrita na forma,

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right),$$

fornecendo,

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = -\vec{J}(\vec{X}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right). \quad (5.19)$$

Comparando as Eqs.(5.18) e (5.19), obtém-se,

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = -\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right),$$

e inserindo este último resultado na Eq.(5.19), resulta em,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right].$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A integral de volume do segundo membro da expressão anterior é realizada em toda a região de existência da distribuição de corrente. Sendo Σ a superfície que limita este volume e \hat{n} o vetor unitário sobre Σ dirigido para fora do volume V , a aplicação do teorema de Gauss na expressão integral anterior fornece,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma} dS' \frac{\hat{n} \cdot \vec{J}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|}.$$

No exterior do volume V a densidade de corrente é nula. Portanto, a condição de continuidade da componente normal do vetor \vec{J} na superfície Σ implica em,

$$\hat{n} \cdot \vec{J}(\vec{X}') = 0.$$

e conseqüentemente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (5.20)$$

Considerando agora o segundo termo do segundo membro da Eq.(5.16), seja a decomposição do vetor \vec{A} em coordenadas cartesianas, i.e,

$$\vec{A} = \hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y + \hat{a}_z A_z,$$

o que permite escrever,

$$\nabla^2 \vec{A} = \hat{a}_x \nabla^2 A_x + \hat{a}_y \nabla^2 A_y + \hat{a}_z \nabla^2 A_z.$$

Decompondo o vetor \vec{J} na forma,

$$\vec{J} = \hat{a}_x J_x + \hat{a}_y J_y + \hat{a}_z J_z$$

pode-se expressar a Eq.(5.11) na forma,

$$A_i = \int_V dV' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_i(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|}, \quad i = x, y, z \quad (5.21)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Para obter uma expressão para a operação diferencial $\nabla^2 A_i$ ($i = x, y, z$), consideremos a equação de Poisson para o potencial eletrostático de uma distribuição de cargas suspensa no vácuo, conforme expressa pela Eq.(2.32),

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.32)$$

A solução integral da Eq.(2.32) é dada pela Eq.(2.20) foi obtida no Capítulo 2, i.e.,

$$\Phi(\vec{X}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{X}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}'|}, \quad (2.20)$$

A Eq.(2.20) pode ser transformada na Eq.(5.21) a partir das substituições, $\epsilon_0^{-1} \rightarrow \mu_0$, $\rho(\vec{X}') \rightarrow J_i(\vec{X}')$ e $\Phi(\vec{X}) \rightarrow A_i(\vec{X})$. Fazendo estas mesmas substituições na Eq.(2.32), resulta em,

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i, \quad i = x, y, z.$$

Somando as componentes vetoriais em cada membro da equação anterior, resulta em,

$$\hat{a}_x \nabla^2 A_x + \hat{a}_y \nabla^2 A_y + \hat{a}_z \nabla^2 A_z = -\mu_0 (\hat{a}_x J_x + \hat{a}_y J_y + \hat{a}_z J_z).$$

ou equivalentemente,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (5.22)$$

A Eq.(5.22) representa a equação diferencial para o potencial vetor magnético, tendo como fonte o vetor densidade de corrente. Inserindo as Eqs.(5.20) e (5.22) na Eq.(5.16), obtém-se finalmente,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (5.23)$$

Em resumo, as equações diferenciais de Maxwell para a magnetostática obtidas para distribuições de corrente estacionárias no vácuo, são dadas pelas Eqs.(5.15) e (5.23), reproduzidas a seguir,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (5.23)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

5.4.2 Formulação integral

A partir da lei de Biot-Savart, obteve-se duas equações diferenciais para o campo \vec{B} representadas pelas Eqs. (5.15) e (5.23), que juntamente com a expressão para a força magnetostática sobre um volume diferencial de corrente, obtida da Eq.(5.9),

$$d\vec{F}_B = dV' \vec{J}(\vec{X}') \times \vec{B}(\vec{X}') , \quad (5.24)$$

são suficientes para descrever a magnetostática e os efeitos mecânicos de origem magnética.

Relações integrais podem ser obtidas a partir das equações diferenciais de Maxwell pela aplicação dos teoremas da análise vetorial. Integrando ambos os membros da Eq.(5.15) em um volume V arbitrário, obtém-se,

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ,$$

e utilizando o teorema de Gauss, obtém-se a *lei de Gauss para o magnetismo*,

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 . \quad (5.25)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A Eq.(5.25) expressa o fato de o fluxo magnético através de uma superfície fechada de forma arbitrária ser sempre nulo, uma indicação da inexistência de monopólos magnéticos na natureza.

Seja agora um vetor área diferencial $d\vec{S}$ de uma superfície aberta S , e a operação produto escalar deste elemento com cada termo da Eq.(5.23),

$$d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} .$$

Realizando a integração de ambos os membros da equação anterior na superfície S , resulta,

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Aplicando o teorema de Stokes no primeiro membro da expressão anterior, obtém-se a *lei circuital de Ampère* para o campo \vec{B} ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.26)$$

Na Eq.(5.26) S é uma superfície aberta qualquer limitada pelo caminho C , este último sendo utilizado para o cálculo da integral de linha do primeiro membro daquela equação. Conforme pode ser observado nas três situações ilustradas na Fig.5.10 a integral de superfície do segundo membro da Eq.(5.26) representa a corrente total envolvida pelo caminho C .

A Tabela 5.1 resume as equações de Maxwell para a magnetostática nas formas diferencial e integral.

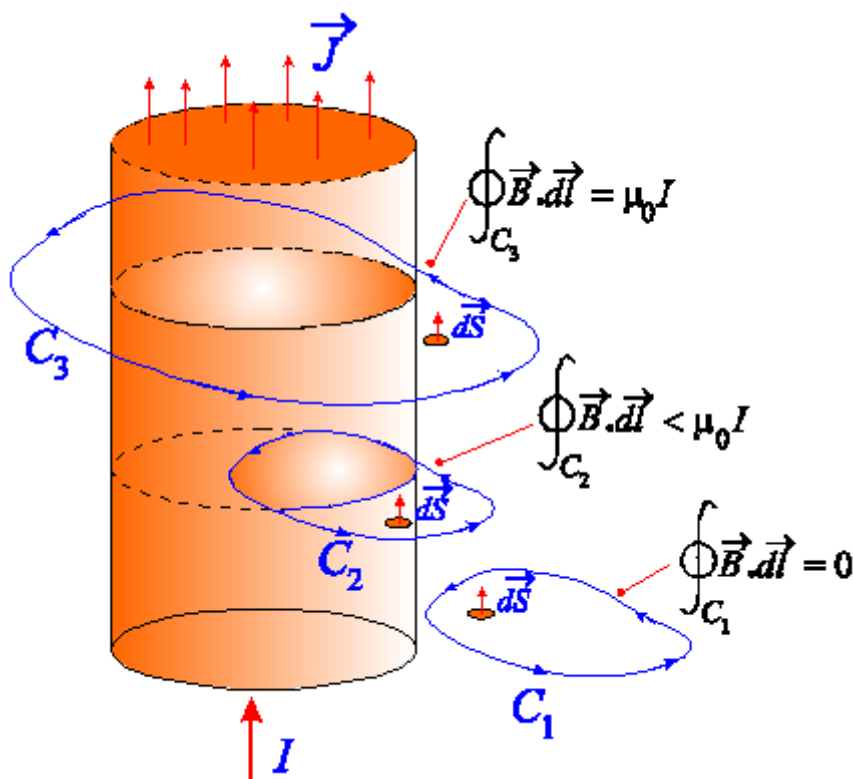


Fig.5.10. Aplicação da lei circuital de Ampère para três caminhos fechados com localizações distintas relativamente ao volume da distribuição de corrente.

Tabela 5.1. Formas diferencial e integral das Eqs. de Maxwell para a magnetostática de distribuições de corrente no vácuo.

