

ELETROMAGNETISMO - PARTE 1 - Edição 01.2011
Eduardo Fontana, PhD
Professor Titular
Departamento de Eletrônica e Sistemas
UFPE

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Capítulo 4 - Condução Elétrica

[4.1 Introdução](#)
[4.2. Corrente elétrica](#)
[4.3. Portadores de Carga sob a Ação de um Campo Eletrostático](#)
[4.4. Lei de Ohm](#)
[4.5 Princípio da Conservação da Carga](#)
[4.6 Dissipação de Energia em Condutores](#)
[4.7 Problemas de Valores de Fronteira em Meios Condutores](#)
[Problemas](#)

4.1 Introdução
4.2. Corrente elétrica
4.3. Portadores de Carga sob a Ação de um Campo Eletrostático
4.4. Lei de Ohm
4.5 Princípio da Conservação da Carga
4.6 Dissipação de Energia em Condutores
4.7 Problemas de Valores de Fronteira em Meios Condutores
Problemas

4.1 Introdução

Neste Capítulo, estamos interessados em analisar as propriedades de meios materiais condutores e estabelecer a relação básica entre fluxo de carga e campo elétrico nestes materiais. A estrutura de bandas de energia de um sólido juntamente com a sua composição determina quais tipos de compostos permitem a passagem de uma corrente elétrica com uma maior ou menor facilidade. Esta corrente elétrica pode ser produzida, por exemplo, pela aplicação de uma diferença de potencial entre pontos de contato em áreas distintas na superfície do material como é o caso de materiais condutores ou mesmo pela aplicação de radiação eletromagnética em semicondutores.

A teoria quântica prevê que elétrons de um átomo isolado apresentam níveis discretos de energia. No estado de mais baixa energia ou no estado natural, os elétrons permanecem ligados ao átomo executando movimentos ao redor do núcleo de forma a manter a energia do átomo constante. Geralmente é necessária muita energia para libertar o elétron do átomo neste caso. Quando muitos átomos são arranjados para formar um sólido, os níveis de energia resultantes deste arranjo ficam tão próximos entre si que possibilitam a formação de faixas contínuas de energias permitidas para os elétrons, ou **bandas de energia**. Elétrons possuindo energia dentro da faixa de valores da **banda de valência** tendem a permanecer transitando na região em volta de seus átomos de origem e átomos vizinhos, participando desta forma da ligação química responsável pela coesão do sólido. Por outro lado, elétrons com energia na faixa de valores da **banda de condução**, seja através da aplicação de um campo externo, de radiação eletromagnética, ou mesmo naturalmente como resultado das vibrações térmicas no sólido, podem transitar no interior do material. A disposição relativa entre as bandas de valência e de condução determina portanto as propriedades de condução de sólidos.

Na Fig.4.1, representamos esquematicamente e de uma forma bem simplificada a estrutura de bandas de energia para três classes de materiais distintos. No diagrama da Fig.4.1a existe uma grande separação entre os limites superior e inferior das bandas de valência e de condução, respectivamente. Nestes materiais, os elétrons preenchem completamente a banda de valência. A aplicação de um campo externo só poderá causar transições para a banda de condução se o campo for razoavelmente intenso. Materiais exibindo este tipo de estrutura de bandas são denominados **isolantes**. No diagrama da Fig. 4.1b, a separação entre bandas de valência e condução é bem menor que aquela ilustrada na Fig.4.1a sendo relativamente mais fácil se produzir elétrons de condução. A banda de valência nestes materiais, apresenta uma pequena faixa de valores de energia não ocupados pelos elétrons de valência devido a excitação térmica para a banda de condução. Materiais exibindo este tipo de estrutura são classificados como **semicondutores**. No diagrama da Fig.4.1c, existe uma faixa de valores de energia que é comum às bandas de valência e de condução. Elétrons tendo energia compreendida nesta faixa de valores podem transitar pelo sólido sob a ação de um campo elétrico externo relativamente fraco, e materiais exibindo este tipo de estrutura de bandas são denominados de **condutores**. Materiais pertencendo a esta última classificação são os objetos de estudo deste Capítulo.

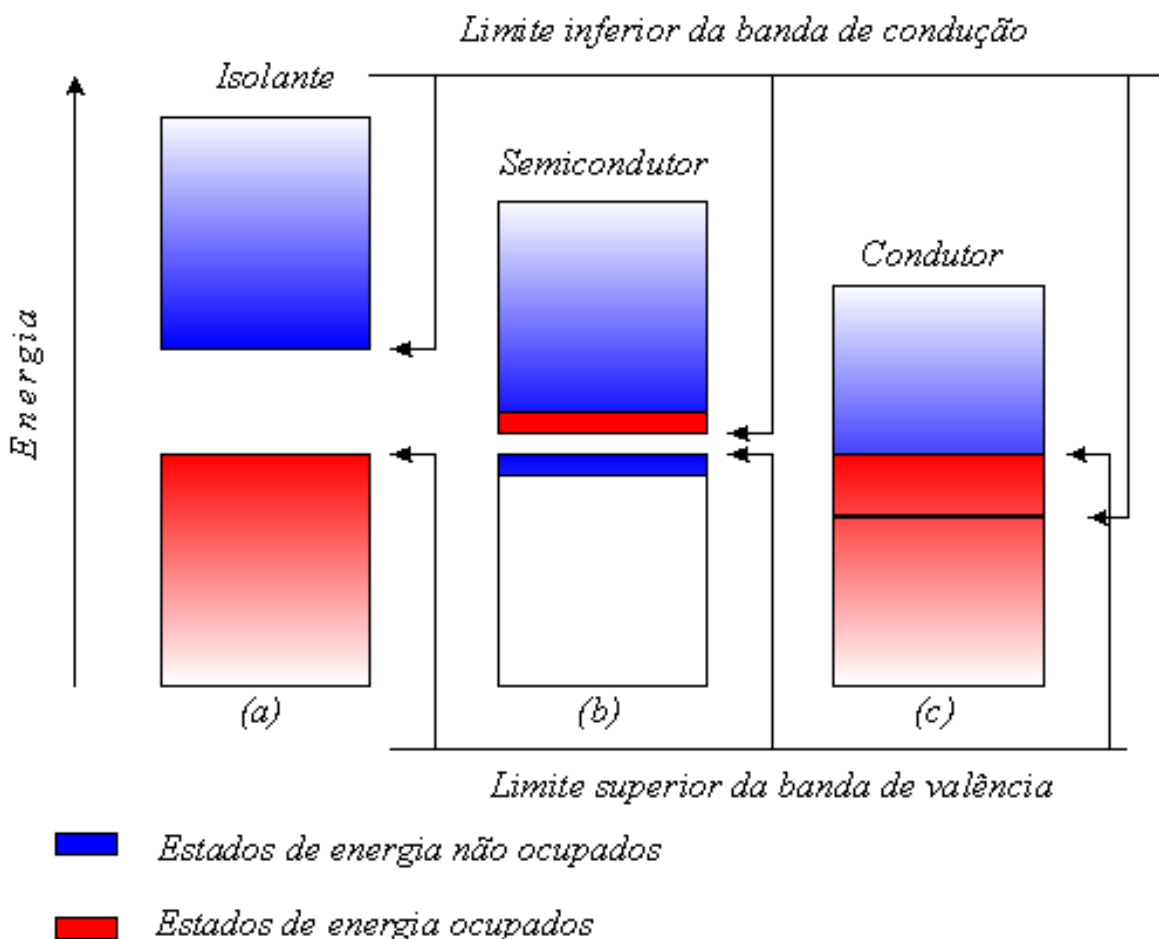


Fig.4.1 Esquema simplificado de representação da estrutura de bandas de energia para três tipos de materiais