Forma diferencial	Forma integral
-------------------	----------------

<u>Equações de Maxwell</u>	<u>Equações de Maxwell</u>
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (5.15)	$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (5.25)
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (5.23)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ (5.26)
<u>Força magnética</u>	<u>Força magnética</u>
$d\vec{F}_B = dV' \vec{J}(\vec{X}') \times \vec{B}(\vec{X}')$ (5.24)	$\vec{F}_B = \int_V dV' \vec{J}(\vec{X}') \times \vec{B}(\vec{X}')$ (5.9)

5.5 Solução de Problemas em Magnetostática com o Emprego da Formulação Integral

Na presente Seção examinaremos algumas situações favoráveis a aplicação da equações integrais de Maxwell na determinação do campo \vec{B} . Como nesta formulação, o campo \vec{B} aparece no integrando das equações, sua determinação só será possível quando a distribuição de corrente apresentar um alto grau de simetria. A lei de Gauss para o magnetismo em conjunção com a lei circuital de Ampère podem ser utilizadas para determinar as componentes de campo existentes para uma dada distribuição de corrente. Considerações de simetria permitem identificar a dependência destas componentes com as coordenadas. A determinação explícita do vetor \vec{B} é feita com o uso da lei circuital de Ampère, utilizando-se um caminho de integração na Eq.(5.26) que garanta que a componente de campo correspondente seja constante sobre este caminho. Em resumo, o emprego desta formulação requer obtenção, *a priori*, de respostas as seguintes questões:

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

a) *De que coordenadas o campo depende?*

A resposta a esta questão pode ser obtida analisando-se a simetria da distribuição.

b) *Que componentes de campo estão presentes?*

A resposta a esta questão pode ser obtida aplicando-se as duas equações integrais de Maxwell para o magnetismo. Obviamente a lei de Biot-Savart também permite determinar as componentes de \vec{B} produzidas por uma dada distribuição de corrente

Se a resposta a estas questões impossibilitar a definição de um caminho simples de integração na Eq.(5.26), deve-se fazer uso das equações diferenciais de Maxwell ou da lei de Biot-Savart para determinação de \vec{B} . O uso da formulação integral é ilustrado através dos exemplos a seguir.

Exemplo 5.5: Campo \vec{B} de um fio infinitamente longo percorrido por uma corrente I .

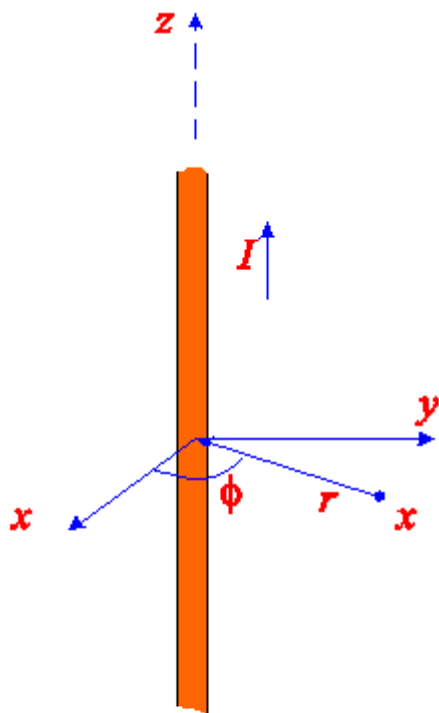


Fig.5.11. Geometria utilizada na determinação do campo \vec{B} de um fio infinitamente longo.

Consideremos novamente a determinação do campo produzido pelo fio infinitamente longo, analisado no Exemplo 5.1, e ilustrado na Fig.5.11. O campo \vec{B} foi determinado naquele exemplo pelo uso da lei de Biot-Savart. No exemplo presente, iremos ignorar a validade da lei de Biot-Savart e utilizar as equações integrais de Maxwell, juntamente com algumas considerações de simetria para determinação do vetor \vec{B} .

a) De que coordenadas o campo depende?

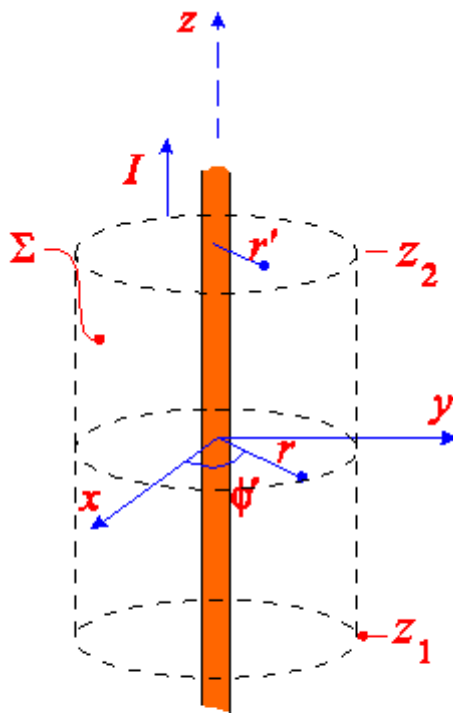


Fig.5.12 Superfície gaussiana para aplicação da lei de Gauss do magnetismo.

Para determinar a dependência das componentes de campo com as coordenadas consideremos inicialmente a simetria da distribuição. Como a distribuição de corrente possui simetria azimutal, i.e., o vetor densidade de corrente é independente da variável azimutal, rotações arbitrárias do fio em torno do seu eixo mantém inalteradas as componentes do campo desta distribuição. O fato do fio ser considerado infinitamente longo permite a realização de operações de translação ao longo do eixo do fio sem modificação da distribuição de corrente e mantendo, da mesma forma, inalteradas as componentes de campo presentes. Definindo-se um sistema de coordenadas cilíndricas com eixo z coincidente com o eixo do fio, pode-se concluir que o campo deve depender apenas da coordenada r deste sistema. Conseqüentemente, considerações de simetria permitem escrever o campo \vec{B} na forma,

$$\vec{B} = B_r(r)\hat{a}_r + B_\phi(r)\hat{a}_\phi + B_z(r)\hat{a}_z.$$

b) Quais as componentes de campo estão presentes?

Consideremos a aplicação da lei de Gauss para o magnetismo utilizando como superfície gaussiana o cilindro imaginário ilustrado na Fig.5.12,

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{z'=z_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{z'=z_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{r'=r} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

O vetor área diferencial em cada trecho de superfície é da forma

$$d\vec{S} = r' d\phi' dr' \hat{a}_z, z'=z_2; \quad d\vec{S} = -r' d\phi' dr' \hat{a}_z, z'=z_1; \quad d\vec{S} = rd\phi' dz' \hat{a}_r, r'=r$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \vec{B}(r') \cdot \hat{a}_z - \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \vec{B}(r') \cdot \hat{a}_z + \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_0^{2\pi} \vec{B}(r) r d\phi' \cdot \hat{a}_r \\ &= \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' B_z(r') - \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' B_z(r') + B_r(r) 2\pi r (z_2 - z_1) \\ &= B_r(r) 2\pi r (z_2 - z_1) = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, com o uso da Eq.(5.27) mostrou-se que a componente radial do vetor \vec{B} é nula.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Consideremos o caminho fechado retangular ilustrado na Fig.5.13. Aplicando a lei circuital de Ampère para esse caminho e notando que a corrente envolvida é nula, tem-se que,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 &\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \vec{B}(r_2) \cdot dz' \hat{a}_z + \int_{r_2}^{r_1} \vec{B}(r') \cdot dr' \hat{a}_r + \int_{z_2}^{z_1} \vec{B}(r_1) \cdot dz' \hat{a}_z + \int_{r_1}^{r_2} \vec{B}(r') \cdot dr' \hat{a}_r \\ &= [B_z(r_2) - B_z(r_1)](z_2 - z_1) + \int_{r_2}^{r_1} B_r(r') dr' - \int_{r_2}^{r_1} B_r(r') dr' = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [B_z(r_2) - B_z(r_1)](z_2 - z_1) = 0 \Rightarrow B_z(r_2) = B_z(r_1) \Rightarrow B_z = \text{constante}$$