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

4.2. Corrente elétrica

Cargas em movimento em um meio constituem uma corrente elétrica que é medida pela vazão da carga através de uma determinada seção de área do meio de condução. Com base na Fig.4.2, se dq Coulombs atravessam a seção transversal do fio condutor em um tempo dt segundos, então a corrente elétrica I é definida pela relação,

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (4.1)$$

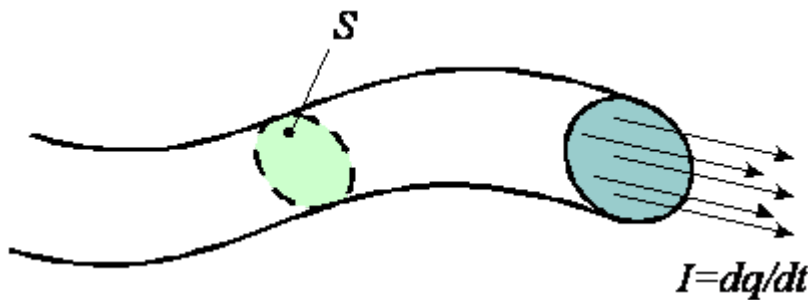


Fig.4.2 Geometria de definição da corrente elétrica em um condutor

A unidade elétrica da grandeza I derivada do sistema MKSC é o *Coulomb/Seg Ampere*. A corrente elétrica apesar de ser um conceito útil na quantificação da vazão de cargas em condutores, não pode fornecer detalhes sobre a distribuição de corrente em cada ponto do meio de condução. Para isso, torna-se necessária a introdução de uma grandeza vetorial que possa fornecer uma descrição detalhada da direção e sentido do movimento de cargas em cada ponto do meio de condução. Consideremos por um momento a situação ilustrada na Fig.4.3, onde admite-se que todos os portadores de carga q no meio de condução estejam se movendo com a mesma velocidade \vec{u} . Consideremos uma seção de área diferencial do meio de condução, com o vetor $d\vec{S}$ formando um ângulo θ com o vetor velocidade \vec{u} . Sob estas condições, a quantidade de carga que atravessa a seção de área dS no tempo dt é toda aquela que estiver contida no volume diferencial do paralelepípedo oblíquo sombreado ilustrado na Fig.4.3, de área de base dS e comprimento de aresta udt . Este volume diferencial é obtido da relação,

$$dV = dSudt \cos \theta$$

Se existem N portadores de carga por unidade de volume do material, então a carga total dq contida neste volume diferencial é dada por,

$$dq = NqdV = Nqdt(udS \cos \theta)$$

e a corrente dI atravessando a seção de área diferencial dS é simplesmente,

$$I = Nq(udS \cos \theta)$$

que pode ser expressa na forma,

$$I = Nq\vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

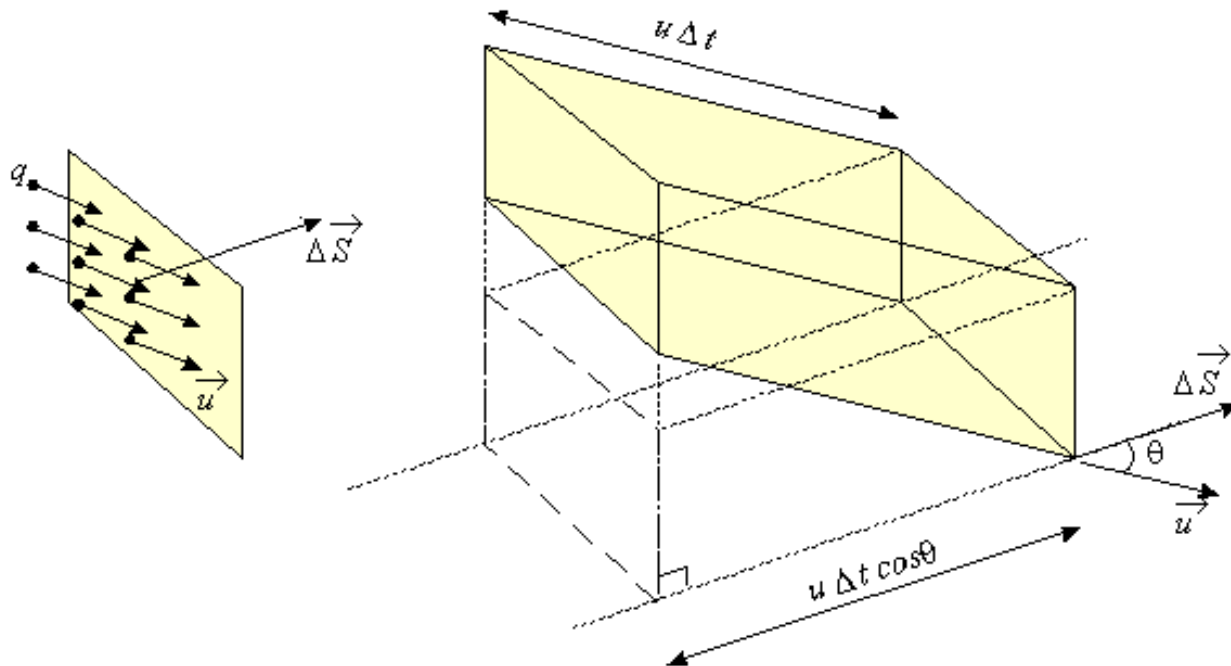


Fig. 4.3 Geometria utilizada na determinação da corrente através de uma seção diferencial de um meio de condução.