Ou seja, a lei circuital de Ampère nos permite concluir que a componente axial do campo \vec{B} deve ser constante. No entanto, como a distribuição é localizada e finita em $r = 0$,

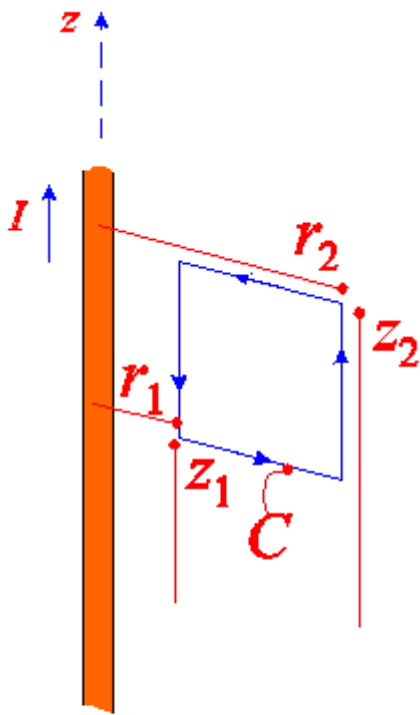


Fig.5.13 Caminho retangular fechado para aplicação da lei circuital de Ampère.

fisicamente o campo deve tender a zero com $r \rightarrow \infty$. Conseqüentemente, a componente axial do campo deve ser nula em todo o espaço. Vale observar, que uma componente constante do campo é sempre uma solução matemática das equações diferenciais de Maxwell e a existência ou não desta possível componente deve ser determinada a partir de considerações físicas. A única possibilidade de se obter um campo constante em todo o espaço ocorre para o caso de uma distribuição cuja corrente total é infinita, sendo esta no entanto uma situação fisicamente não realizável.

A partir das considerações anteriores conclui-se que o campo \vec{B} é da forma,

$$\vec{B} = B_{\phi}(r)\hat{a}_{\phi}.$$

Para obtenção da componente azimutal do vetor \vec{B} , utilizamos a lei de Ampère e um caminho por sobre o qual o vetor \vec{B} seja constante. O caminho é uma circunferência de raio r , conforme ilustrado na Fig.5.14, e que envolve a

distribuição de corrente. Para este caminho tem-se que,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

Utilizando $d\vec{l} = r d\phi' \hat{a}_{\phi}$ $\{0 \leq \phi' \leq 2\pi\}$, resulta,

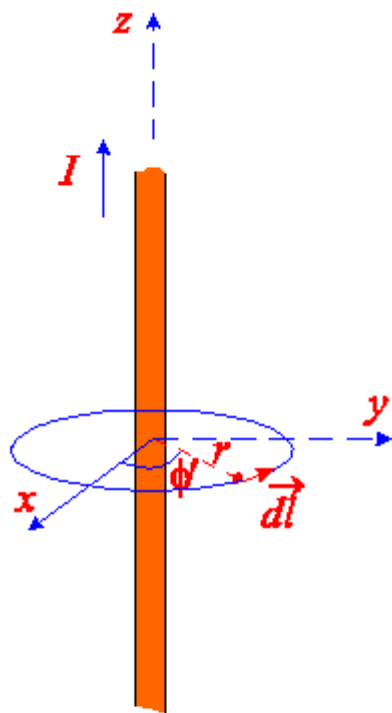
$$\int_0^{2\pi} B_{\phi}(r) r d\phi' = \mu_0 I \Rightarrow B_{\phi}(r) r \int_0^{2\pi} d\phi' = \mu_0 I \Rightarrow B_{\phi}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_{\phi},$$

que corresponde ao resultado obtido no Exemplo 5.1.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

É fácil verificar que se o fio considerado exibir um raio a e uma distribuição de corrente uniforme em seu interior com vetor densidade de corrente, $\vec{J} = J_0 \hat{a}_z$, o campo obtido será dado por,



$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \hat{a}_\phi & , r \leq a \\ \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r} \hat{a}_\phi & , r \geq a \end{cases}$$

Exemplo 5.6: Campo de um plano infinito percorrido por corrente de superfície

Consideremos a situação ilustrada na Fig.5.15a, onde uma corrente de superfície existe em um plano infinitamente extenso. Como a geometria apresenta simetria de translação ao longo das direções x e y , o campo não depende destas coordenadas. Para determinação das componentes de campo presentes, consideramos a contribuição para o campo de dois elementos de corrente dI_1 e dI_2 eqüidistantes de um ponto na região $z > 0$. A soma das contribuições resulta em um vetor $d\vec{B}$ paralelo ao plano com o sentido indicado na figura. Aplicando o mesmo conceito para a determinação da componente de campo na região $z < 0$, conclui-se que o vetor campo resultante da combinação de duas fitas de corrente simetricamente localizadas com

Fig.5.14 Caminho utilizado na determinação do campo pela lei de Ampère.

respeito ao plano $y = 0$, é dirigido em sentido contrário àquele obtido na região $z > 0$. Combinando elementos de corrente dois a dois, sobre todo o plano de corrente, concluímos portanto que o vetor \vec{B} resultante deve ser da forma,

$$\vec{B} = \begin{cases} B_y(z) \hat{a}_y & , \text{ para } z > 0 \\ -B_y(z) \hat{a}_y & , \text{ para } z < 0 \end{cases}$$

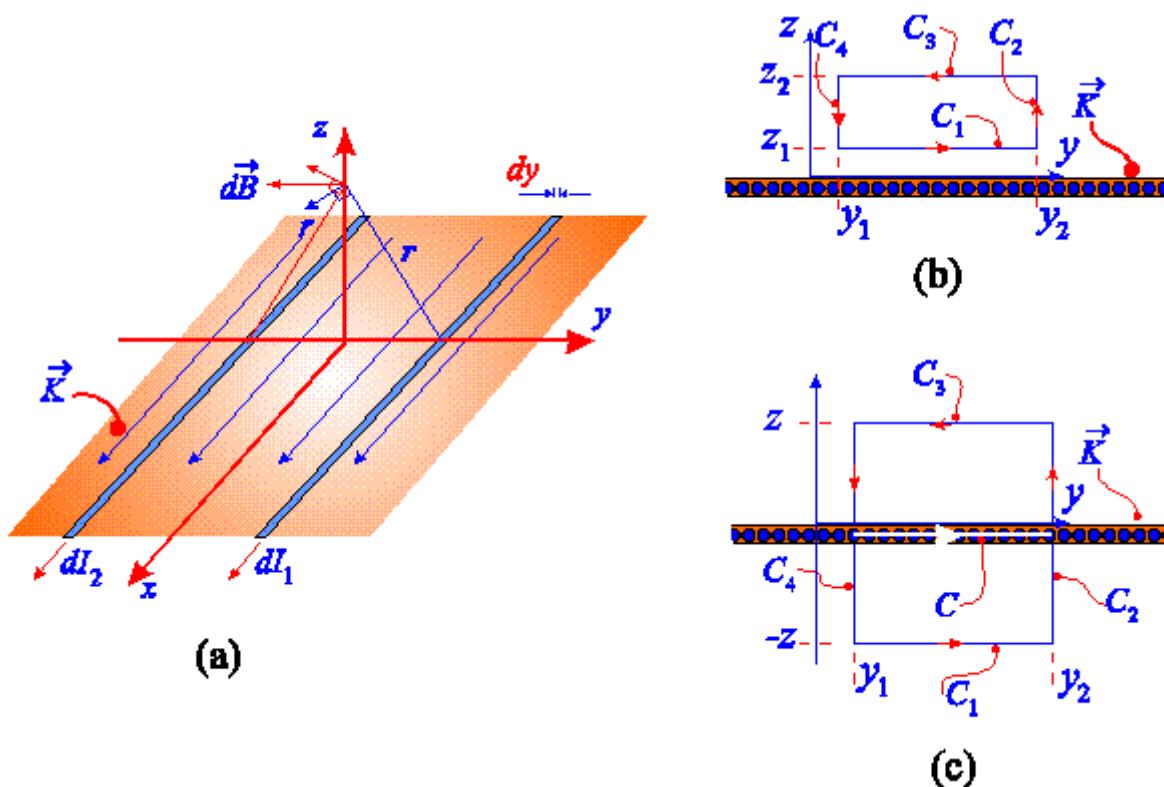


Fig.5.15 Plano infinitamente extenso percorrido por corrente de superfície.