A hipótese feita anteriormente de todos os portadores exibirem a mesma velocidade é muito restrita, pois em condutores de uma forma geral, existem colisões entre portadores móveis bem como eventos de colisão destes portadores com os átomos ou íons compoendo o sólido. Como resultado destas colisões, as velocidades dos portadores é completamente aleatória, com uma distribuição determinada pela temperatura do material. Para levarmos este efeito em consideração, vamos admitir que no meio de condução existam M grupos de portadores com o k -ésimo grupo exibindo uma densidade N_k e velocidade \vec{u}_k . A contribuição para a corrente elétrica através da seção diferencial dS devido ao k -ésimo grupo é,

$$dI_k = qN_k\vec{u}_k \cdot d\vec{S}$$

e a corrente total dI é obtida da soma,

$$dI = q \left(\sum_{k=1}^M N_k \vec{u}_k \right) \cdot d\vec{S} \quad (4.3)$$

A densidade total de portadores no material é

$$N = \sum_{k=1}^M N_k$$

o que permite identificar da Eq.(4.3) a velocidade média \vec{v} da relação,

$$\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M N_k \vec{u}_k \quad (4.4)$$

e a Eq.(4.3) pode ser posta na forma,

$$dI = Nq\vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (4.5)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A Eq.(4.5) sugere a definição de um vetor densidade de corrente medido em *Amperes/m²* a partir da relação,

$$\vec{J} = Nq\vec{v} \quad (4.6)$$

Muitas vezes é conveniente se fazer uso da aproximação macroscópica em que admite-se carga distribuída continuamente no meio de condução. Sob estas condições, a densidade de carga associada aos portadores móveis no meio é obtida a partir da transformação, $Nq \rightarrow \rho$ e a densidade de corrente pode ser expressa na forma,

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad (4.7)$$

É importante observar que o vetor densidade de corrente tem a mesma direção e sentido da velocidade média local dos portadores de carga no material. A partir das Eqs(4.5) e (4.6) pode se determinar a corrente total atravessando uma determinada seção de área macroscópica S de um meio de condução da relação,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.8)$$

4.3. Portadores de Carga sob a Ação de um Campo Eletrostático

Colisões em sólidos são os mecanismos responsáveis pelo intercâmbio da energia entre os portadores de carga e os átomos ou íons compondo o material, o que resulta eventualmente em dissipação de calor no material. Um portador de carga no material pode se deslocar durante um tempo característico até sofrer uma colisão. A este tempo τ_c dá-se a denominação de **tempo de colisão**. Se em um determinado instante de tempo pudéssemos estabelecer uma condição inicial para as velocidades dos diversos portadores no material tal que a velocidade média fosse dada por um valor \vec{v}_0 , deveríamos esperar que após um tempo aproximadamente igual ao tempo de colisão τ_c , a velocidade média decaísse substancialmente com respeito ao seu valor inicial. Apesar das mudanças bruscas nas direções e sentidos das velocidades dos portadores individuais resultantes dos eventos de colisão, esperamos que o decréscimo no valor médio destas velocidades ocorra continuamente e de uma forma razoavelmente bem comportada pois só desta forma tem sentido a introdução do conceito de velocidade média. A hipótese mais natural para sistemas de muitas partículas com velocidades distribuídas aleatoriamente como resultado dos eventos de colisão, é que a velocidade média decaia exponencialmente com um tempo característico τ_c a partir do seu valor inicial, ou seja,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \exp(-t/\tau_c) \quad (4.9)$$

A Eq.(4.9) é solução da equação diferencial,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau_c} \vec{v} = 0 \quad (4.10)$$

ou seja, a Eq.(4.10) governa a resposta natural para a velocidade média de uma população de cargas móveis cujas velocidades são freqüentemente modificadas por eventos aleatórios de colisão. Neste contexto o tempo de colisão τ_c pode também ser interpretado como o intervalo de tempo após o qual o sistema de partículas carregadas perde uma porção razoável da correlação que existia no tempo inicial. Consideremos uma porção diferencial de volume do material dV localizada no vetor \vec{X} representando o vetor posição médio dos portadores no

volume no tempo t , com velocidade média $\vec{v} = \frac{d\vec{X}}{dt}$. A massa total de portadores em movimento no volume diferencial é $dm = NmdV$, com m a massa de cada portador de carga. Multiplicando ambos os membros da Eq.(4.10) por dm , resulta,

$$dm \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = - \frac{dm}{\tau_c} \vec{v} \quad (4.11)$$

o que mostra que a força devido aos eventos de colisão é do tipo atrito viscoso, pois é proporcional a velocidade média, se opondo ao movimento médio dos portadores de carga. Se um campo eletrostático é aplicado no material, cada elemento de volume contendo cargas em movimento experimenta uma força $d\vec{F} = dq\vec{E}$, onde, $dq = NqdV$ é a carga total de portadores móveis contida no volume diferencial dV . Este efeito pode ser levado em conta na Eq. (4.11) pela adição desta força externa, resultando em,

$$dm \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = - \frac{dm}{\tau_c} \vec{v} + dq\vec{E} = - \frac{dm}{\tau_c} \vec{v} + NqdV\vec{E}$$

Dado que a massa de portadores móveis é $dm = NmdV$, resulta,

$$NmdV \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = - \frac{NmdV}{\tau_c} \vec{v} + NqdV\vec{E}$$

donde

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau_c} \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (4.12)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

A equação diferencial (4.12) representa a evolução no tempo do vetor velocidade média levando-se em conta os eventos de colisão e a existência de um campo elétrico externamente

aplicado no meio de condução. Se admitirmos que o sistema exibe uma velocidade média inicial \vec{v}_0 no tempo $t = 0$, a solução da Eq.(4.12) é da forma,

$$\vec{v}(t) = \frac{q\tau_c}{m} \vec{E} + \left(\vec{v}_0 - \frac{q\tau_c}{m} \vec{E} \right) \exp(-t/\tau_c) \quad (4.13)$$

Se a velocidade média inicial é $\vec{v}_0 = 0$ como deve-se esperar para um sistema em equilíbrio térmico, a Eq.(4.13) se reduz a forma,

$$\vec{v}(t) = \frac{q\tau_c}{m} \vec{E} [1 - \exp(-t/\tau_c)] \quad (4.14)$$

e o vetor velocidade média se alinha na direção do campo aplicado adquirindo um valor final,

$$\vec{v}_f = \frac{q\tau_c}{m} \vec{E} \quad (4.15)$$

após alguns intervalos de tempo τ_c conforme ilustrado na Fig.4.4.

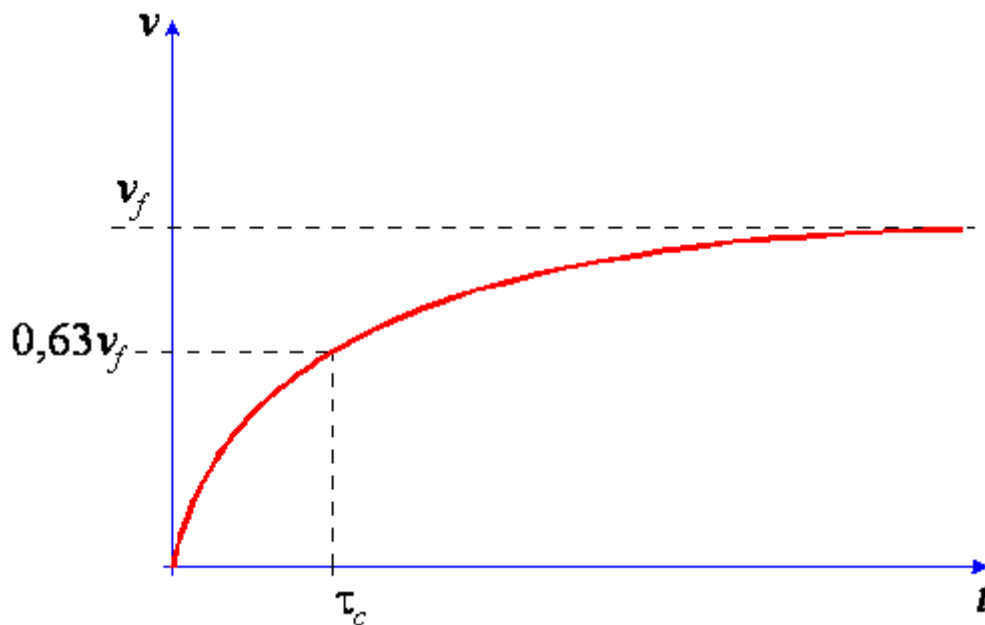


Fig. 4.4. Evolução no tempo do vetor velocidade média resultante de um campo elétrico externamente aplicado em um meio de condução.

Utilizando a Eq.(4.15) e a definição do vetor densidade de corrente dada pela Eq.(4.6), obtém-se a relação,

$$\vec{J} = \frac{Nq^2\tau_c}{m} \vec{E} \quad (4.16)$$

que mostra uma dependência linear entre os vetores \vec{J} e \vec{E} . Esta relação foi obtida na hipótese de o meio de condução ser isotrópico resultando na colinearidade entre os dois vetores. Neste modelo também não foram consideradas possíveis influências do campo aplicado sobre o valor do tempo de colisão. Para campos muito intensos é possível que o tempo de colisão diminua como resultado de uma maior aceleração devido a uma força elétrica mais severa atuando sobre os portadores de carga. É de se esperar portanto que no regime de campos intensos, obtenha-se uma relação não linear entre os vetores \vec{J} e \vec{E} .

4.4. Lei de Ohm

Realizando medidas simultâneas de corrente e diferença de potencial entre as extremidades de materiais condutores de seção reta uniforme, Ohm determinou uma relação linear entre estas duas grandezas onde a constante de proporcionalidade era dependente das dimensões do condutor e de sua constituição física. Com base na Fig.4.5, sendo V a diferença de potencial aplicada nas extremidades do cilindro condutor de seção reta S e comprimento l , e I a corrente fluindo através do condutor, esta relação pode ser posta matematicamente na forma,

$$V = RI \quad (4.17)$$

onde o parâmetro R é denominado de **resistência elétrica** do condutor, que para um condutor de seção reta uniforme é dado por,

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (4.18)$$

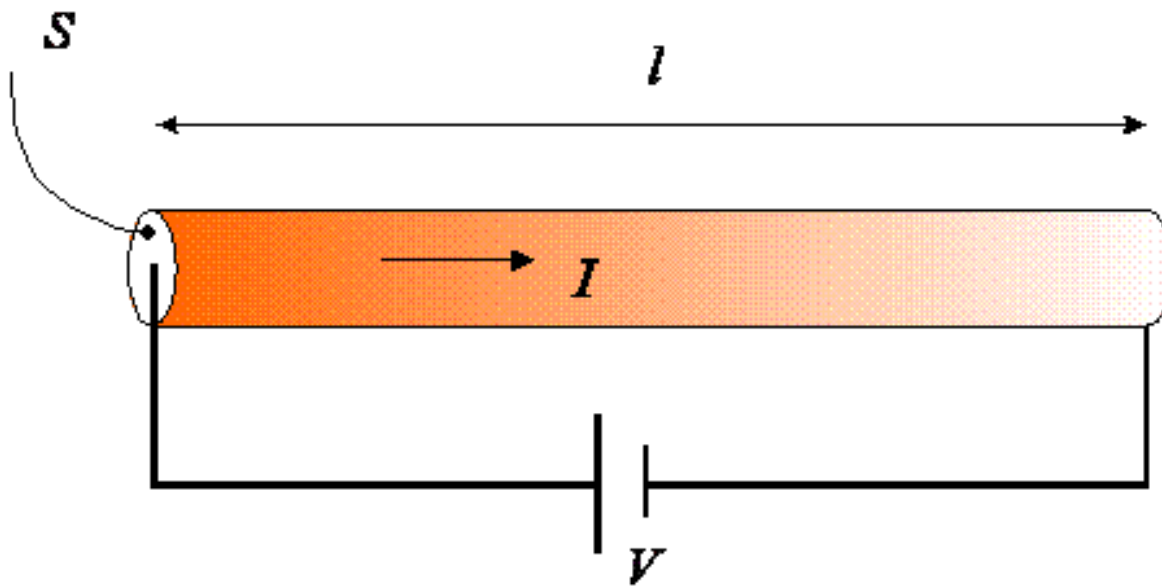


Fig.4.5. Condutor de seção reta uniforme conectado entre os pólos de uma bateria e parâmetros utilizados na definição da resistência elétrica obtida da lei de Ohm.

Resistência elétrica assim definida é medida em unidades de *Volt/Ampere* que define a grandeza *Ohm* representada pelo símbolo Ω . O parâmetro σ que aparece na Eq.(4.18) é medido em unidades de $(\Omega.m)^{-1}$ e é denominado de **condutividade elétrica**, sendo dependente da composição física do material. Bons condutores exibem altos valores de condutividade e baixa resistência a passagem de corrente elétrica. Na Tabela 4.1 são tabulados valores representativos da condutividade de alguns materiais medidos a temperatura ambiente. Vale notar a diferença

em 4 ordens de grandeza entre as condutividades típicas de bons condutores relativamente àquela do Silício puro.

Tabela 4.1 Condutividade de alguns materiais (T=300 K)

Material	Condutividade (ohm.m) ⁻¹
Alumínio	3.77×10^7
Cobre	5.98×10^7
Ouro	4.26×10^7
Prata	6.29×10^7
Silício	1.00×10^3