Considerando a Fig.5.15b, a aplicação da lei circuital de Ampère para o caminho fechado aí indicado fornece,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Notando que sobre C_2 e C_4 a integral de linha é nula, resulta,

$$\int_{y_1}^{y_2} B_y(z_1) dy + \int_{y_2}^{y_1} B_y(z_2) dy = 0 \Rightarrow B_y(z_1)(y_2 - y_1) - B_y(z_2)(y_2 - y_1) = 0$$

$$B_y(z_1) = B_y(z_2) \Rightarrow B_y = \text{constante}$$

Concluimos portanto que a componente do campo é constante na região $z > 0$, mudando de sinal na região $z < 0$.

Para determinar a magnitude do campo, utilizamos o caminho mostrado na Fig. 5.15c, para a aplicação da lei circuital de Ampère, onde os segmentos paralelos ao plano, são escolhidos sobre as retas $(0,0,z)$ e $(0,0,-z)$, com $z > 0$, resultando em,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{C_1} \vec{K} \cdot \hat{n} dl$$

onde C_1 é o caminho sobre o plano, atravessado pelo vetor densidade superficial de corrente \vec{K} , e \hat{n} é o vetor normal àquele caminho. No caso presente, temos,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{y_2}^{y_1} B_y(z) dy + \int_{y_1}^{y_2} B_y(-z) dy = \mu_0 \int_{y_1}^{y_2} \vec{K} \cdot dy \hat{a}_y$$

Utilizando a condição $B_y(-z) = -B_y(z)$, tem-se que,

$$\int_{y_2}^{y_1} B_y(z) dy - \int_{y_1}^{y_2} B_y(z) dy = \mu_0 \int_{y_1}^{y_2} K \hat{a}_x \cdot dy \hat{a}_x \Rightarrow 2B_y(z)(y_1 - y_2) = \mu_0 K(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{a}_y, & \text{para } z > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2} \hat{a}_y, & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

É importante observar que as situações ilustradas nos Exemplos 5.5 e 5.6, são apenas idealizações matemáticas que servem de ajuda para a determinação de campos nas proximidades da distribuição de corrente considerada em uma primeira aproximação. Isso porque, fisicamente, não existem distribuições de corrente que se estendam em todo o espaço em uma ou duas dimensões. No caso do plano de corrente, obtivemos um campo constante em todo o espaço pois o plano se estende infinitamente em duas dimensões comportando portanto uma corrente total infinita.

Em situações físicas, a distribuição de corrente é sempre localizada em uma região finita, e como consequência, o campo de distribuições físicas deve decair a zero longe da distribuição. Pode se mostrar que o campo distante de uma distribuição de corrente localizada em uma região finita decai pelo menos com $1/R^3$, onde R é a distância do centro da distribuição de corrente até o ponto de observação.

5.6 Dipolo Magnético

Como segunda aplicação da determinação do campo de distribuições de corrente, vamos considerar, o campo produzido por uma espira circular percorrida por uma corrente I , conforme ilustrado na Fig. 5.16. A determinação do campo dessa distribuição serve como modelo para a determinação do campo magnético de átomos, onde a distribuição de corrente representa o efeito do movimento dos elétrons ao redor do núcleo. Primeiramente determinaremos o potencial vetor da distribuição, e em seguida, o vetor densidade de fluxo magnético.

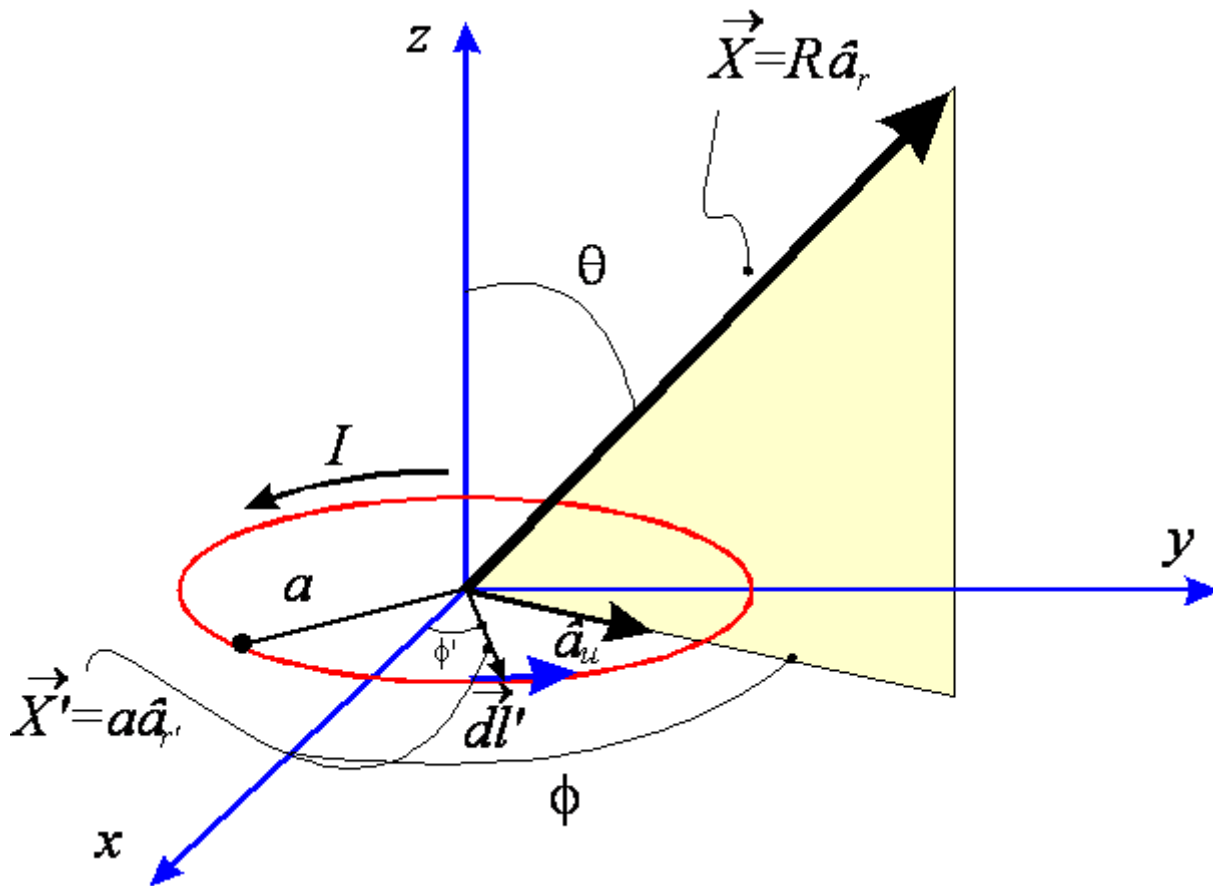


Fig.5.16. Geometria para o cálculo do campo de um dipolo magnético.