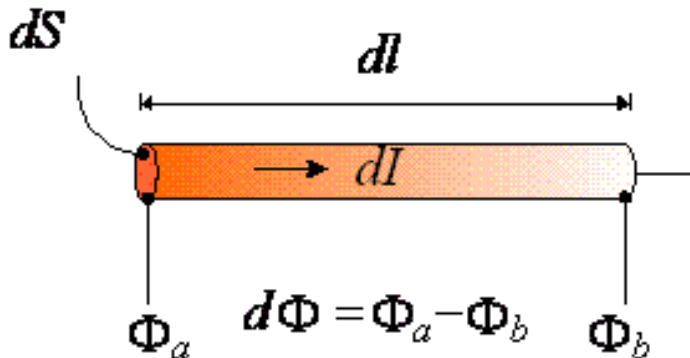


Fig.4.6. Geometria utilizada na dedução da lei de Ohm em forma diferencial

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Com base nas Eqs.(4.17) e (4.18) é possível obter uma relação entre campo e densidade de corrente válida em cada ponto de um meio material satisfazendo a lei de Ohm. Para isso consideramos um fio diferencial de seção reta dS e comprimento dl conforme ilustrado na Fig.4.6, e analisamos a relação entre corrente e diferença de potencial entre as seções terminais a e b . Aplicando a Eq.(2.23) no trecho de comprimento dl , resulta,

$$\Phi_a - \Phi_b = dV = E_n dl$$

onde E_n é a componente do vetor \vec{E} no sentido do vetor \hat{n} . Utilizando a lei de Ohm, resulta,

$$E_n dl = dl \frac{dl}{\sigma dS} = J_n dS \frac{dl}{\sigma dS}$$

donde,

$$J_n = \sigma E_n$$

Se o meio é isotrópico esta relação pode ser generalizada na forma,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.19)$$

que é a lei de Ohm em forma diferencial. Isotropia implica na colinearidade entre os vetores \vec{J} e \vec{E} . Se o meio de condução é anisotrópico, condutividades distintas ao longo de direções distintas no material resulta em uma relação matricial entre os vetores \vec{J} e \vec{E} do tipo,

$$\vec{J} = \tilde{\sigma}\vec{E}, \quad (4.20a)$$

com

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.20b)$$

Considerando a lei de Ohm em meios isotrópicos, podemos obter uma expressão para a condutividade em termos de parâmetros microscópicos do material, pela combinação das Eqs. (4.16) e (4.19) resultando em,

$$\sigma = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (4.21)$$

A Eq.(4.21) demonstra como os vários parâmetros microscópicos do material contribuem para sua condutividade. Basicamente para ser um bom condutor o material deve exibir uma alta densidade de portadores de carga e o tempo de colisão deve ser razoavelmente longo. Para semicondutores, portadores de carga existem nas bandas de condução (elétrons) e de valência (lacunas). A condutividade neste caso é expressa na forma,

$$\sigma = \frac{N_+q_+^2\tau_+}{m_+} + \frac{N_-q_-^2\tau_-}{m_-} \quad (4.22)$$

onde os subscritos (-) e (+) na Eq.(4.22) servem para identificar os parâmetros microscópicos associados aos elétrons e lacunas, respectivamente.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Exemplo 4.1: Estimativa do tempo de colisão para um bom condutor

A Eq.(4.21) permite estimar o tempo de colisão típico dos portadores de carga em um condutor a partir de medidas de condutividade. Isso corresponde dizer que, a partir da medição de parâmetros macroscópicos tais como corrente e diferença de potencial, pode-se obter informação sobre um parâmetro microscópico importante do material. A densidade de portadores pode ser estimada para um bom condutor como correspondendo a 1 elétron liberado por átomo da rede cristalina. Admitindo a hipótese razoável de um espaçamento típico de 3 Å entre átomos da rede, a densidade de portadores é aproximadamente,

$$N \approx \frac{1}{(3 \times 10^{-10} \text{ m})^3} = \frac{1}{27} \times 10^{30} \text{ m}^{-3}$$

Utilizando os parâmetros para o elétron: $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$ e $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ e assumindo um condutor com uma condutividade típica $\sigma = 10^7 (\Omega.m)^{-1}$, em conformidade com os números representados na Tabela 4.1, a Eq.(4.21) fornece a seguinte estimativa para o tempo de colisão de um bom condutor,

$$\tau \approx 9.6 \times 10^{-15} \text{ seg}$$

4.5 Princípio da Conservação da Carga

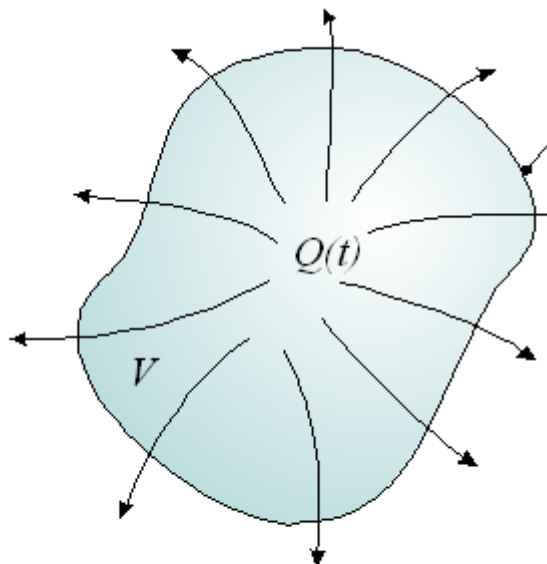


Fig.4.7. Geometria do volume de cargas utiliza dedução do princípio da conservação da carga

O princípio da conservação da carga estabelece que em um sistema isolado, cargas não podem ser criadas nem destruídas. Para estabelecermos matematicamente este princípio em termos das grandezas físicas pertinentes a teoria eletromagnética, consideremos a situação ilustrada na Fig. 4.7 onde existe um volume de existência de cargas que podem fluir através da superfície limitante Σ . A corrente total I para fora da superfície Σ é obtida de,

$$I = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

onde $d\vec{S}$ é o vetor área diferencial apontando para o exterior do volume V . Pelo princípio da conservação da carga, isto só poderá ocorrer se o fluxo de carga for balanceado pela taxa de variação da carga total contida no volume. Ou seja, se o fluxo para fora de Σ for positivo a taxa de variação será negativa e vice-versa, ou matematicamente,

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{dQ}{dt}$$

A carga total no volume V pode ser expressa como uma integral de volume da densidade de carga ρ , resultando em,

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (4.23)$$

que representa o princípio de conservação da carga em sua forma integral. A forma diferencial da Eq.(4.23) é obtida assumindo-se um volume fixo, de forma que a derivada no tempo atue apenas sobre a função ρ , resultando, em,

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Aplicando o Teorema de Gauss no primeiro membro da última relação, e assumindo um volume diferencial para as integrações, resulta finalmente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.24)$$

A Eq.(4.24) ajuda explicar a tendência de cargas livres se distribuírem na superfície de materiais condutores no regime estático. Para isso vamos considerar um meio condutor satisfazendo a lei de Ohm representada em forma diferencial pela Eq.(4.19). Admitindo ainda que a permissividade elétrica do meio de condução seja ϵ , resulta,

$$\vec{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}$$

que inserido na Eq.(4.24), fornece,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Se os parâmetros ϵ e σ independem das coordenadas, a última relação pode ser posta na forma,

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Utilizando a Eq. de Maxwell para a divergência do vetor \vec{D} dada pela Eq.(2.48) resulta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} \rho = 0 \quad (4.25)$$

com,

$$\tau_r = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (4.26)$$

é denominado o **tempo de relaxação** do excesso de cargas no material. Admitindo que $\rho(t=0) = \rho_0$, a solução da Eq.(4.25) é dada por,

$$\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau_r) \quad (4.27)$$

A Eq.(4.27) mostra que qualquer carga no interior de um material condutor tende a decair exponencialmente como função do tempo com um tempo característico da ordem de τ_r , o qual será tanto menor quanto maior for a condutividade do material. Pelo princípio da conservação da carga, qualquer excesso de carga posta no interior de um meio condutor tende a se distribuir na superfície com um tempo característico, que para bons condutores é da ordem de $\tau_r \approx 10^{-19}$ seg.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Exemplo 4.2: Campo elétrico em um condutor esférico inicialmente carregado

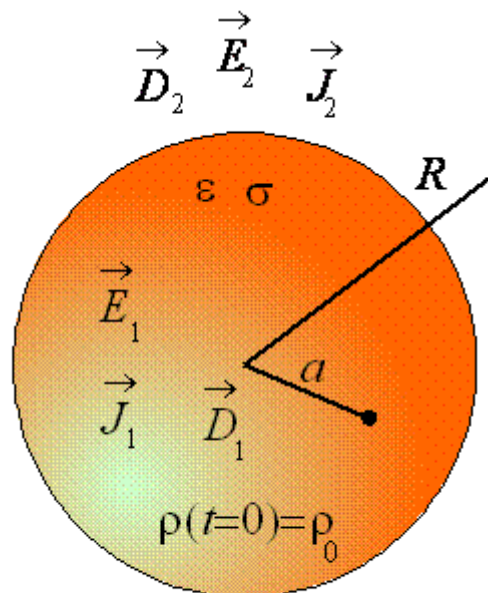


Fig.4.8 Geometria da distribuição de carga em condutor esférico do Exemplo 4.8

Consideremos a situação ilustrada na Fig.4.8, onde admite-se carga uniformemente distribuída inicialmente com densidade ρ_0 em uma esfera condutora de permissividade ϵ e condutividade σ . Deseja-se estudar a evolução no tempo dos campos e correntes internos e externos à esfera. Uma vez que a densidade é uniforme, a carga total da esfera é simplesmente

$$Q = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3, \forall t.$$

A densidade volumétrica de carga em qualquer instante de tempo $t \geq 0$ é dada pela Eq.(4.27). Uma vez que a densidade mantém-se uniforme para $t \geq 0$, os campos interior e exterior irão depender apenas na coordenada R indicada na Fig. 4.8. Aplicando-se a lei de Gauss para uma

superfície gaussiana esférica de raio $R \leq a$ obtém-se

$$\vec{D}_1 = \frac{\rho(t)R}{3} \hat{a}_R$$

com $\rho(t)$ dado pela Eq.(4.27). Essa última expressão fornece para os vetores \vec{E} e \vec{J} ,

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho(t)R}{3\epsilon} \hat{a}_R,$$

$$\vec{J}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\rho(t)R}{3} \hat{a}_R = \frac{1}{\tau_r} \frac{\rho(t)R}{3} \hat{a}_R$$

Em vista da Eq.(4.27), as três expressões anteriores demonstram que os campos \vec{E}_1 e \vec{D}_1 , bem como o vetor \vec{J}_1 , decaem exponencialmente com o tempo no interior do condutor. Utilizando-se uma superfície gaussiana esférica de raio $R \geq a$, obtém-se

$$\vec{D}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

Note-se que no exterior os campos não variam no tempo, pois a carga total da esfera é constante. Como o meio externo é o vácuo, $\sigma = 0$ e conseqüentemente $\vec{J}_2 = 0$ nessa região.

Uma vez que a carga volumétrica diminui com o tempo, de acordo com a Eq.(4.27), pelo princípio da conservação da carga deve haver um acúmulo correspondente de carga na superfície da esfera. Essa carga que se acumula na superfície tem uma densidade superficial que pode ser obtida da condição de contorno para o vetor densidade de fluxo elétrico

$$\rho_s(t) = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_{R=a} \cdot \hat{a}_R$$

o que juntamente com a Eq.(4.27) fornece

$$\rho_s(t) = \frac{\rho_0 a}{3} (1 - e^{-t/\tau_r})$$

Essa última expressão mostra que a densidade superficial de carga na superfície esférica tende a atingir um valor permanente para $t \gg \tau_r$, dado por

$$\rho_s(t \gg \tau_r) = \rho_0 a$$

Note-se que em cada instante de tempo a carga total do sistema, que corresponde as porções contidas no volume e na superfície da esfera, é constante. Isso pode ser facilmente verificado a partir das funções densidade, i.e.,

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_V(t) + Q_S(t) = \frac{4\pi a^3}{3} \rho(t) + 4\pi a^2 \rho_s(t) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \rho_0 e^{-t/\tau_r} + 4\pi a^2 \frac{\rho_0 a}{3} (1 - e^{-t/\tau_r}) = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_0 = Q(t=0) \end{aligned}$$

4.6 Dissipação de Energia em Condutores

Conforme discutido anteriormente, sob a ação de um campo elétrico, portadores de carga em um meio de condução são acelerados. Na ausência dos eventos de colisão, a energia média cedida pelo campo para o sistema de portadores, cresceria indefinidamente. Com os eventos de colisão presentes, os portadores de carga transferem *momentum* para os átomos ou moléculas constituintes do meio material e esta energia eventualmente se transforma em calor no material. Portanto, o mecanismo de intercâmbio de energia entre o campo e portadores de carga, pode ser visto da seguinte forma. Na ausência de campo aplicado, pode-se admitir que a velocidade média dos portadores de carga é nula. Aplicando-se o campo, a energia cinética média dos portadores aumenta até um valor limite e isso ocorre durante um tempo característico τ_c . A partir daí, a energia média dos portadores de carga é constante, dependendo apenas da intensidade do campo aplicado. Para que essa energia permaneça constante no regime permanente, é necessário que a potência elétrica que flui do campo para o sistema de portadores seja balanceada pela taxa de transferência de energia dos portadores para os átomos ou moléculas do material. Isso implica que a potência elétrica transferida para o sistema de cargas é totalmente dissipada em forma de calor no material.

Consideremos um material condutor de volume total V e um elemento diferencial de volume δV cujo vetor posição média dos portadores é \vec{X} , conforme ilustrado na Fig.4.9. O trabalho médio diferencial $d(\delta W_E)$ realizado pelo campo nesse elemento de volume para produzir um deslocamento diferencial $d\vec{X}$ na posição média dos portadores é

$$d(\delta W_E) = \vec{F}_E \bullet d\vec{X}$$

onde \vec{F}_E é a força elétrica.