O potencial vetor, é obtido da Eq.(5.11),

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{dV' \mu_0 \vec{J}(\vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|}, \quad (5.11)$$

que para o caso de uma corrente filamental, se reduz a,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \oint_C \frac{\mu_0 I d\vec{l}'}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|}.$$

Para o cálculo da última expressão integral, o vetor $d\vec{l}'$ é decomposto em coordenadas cartesianas,

$$d\vec{l}' = ad\phi' \hat{a}_{\phi'} = ad\phi' [(\hat{a}_{\phi'} \cdot \hat{a}_x) \hat{a}_x + (\hat{a}_{\phi'} \cdot \hat{a}_y) \hat{a}_y] = ad\phi' [-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y],$$

e a distância que aparece no denominador é expressa na forma,

$$|\vec{X} - \vec{X}'| = [(\vec{X} - \vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}')]^{1/2}.$$

Da Fig.5.16, tem-se que,

$$\vec{X} - \vec{X}' = R\hat{a}_R - a\hat{a}_r,$$

logo,

$$(\vec{X} - \vec{X}') \cdot (\vec{X} - \vec{X}') = R^2 + a^2 - 2aR\hat{a}_R \cdot \hat{a}_r.$$

Utilizando o vetor unitário \hat{a}_u indicado na Fig.5.13 vem,

$$\hat{a}_R = \text{sen } \theta \hat{a}_u + \text{cos } \theta \hat{a}_z \Rightarrow \hat{a}_R \cdot \hat{a}_r = \text{sen } \theta \hat{a}_u \cdot \hat{a}_r = \text{sen } \theta \text{cos}(\phi - \phi') \quad \therefore$$

$$|\vec{X} - \vec{X}'| = \left[R^2 + a^2 - 2aR \text{sen } \theta \text{cos}(\phi - \phi') \right]^{1/2} \quad \therefore$$

$$\vec{A}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\text{sen } \phi' \hat{a}_x + \text{cos } \phi' \hat{a}_y) d\phi'}{\left[R^2 + a^2 - 2aR \text{sen } \theta \text{cos}(\phi - \phi') \right]^{1/2}}.$$

Antes de prosseguirmos, vamos determinar que componentes do vetor \vec{A} estão presentes. Da Fig. 5.17, mostramos qualitativamente qual seria a orientação do vetor \vec{A} , em um plano de observação arbitrário que intercepta a espira circular perpendicularmente, passando pelo centro da espira. Qualquer que seja a escolha do plano de observação, a soma das contribuições para a integral, de elementos de corrente diferenciais produz um vetor \vec{A} resultante orientado perpendicularmente ao plano de observação. Conseqüentemente, o potencial vetor após integração deverá formar linhas circunferenciais fechadas, ou seja, só possuirá a componente azimutal.

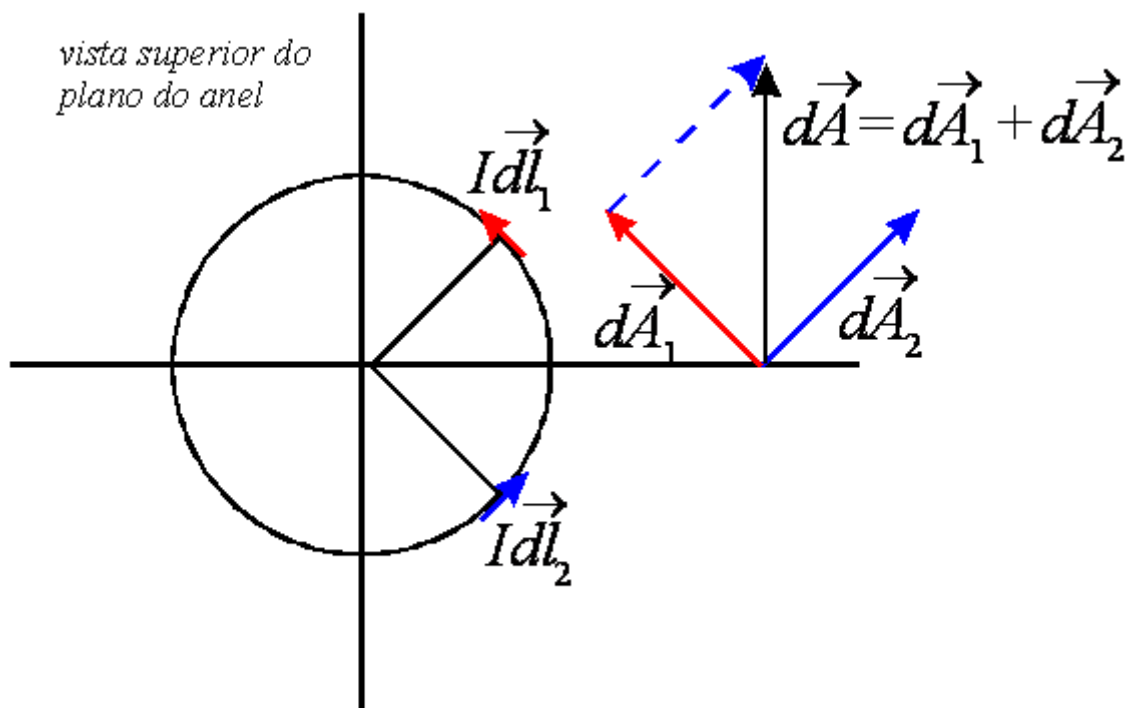


Fig.5.17. Contribuição de dois elementos de corrente para o vetor $d\vec{A}$.

A expressão integral para o vetor \vec{A} pode ser obtida rigorosamente utilizando-se técnicas de expansão de funções em harmônicos esféricos. No caso presente, vamos obter o vetor \vec{A} para o caso especial em que se observa o efeito do dipólo a distâncias grandes

comparadas com as dimensões da distribuição, ou seja, na aproximação $R \gg a$. Neste caso, temos,

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{X}) &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \left[R^2 + a^2 - 2aR \sin \theta \cos(\phi - \phi') \right]^{-1/2} d\phi' \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \left[1 + \frac{a^2 - 2aR \sin \theta \cos(\phi - \phi')}{R^2} \right]^{-1/2} d\phi' \\
 &\approx \frac{\mu_0 I a}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \left[1 - \frac{a^2 - 2aR \sin \theta \cos(\phi - \phi')}{2R^2} \right] d\phi' \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) d\phi' \\
 &+ \frac{\mu_0 I a}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \frac{a}{R} \sin \theta \cos(\phi - \phi') d\phi' \\
 &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) d\phi' \\
 &+ \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y \right) \sin \theta \cos(\phi - \phi') d\phi'
 \end{aligned}$$

A primeira integral da expressão anterior é nula e da Segunda obtém-se

$$\vec{A}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4R^2} \left(-\hat{a}_x \sin \phi + \hat{a}_y \cos \phi \right)$$

Notemos que a combinação linear de vetores entre colchetes é exatamente o vetor unitário azimutal no ponto de observação com coordenadas esféricas (R, θ, ϕ) , e portanto,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta \hat{a}_\phi}{4R^2} \quad (5.27)$$

Ou seja, como afirmado anteriormente, as linhas de campo do potencial vetor são circunferências fechadas, e a magnitude independe da coordenada ϕ do ponto de observação.