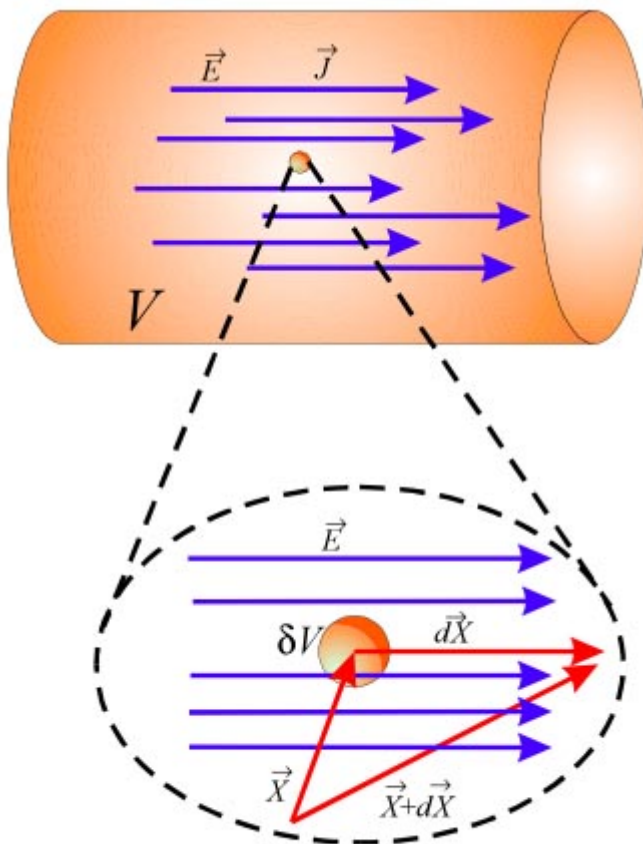


Fig.4.9 Meio condutor submetido a ação de um campo elétrico.

de energia para os portadores é obtida de

A taxa média de transferência

$$\frac{d(\delta W_E)}{dt} = \delta P_E = \vec{F}_E \cdot \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}_E \cdot \vec{v}$$

Em termos do campo aplicado e da densidade de cargas, pode-se escrever

$$\delta P_E = \delta q \vec{E} \cdot \vec{v} = (\rho \vec{v}) \cdot \vec{E} \delta V$$

e utilizando a Eq.(4.7), resulta,

$$\delta P_E = \delta V \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (4.28)$$

A Eq.(4.28) representa a potencia elétrica diferencial δP_E dissipada no volume δV . Como o meio de condução tem volume V , a potência total dissipada no volume é obtida por integração da Eq.(4.28), ou seja,

$$P_E = \int_V dV \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (4.29)$$

Para meios obedecendo a lei de Ohm, $\vec{E} \cdot \vec{J} > 0$, e a potência é cedida pelo campo sendo dissipada em forma de calor. Existem, no entanto, situações em que o produto escalar $\vec{E} \cdot \vec{J}$ pode tornar-se negativo, e nesse caso a potência é cedida do sistema de portadores para o campo, possibilitando a obtenção de amplificação do campo, tal como ocorre em válvulas de ondas viajantes em frequências de microondas ou em lasers de elétrons livres. Esses sistemas operam na condição $\vec{E} \cdot \vec{J} < 0$, onde radiação eletromagnética viajando ao longo de um feixe de elétrons pode ser amplificada.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

4.7 Problemas de Valores de Fronteira em Meios Condutores

O formalismo de determinação de campos em meios condutores é similar àquele utilizado no tratamento de meios dielétricos isolantes. Considere-se um condutor submetido a uma diferença de potencial, tal que se produza um fluxo de corrente estacionário. Nesse regime, a equação da continuidade reduz-se a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.30)$$

Para campos independentes do tempo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

e dessa expressão,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (4.31)$$

Se o meio condutor é linear e isotrópico, e caracterizado por uma condutividade σ , então

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

e da Eq.(4.30),

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \quad (4.32)$$

Considerando-se que o meio seja homogêneo, i.e., com σ independente das coordenadas, a Eq.(4.31) quando inserida na Eq.(4.32) fornece,

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.33)$$

Ou seja, no interior de um meio condutor linear, homogêneo e isotrópico, a função potencial obedece a equação de Laplace. Em problemas envolvendo meios materiais distintos é também necessário estabelecer a condição de contorno para o vetor densidade de corrente. Essa condição de contorno é derivada diretamente da forma integral da equação da continuidade, dada pela Eq.(4.23) e reproduzida abaixo,

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Considerando-se a geometria ilustrada na Fig.4.10, e aplicando-se essa expressão para o cilindro de altura Δh e área de base ΔS , no limite em que $\Delta h \rightarrow 0$ vem

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left\{ \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV \right\}$$

O termo entre colchetes no segundo membro tende ao produto entre a área ΔS e a densidade superficial de carga na interface entre os dois meios. No primeiro membro, a integração sobre a superfície lateral do cilindro tende a zero para $\Delta h \rightarrow 0$, o que fornece

$$\Delta S \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{d}{dt} (\rho_s \Delta S)$$

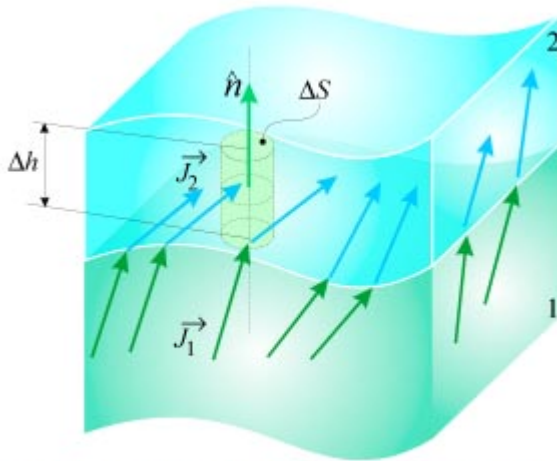


Fig. 4.10 Meios materiais distintos por onde flui corrente elétrica.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Para uma geometria invariante no tempo, i.e., $d(\Delta S)/dt = 0$, resulta

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (4.34)$$

A Eq.(4.34) é a condição de contorno mais geral, independente dos tipos de meio material envolvidos. No regime estacionário em que a densidade superficial de carga não varia no tempo, obtém-se a condição de contorno

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \quad (4.35)$$

Ou seja, *no regime estacionário a componente normal do vetor densidade de corrente é contínua na interface.*

Em resumo, no regime estático em que a corrente existe no regime estacionário, todas as técnicas de solução da Eq. De Laplace utilizadas em meios isolantes são também aplicáveis em meios condutores. Assim, a solução de problemas de valores de fronteira que envolvam a determinação da distribuição de campos e correntes em um dado condutor, segue uma metodologia semelhante àquela adotada no capítulo anterior para solução de problemas de valores de fronteira em eletrostática. A Tabela IV.1 ilustra, por exemplo, a metodologia geralmente adotada na determinação de resistência elétrica de um condutor imperfeito.

Tabela IV.1 Metodologia de determinação da resistência elétrica de um condutor imperfeito.

Etapa	Descrição
1	Defina a região de interesse: Em geral um resistor é um condutor imperfeito formado entre dois contatos metálicos através dos quais flui uma corrente. Por simplicidade, os contatos metálicos podem ser considerados como condutores perfeitos, ou seja, tendo resistência elétrica nula.
2	Submeta os contatos a uma diferença de potencial V: Nessas condições cada contato é uma equipotencial.