O momento de dipólo de uma distribuição de corrente é definido pela relação,

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int_V \vec{X}' \times \vec{J}(\vec{X}') dV' \quad (\text{Amp}/\text{m}^2) \quad (5.28)$$

Para uma distribuição filamentar de corrente, a Eq.(5.28) reduz-se a

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \oint_C \vec{X}' \times Id\vec{l}' \quad (5.29a)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A generalização da Eq.(5.29) para distribuições superficiais e volumétricas de corrente é obtida através das respectivas substituições $Id\vec{l}' \rightarrow \vec{K}dS'$ e $Id\vec{l}' \rightarrow \vec{J}dV'$, resultando em

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int_S \vec{X}' \times \vec{K}dS' \quad (5.29b)$$

para correntes distribuídas sobre uma área S e

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int_V \vec{X}' \times \vec{J}dV' \quad (5.29c)$$

Para a espira circular mostrada na Fig.5.16, $\vec{X}' = a\hat{a}_r'$, $d\vec{l}' = ad\phi'\hat{a}_\phi'$. Utilizando a Eq. (5.29a) vem

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} a^2 I \hat{a}_z \int_0^{2\pi} d\phi' = (I\pi a^2) \hat{a}_z \\ \vec{m} &\equiv \frac{Ia^2}{2} \int_0^{2\pi} \hat{a}_r' \times \hat{a}_\phi' d\phi' = \frac{Ia^2}{2} \int_0^{2\pi} \hat{a}_z d\phi' = I(\pi a^2) \hat{a}_z \end{aligned}$$

Notando que,

$$\sin \theta \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \times \hat{a}_R$$

resulta,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \quad (5.30)$$

Da Eq.(5.30), nota-se que, a menos da natureza vetorial, a expressão para o potencial vetor longe do dipolo é semelhante àquela para o potencial escalar do dipolo elétrico. Ou seja, a dependência é do tipo $1/R^2$ e o numerador contém um termo proporcional a magnitude do momento de dipolo. É importante observar também que devido a não

existência de monopolos magnéticos, a dependência de mais baixa ordem que pode ser obtida para o vetor \vec{A} produzido por uma distribuição de corrente localizada, deve ser do tipo $1/R^2$. No caso eletrostático, devido a existência de monopólos elétricos (cargas isoladas), a dependência de mais baixa ordem para a função potencial eletrostático é do tipo $1/R$.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

O vetor densidade de fluxo magnético, é obtido de,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Realizando-se as operações de diferenciação, o vetor \vec{B} pode ser expresso na forma

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{a}_R)\hat{a}_R - \vec{m}] \quad (5.31)$$

Comparando com a expressão para o campo eletrostático a grandes distâncias de um dipolo elétrico,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{a}_R)\hat{a}_R - \vec{p}]$$

vemos que a configuração de linhas de \vec{B} é idêntica àquela obtida para as linhas de campo associadas ao vetor \vec{E} .

5.7 Campo de uma Distribuição de Dipolos

5.7.1 Vetor Magnetização

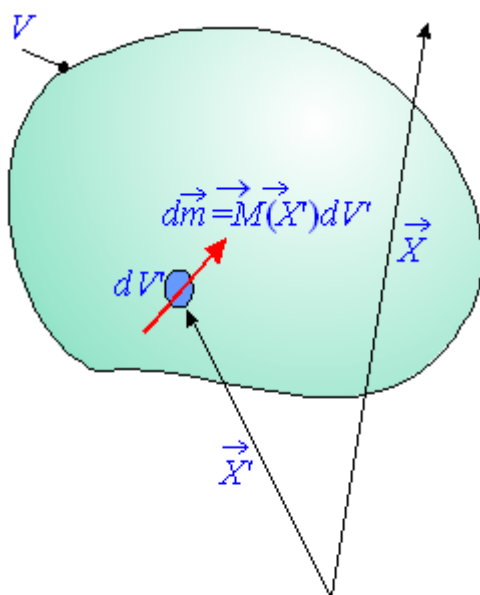


Fig.5.18 Geometria para a determinação do campo da matéria polarizada.

Considere-se o caso mais geral de uma distribuição de dipolos em um determinado volume V , conforme ilustrado na Fig.5.18. Apesar da natureza discreta da estrutura da matéria, do ponto de vista macroscópico pode-se assumir que os dipolos estejam distribuídos continuamente no interior do volume V . Sob esse ponto de vista, utiliza-se a descrição usual para o volume diferencial de um meio material, ou seja, ele deve ser grande comparado com distâncias interatômicas, e ainda assim pequeno comparado com a escala típica de variação das grandezas que definem o campo eletrostático.

Para computar-se o momento de dipolo líquido em um dado volume

diferencial dV' do material localizado no vetor posição \vec{X}' , introduz-se o **vetor magnetização** \vec{M} , definido pela relação:

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{X}')dV' \quad (5.32)$$

Da definição dada pela Eq.(2.40), pode-se notar que a unidade *SI* dessa grandeza é o A/m . Dessa expressão, dado dV' e o valor do vetor magnetização, obtém-se diretamente o momento de dipolo líquido no volume diferencial. Assim, o vetor \vec{M} é uma grandeza do tipo densidade volumétrica de dipolos, que fornece a magnitude, direção e sentido do momento de dipolo líquido em um volume diferencial dV . A menos da natureza vetorial, o vetor magnetização fornece uma representação da densidade local de dipolos na matéria, tendo papel semelhante àquele desempenhado pela densidade de corrente em um meio condutor.

Utilizando-se a Eq.(5.30), com o auxílio da Eq.(2.32), obtém-se a contribuição do volume diferencial dV' para o potencial vetor no ponto \vec{X} , na forma

$$d\vec{A}(\vec{X}) = \mu_0 \frac{d\vec{m} \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \mu_0 \frac{\vec{M}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV'$$

e o potencial total naquele ponto é obtido integrando-se as contribuições elementares sobre o volume V , ou seja,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{M}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' \quad (5.33)$$

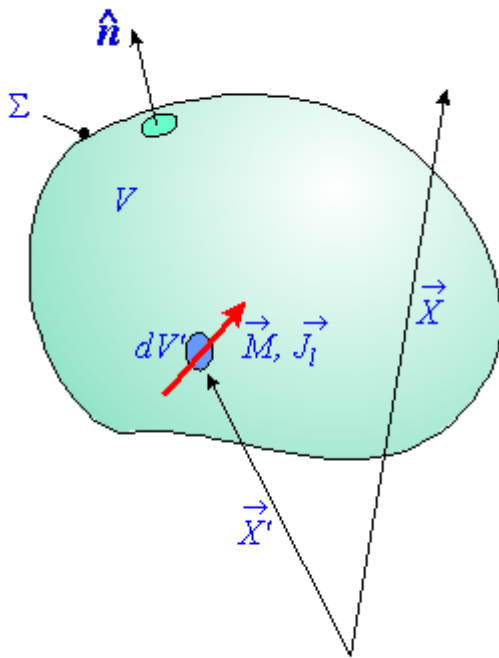
A Eq. (5.33) é uma expressão que permite computar o potencial, e por conseguinte, o vetor \vec{B} da matéria magnetizada. Existem materiais ferromagnéticos que são capazes de reter magnetização, mesmo na ausência de um campo aplicado. Os átomos ou moléculas desses materiais formam dipolos permanentes que em princípio são orientados aleatoriamente devido as vibrações térmicas. Quando se aplica um campo no material, suficiente para vencer o efeito térmico, é possível obter-se alinhamento dos dipolos, que pode persistir mesmo na ausência do campo externo.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

2.5.4. Correntes de magnetização e vetor campo magnético

Uma questão importante no estudo de magnetostática é a determinação de campos na presença de meios materiais. Como discutido na seção anterior, dipolos magnéticos na matéria fornecem uma contribuição para o potencial vetor e o objetivo da presente análise é caracterizar as contribuições advindas de correntes livre e de correntes atômicas, ou seja, aquelas ligadas aos átomos ou moléculas . Em essência, **um meio material pode ser caracterizado magneticamente como formado por dipolos magnéticos e correntes livres em suspensão no vácuo.**



Considere-se o volume V do meio material contendo uma distribuição de dipolos, caracterizada pelo vetor magnetização \vec{M} , e pela distribuição de corrente livre \vec{J}_l , conforme ilustrado na Fig.5.19. O potencial vetor observado no ponto \vec{X} é obtido por superposição utilizando-se as Eqs.(5.11) e (5.33), o que fornece,

Fig.5.19 Geometria para o cálculo da função potencial associada a um meio material.