3	<p>Defina as condições de contorno: Em geral o resistor (condutor imperfeito) está imerso em um meio isolante (vácuo, por exemplo). Assim, as condições de contorno são:</p> <p>a) Potencial constante em cada contato</p> $J_n = \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial l_n} = 0$ <p>b) Da Eq.(4.35), em cada interface condutor-isolante.</p> <p>Essas condições implicam que o problema de valores de fronteira em um meio condutor é do tipo condições mistas na fronteira.</p>
4	Resolva a eq. de Laplace sujeita às condições de contorno especificadas em (3).
5	Utilize as Eqs. (4.31) e (4.19) para determinar \vec{J}
6	Utilize a Eq.(4.8) para determinir a corrente I que flui entre os contatos
7	Determine a resistência elétrica da relação $R = V / I$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Problemas

4.1 Uma superfície plana separa dois meios condutores:

- a) Utilize a equação da continuidade (forma diferencial do princípio da conservação da carga) para mostrar que:

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

onde \vec{J}_1 e \vec{J}_2 são as densidades de corrente nos meios 1 e 2, respectivamente, calculadas na interface de separação, e \hat{n} é o vetor unitário normal dirigido do meio 1 para o meio 2.

- b) Do item (a) verifique que no regime de corrente estacionária a componente normal do vetor densidade de corrente é contínua
- c) Do item (b) mostre que a componente normal do vetor densidade de corrente é nula na interface entre dois meios, um dos quais é um isolante perfeito
- d) Considere agora que ambos os meios sejam lineares, homogêneos, e isotrópicos e caracterizados por permissividade elétrica e condutividade (ϵ_1, σ_1) e (ϵ_2, σ_2) , respectivamente. Utilize as relações constitutivas entre \vec{D} e \vec{E} e entre \vec{J} e \vec{E} , juntamente com a equação da continuidade para mostrar que se uma corrente invariante no tempo cruza a interface entre os dois meios, aparecerá uma densidade superficial de carga dada por:

$$\rho_s = (\tau_2 - \tau_1) J_n$$

onde J_n é a componente normal do vetor densidade de corrente na interface e τ_1 e τ_2 são os tempos de relaxação nos meios 1 e 2, respectivamente.

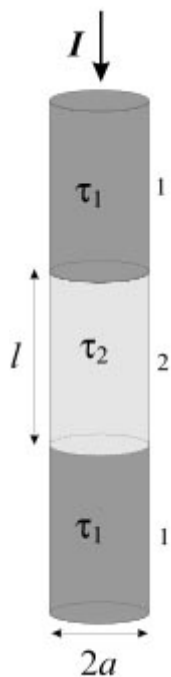
- 4.2** Em $t=0$, um excesso de carga é distribuído com uma densidade $\rho_0(R/a)$ (C/m^3), no interior da esfera de raio a , condutividade σ e permissividade elétrica ϵ_0 . Admitindo que a esfera esteja imersa no vácuo, determine:
- A densidade volumétrica de carga para $t \geq 0$.
 - Os vetores \vec{D} , \vec{E} e \vec{J} no interior e no exterior da esfera para $t \geq 0$.
 - A densidade superficial de carga em $R = a$, para $t \geq 0$.
- 4.3** Em $t=0$, um excesso de carga é distribuído com uma densidade $\rho_0(r/a)$ (C/m^3), no interior do cilindro de raio a , condutividade σ e permissividade elétrica ϵ_0 . Admitindo que o cilindro seja infinitamente longo e esteja imerso no vácuo, determine:
- A densidade volumétrica de carga para $t \geq 0$.
 - Os vetores \vec{D} , \vec{E} e \vec{J} no interior e no exterior do cilindro para $t \geq 0$.
 - A densidade superficial de carga em $r = a$, para $t \geq 0$.
- 4.4** Considere uma esfera perfeitamente condutora de raio a envolta por uma casca esférica perfeitamente condutora de raio interno $b > a$. A região $\{a \leq R \leq b, 0 \leq \theta < \pi\}$ é preenchida por um meio material de condutividade σ_1 e a região $\{a \leq R \leq b, \pi \leq \theta < 2\pi\}$ é preenchida por um meio de condutividade σ_2 . Admitindo que uma diferença de potencial seja aplicada entre os condutores perfeitos tal que, $\Phi(R = a) = V$ e $\Phi(R = b) = 0$, determine:
- o vetor densidade de corrente em cada região.
 - a resistência elétrica medida entre as superfícies $R=a$ e $R=b$.
 - a potência elétrica dissipada em cada região.
- 4.5** Considere agora que a região entre superfícies esféricas perfeitamente condutoras de raios a e b ($b > a$) seja preenchida por N condutores de condutividades σ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), com o i -ésimo condutor ocupando a região $\{a \leq R \leq b, \pi(i-1)/N \leq \theta < \pi i/N, i = 1, 2, 3, \dots, N\}$. Admitindo que uma diferença de potencial seja aplicada entre os condutores perfeitos tal que, $\Phi(R = a) = V$ e $\Phi(R = b) = 0$, determine:
- o vetor densidade de corrente em cada região.
 - a resistência elétrica medida entre as superfícies $R=a$ e $R=b$.
 - a potência elétrica total dissipada nos condutores.
- 4.6** Considere uma esfera perfeitamente condutora de raio a envolta por uma casca esférica perfeitamente condutora de raio interno $c > a$. A região $\{a \leq R \leq b, \text{ com } b < c\}$ é preenchida por um meio material de condutividade σ_1 e a região $\{b \leq R \leq c\}$ é preenchida por um meio de condutividade σ_2 . Determine a resistência elétrica entre as superfícies $R=a$ e $R=c$.
- 4.7** Um cabo coaxial é formado por um condutor interno perfeito de raio a e uma casca cilíndrica condutora perfeita de raio interno $b > a$. A região entre condutores é preenchida por um meio de condutividade σ . Admitindo que uma diferença de potencial seja aplicada entre os condutores perfeitos tal que, $\Phi(r = a) = V$ e $\Phi(r = b) = 0$, determine:
- o vetor densidade de corrente na região $a \leq r \leq b$
 - a resistência elétrica em uma seção longitudinal de comprimento l , medida entre as superfícies $r=a$ e $r=b$.

- c) a potência elétrica dissipada em uma seção longitudinal de comprimento l do cabo coaxial.

4.8 Considere uma corrente estacionária, fluindo no sistema de condutores cilíndricos de raio a , conforme ilustrado na figura ao lado. Admita que os condutores 1 e 2 tenham valores de permissividade e condutividade tais que os respectivos tempos de relaxação sejam τ_1 e τ_2 , com $\tau_2 > \tau_1$. Admitindo ainda que a corrente se distribua uniformemente no interior dos condutores, mostre que a capacitância do condutor 2 é dada por:

$$C = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{R},$$

onde R é a resistência elétrica do condutor 2.



Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana