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{J}_l(\vec{X}') dV'}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} + \int_V \frac{\mu_0 \vec{M}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' \quad (5.34)$$

Na segunda integral da Eq.(5.34) pode-se utilizar a relação,

$$\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

com o operador $\vec{\nabla}'$ atuando apenas nas coordenadas do ponto \vec{X}' . Com base nessa relação, a dependência espacial do integrando do segundo termo da Eq.(2.42) pode ser posta na forma,

$$\frac{\vec{M}(\vec{X}') \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \vec{M}(\vec{X}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

Fazendo-se uso da Eq.(1.31),

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = -\vec{A} \times \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

com as substituições, $\vec{A} \rightarrow \vec{M}$, $f \rightarrow \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$, resulta em

$$\vec{M}(\vec{X}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{X}') - \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)$$

Inserindo-se esta última expressão na Eq.(5.34) e arranjando-se os termos do segundo membro, obtém-se,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{\mu_0 [\vec{J}_l(\vec{X}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{X}')] dV'}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} + \int_V \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) dV'$$

A aplicação da identidade vetorial dada pela Eq.(1.49) na segunda integral da expressão anterior permite escrever o potencial vetor na forma,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \int_V \frac{\mu_0 [\vec{J}_l(\vec{X}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{X}')] dV'}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} + \oint_{\Sigma} \frac{dS' \mu_0 \vec{M}(\vec{X}') \times \hat{n}}{4\pi |\vec{X} - \vec{X}'|} \quad (5.35)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal dirigido para fora da superfície Σ que limita o meio material, conforme ilustrado na Fig.5.19.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A Eq.(5.35) expressa a forma característica com que o vetor magnetização, representativo do meio material, contribui para o potencial vetor. O numerador do integrando do primeiro termo da Eq.(5.35) representa uma **densidade de corrente equivalente**,

$$\vec{J}_{\text{eq}} = \vec{J}_l + \vec{J}_m \quad (5.36)$$

com a **densidade de corrente de magnetização** \vec{J}_m definida a partir da Eq.(5.35), i.e,

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (5.37)$$

Com essa identificação, a contribuição do volume do material para o potencial vetor ou equivalentemente, para o o vetor densidade de fluxo magnético, em um ponto do espaço é aquela proveniente da densidade equivalente de cargas, definida pela Eq.(5.36).

A integral de superfície no segundo membro da Eq.(2.43) representa a contribuição da superfície do material para o potencial vetor. O numerador do integrando desse termo equivale magneticamente a uma **densidade superficial corrente de magnetização**,

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}, \quad (5.38)$$

Com a introdução da magnetização do material pode-se determinar de que forma esse parâmetro deve ser levado em conta na forma diferencial da lei de Ampère, dada pela Eq.(5.23). Notando-se que o segundo membro dessa equação representa a **densidade de corrente**, com correntes livres e dipolares simultaneamente levadas em conta, com base na Eq.(5.36) pode-se escrever a Eq.(5.23) na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{eq}}$$

Inserindo-se a Eq.(5.36), com o auxílio da Eq.(5.37), na expressão anterior obtém-se

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}_l$$

Dessa última expressão, pode-se definir uma grandeza de campo auxiliar, cuja equação fica expressa inteiramente em termos da densidade de corrente livre. Basta notar que o rotacional do vetor

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

depende apenas da densidade de corrente livre \vec{J}_l . Esse novo campo auxiliar é denominado de **vetor campo magnético**, sendo medido em A/m no sistema SI. Com a introdução do vetor \vec{H} , a lei de Ampère em forma diferencial assume a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J}_l \quad (5.40)$$

com os vetores \vec{H} , \vec{B} e \vec{M} , satisfazendo a relação constitutiva

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.41)$$

Com a introdução do vetor campo magnético, a magnetostática fica descrita pelas Eqs. (5.15) e (5.40), levando-se em conta a relação constitutiva, dada pela Eq.(2.41), entre os vetores \vec{H} , \vec{B} e \vec{M} . A vantagem de introduzir-se o vetor campo magnético na formulação é que nesse novo ponto de vista, a densidade de corrente que aparece na lei de Ampère, representa apenas o movimento dos portadores livres no material, com o efeito das correntes atômicas ou moleculares sendo levado em conta na Eq.(5.41). Observe-se que o vetor densidade de fluxo magnético é aquele que leva em conta todas as fontes de carga possíveis na matéria, ou seja, livres ou ligadas. O vetor campo magnético, por outro lado, aparece como grandeza auxiliar, com rotacional diretamente relacionado a densidade de corrente livre, facilitando assim o tratamento das equações de Maxwell.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

5.8 Tipos de meios materiais

5.8.1 Meios lineares

Existem certos materiais que não exibem momento de dipolo líquido na ausência de um campo aplicado. Na presença de um estímulo magnético, correntes atômicas são induzidas nos átomos ou moléculas. Materiais diamagnéticos são aqueles cuja corrente induzida tende a produzir um campo de reação que se opõe ao campo externamente aplicado. Em materiais paramagnéticos a magnetização induzida se dá com reforço do campo aplicado. Em ambas as classes de materiais, a magnetização é linearmente relacionada com o campo aplicado por uma relação do tipo

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5.42)$$

com $\chi_m < 0$ para materiais diamagnéticos e $\chi_m > 0$ para materiais paramagnéticos. Esse parâmetro é denominado de susceptibilidade magnética e é adimensional.

Assim, em meios lineares, diamagnéticos ou paramagnéticos, as Eqs.(5.41) e (5.42) permitem obter a relação de linearidade entre os vetores \vec{B} e \vec{H} ,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.43)$$

onde

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (5.44)$$

é denominado de **permeabilidade magnética** do material. Note-se que $\mu/\mu_0 < 1$ para materiais diamagnéticos e $\mu/\mu_0 > 1$ para materiais paramagnéticos.

5.8.2 Meios não-lineares

A estrutura de materiais **ferromagnéticos** é tal que seus átomos ou moléculas constituintes exibem um momento de dipolo permanente. Na ausência de um campo externo, vibrações térmicas mantém os dipolos orientados aleatoriamente, resultando em uma magnetização média nula. A aplicação de um pequeno campo no material pode ser suficiente para vencer a barreira térmica produzindo um alinhamento dos dipolos. O acoplamento dos dipolos devido aos campos dipolares pode ser suficientemente forte, de forma que retirando-se o campo externo, o material seja capaz de reter uma magnetização residual que só pode ser quebrada revertendo-se o campo externo, ou aquecendo-se o material ou através de choques mecânicos. Materiais desse tipo, além de serem capazes de reter magnetização permanente, exibem uma **relação não linear entre campo e magnetização**. O tratamento de campos magnéticos na presença de tais materiais é feito utilizando-se as equações da magnetostática conjuntamente com a relação constitutiva mais geral expressa pela Eq.(5.41).

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

5.9 Condições de Contorno

A forma como é feita a transição de campos entre meios distintos é ditada pelas condições de contorno examinadas a seguir. Para isso, considere-se a interface entre os meios 1 e 2 conforme ilustrado na Fig.5.20. Nessa figura estão desenhados um cilindro imaginário de altura Δh e área de base ΔS , bem como um caminho fechado C com segmentos de dimensões Δl e Δh . Ambas as figuras estão parcialmente contidas em cada meio. As grandezas de campo, na região bem próxima à interface, são representadas pelos vetores (\vec{H}_1, \vec{B}_1) e (\vec{H}_2, \vec{B}_2) , nos meios 1 e 2, respectivamente. O vetor unitário tangente à interface é representado pelo parâmetro \hat{t} , com \hat{n} representando o vetor unitário normal à interface, dirigido do meio 1 para o meio 2.

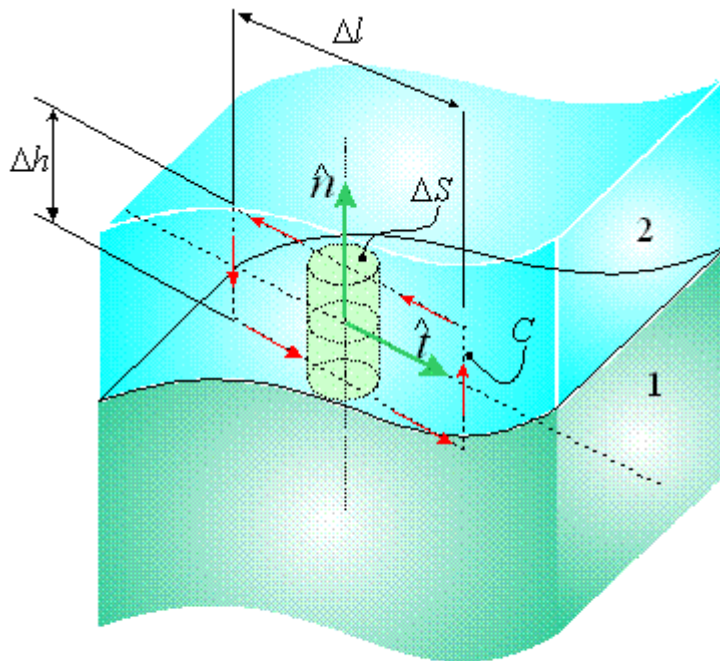


Fig.5.20 Trecho da interface entre dois meios distintos e geometria utilizada para a determinação das condições de contorno.

Utilizando-se a lei de Gauss para o campo magnético

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

com Σ correspondendo a superfície cilíndrica mostrada na Fig.5.20, no limite em que $\Delta h \rightarrow 0$, conclui-se imediatamente que a componente normal de \vec{B} tem de ser contínua, i.e.,

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

(5.45)

Aplicando-se a lei de Ampère para o caminho fechado mostrado na Fig.2.23, obtém-se

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot \hat{t} \Delta l - \vec{H}_2 \cdot \hat{t} \Delta l = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \vec{J} \cdot \hat{u} dS$$

onde \hat{u} é o unitário dirigido no sentido do polegar, ao se aplicar a regra da mão direita ao caminho fechado C da Fig.5.20. No limite o segundo membro da última expressão reduz-se à densidade superficial de corrente na interface, ou seja,

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \hat{t} = \vec{K} \cdot \hat{u}$$

e essa última relação pode ser posta na forma vetorial

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (5.46)$$

Essa última relação demonstra que a presença de uma densidade superficial de corrente na interface causa uma descontinuidade na componente tangencial do campo magnético.

Problemas

5.1 Determine o vetor \vec{B} , resultante da configuração do par de planos condutores infinitamente extensos, percorridos por correntes de superfície,

$$\vec{K}_1 = k_1 \hat{a}_x \text{ em } z = \frac{a}{2},$$

$$\vec{K}_2 = k_2 \hat{a}_x \text{ em } z = -\frac{a}{2}$$

Determine a relação entre k_1 e k_2 , de forma que:

- o campo entre planos seja nulo.
- o campo nas regiões $z > a/2$ e $z < -a/2$, seja nulo.

5.2 Calcule o vetor \vec{B} no centro de uma espira quadrada de lado a , percorrida por uma corrente I .

5.3 Dois fios paralelos infinitamente longos, separados por uma distância d são percorridos por correntes I_1 e I_2 . Considere a região definida por um plano paralelo a ambos os fios e equidistante dos mesmos. Defina um sistema de coordenadas adequado e determine o vetor \vec{B} nesse plano para os seguintes casos:

- $I_1 = I_2$
- $I_1 = -I_2$

5.4 Uma distribuição superficial de corrente dada por

$$\vec{K} = K_0 \hat{a}_\phi$$

existe na superfície cilíndrica de raio a . Admitindo que essa distribuição esteja imersa no vácuo determine o vetor \vec{B} em todo o espaço.

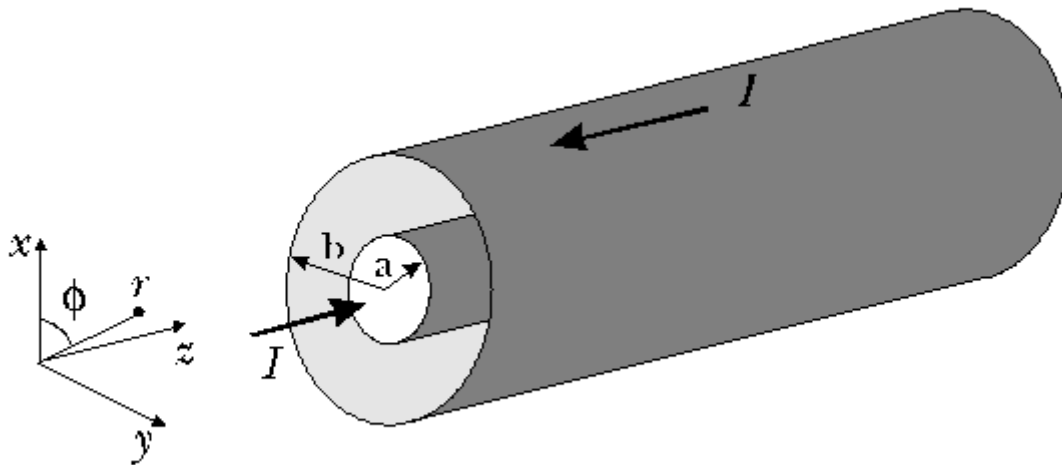
5.5 Sobre a superfície da esfera de raio a , circula corrente distribuída com densidade superficial $\vec{K} = (K_0 \sin \theta) \hat{a}_\phi$, onde K_0 (A/m) é uma constante. Admitindo que o centro da esfera corresponda à origem do sistema de coordenadas, determine:

- A corrente total que atravessa a semicircunferência $R=a$, $\phi = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
- O vetor \vec{B} na origem.

5.6 Considere um cabo coaxial infinitamente longo centrado no eixo z , conforme ilustrado na figura seguinte. No condutor interno de raio a , existe uma distribuição uniforme de corrente definida pelo vetor densidade de corrente,

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z$$

onde I é a corrente total no condutor interno. O cilindro externo de raio b tem espessura desprezível e conduz uma corrente total I no sentido $-z$, conforme ilustrado na figura. Determine o **vetor** campo magnético para $0 \leq r \leq a$, $a < r < b$ e $r > b$.



Prob. 5.6

- 5.7** Um disco circular de raio a e espessura $t \ll a$, está localizado no plano $z=0$, com centro no ponto $(x=0, y=0, z=0)$. Admitindo a existência no disco de uma densidade de corrente $\vec{J} = kr^n \hat{\alpha}_\phi$ (A/m^2), onde n é um número inteiro positivo, determine:
- a corrente total que atravessa o segmento de reta definido por $z=0, \phi=0, 0 \leq r \leq a$.
 - o vetor \vec{B} na origem.
- 5.8** Uma esfera de raio a , imersa no vácuo, é magnetizada permanentemente com um vetor magnetização constante \vec{M} . Determine
- as correntes de magnetização de volume e de superfície
 - os vetores \vec{B} e \vec{H} no centro da esfera.
 - o momento de dipolo da esfera
 - os vetores \vec{B} e \vec{H} a uma distância $R \gg a$
- 5.9** Um cilindro de raio a e comprimento L está magnetizado com vetor magnetização constante, dirigido paralelamente ao eixo de simetria do cilindro. Determine os vetores \vec{B} e \vec{H} em um ponto arbitrário do eixo de simetria do cilindro.
- 5.10** Carga é distribuída com densidade uniforme ρ no interior de uma esfera de raio a . Admitindo que a esfera esteja executando um movimento de rotação, em torno de um eixo passando pelo seu diâmetro, com velocidade angular constante ω , determine:
- o vetor magnetização em um ponto qualquer no interior da esfera
 - as correntes de magnetização volumétrica e superficial
 - os vetores \vec{B} e \vec{H} no centro da esfera
 - o momento de dipolo magnético da esfera
 - o vetor \vec{B} em um ponto localizado a uma distância $R \gg a$ do centro da esfera.