

ELETROMAGNETISMO - PARTE 1 - Edição 01.2011

Eduardo Fontana, PhD

Professor Titular

Departamento de Eletrônica e Sistemas

UFPE

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Capítulo 1 - Análise Vetorial

[1.1 Campo Vetorial e Escalar](#)

[1.2 Álgebra Vetorial](#)

[1.2.1 Soma](#)

[1.2.2 Produto](#)

[Produto escalar](#)

[Produto vetorial](#)

[1.2.3 Decomposição de vetores](#)

[1.3. Alguns sistemas de coordenadas](#)

[1.3.1 Coordenadas cartesianas](#)

[1.3.2 Coordenadas cilíndricas](#)

[1.3.3 Coordenadas esféricas](#)

[1.4. Transformação de coordenadas e vetores](#)

[1.4.1 Cartesianas-Cilíndricas](#)

[1.4.2 Cilíndricas-Esféricas](#)

[1.4.3 Cartesianas-Esféricas](#)

[1.5. Integrais](#)

[1.5.1 Integral de linha de uma função](#)

[1.5.2 Integral de linha de um vetor](#)

[1.5.3 Integral de superfície](#)

[1.5.4 Integral de volume](#)

[1.6. Operações diferenciais com vetores](#)

[1.6.1 Gradiente](#)

[1.6.2 Operador Nabla](#)

[1.6.3 Divergente](#)

[1.6.4 Rotacional](#)

[1.7. Identidades vetoriais](#)

[1.8. Alguns teoremas da análise vetorial](#)

[1.8.1 Teorema de Gauss](#)

[1.8.2 Teorema de Stokes](#)

[1.8.3 Identidades de Green](#)

[1.8.4 Teorema de Helmholtz](#)

[Problemas](#)

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.1 Campo Vetorial e Escalar

O eletromagnetismo lida essencialmente com grandezas escalares e vetoriais. Por **grandeza escalar**, entende-se uma grandeza física que possa ser quantificada por um único parâmetro, como por exemplo, a massa de um objeto ou a carga de um corpo carregado. Uma **grandeza vetorial**, por outro lado, requer parâmetros adicionais para uma mais completa especificação, como por exemplo, magnitude, linha de ação e sentido. Esse é o caso, por exemplo, da velocidade de um objeto em movimento. Um outro conceito que surge no estudo de eletromagnetismo é o de **campo**. Na maioria das situações de interesse o campo é uma forma conveniente de representação do efeito produzido por uma **fonte** física em cada ponto de espaço, a cada instante de tempo. O campo será escalar ou vetorial, se a grandeza física a ele associada for de natureza escalar ou vetorial, respectivamente.

O estudo detalhado do eletromagnetismo requer familiaridade com as propriedades de vetores, escalares e de campos escalares e vetoriais. Algumas destas propriedades são examinadas a seguir.

1.2 Álgebra Vetorial

Um **vetor** é representado geometricamente por um segmento de reta orientado conforme ilustrado na Fig. 1.1, onde o comprimento da seta é proporcional a magnitude do vetor, e a orientação da seta indica a direção e sentido do vetor.

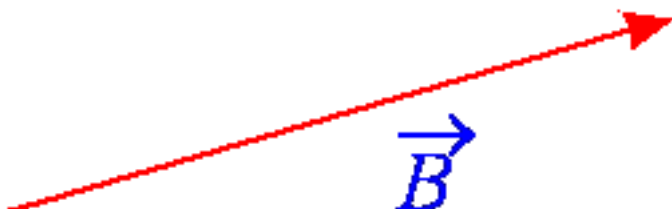


Fig. 1.1 Representação geométrica de um vetor

Vetores satisfazem algumas propriedades quanto a soma e produto, descritas a seguir:

1.2.1 Soma

A soma de vetores é realizada geometricamente, a partir do deslocamento paralelo de um dos vetores até a extremidade do outro, conforme ilustrado na Fig.1.2. O vetor resultante se estende na direção da diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores. A partir dessa definição, a soma de vetores satisfaz as propriedades:

- Comutatividade: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Associatividade: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

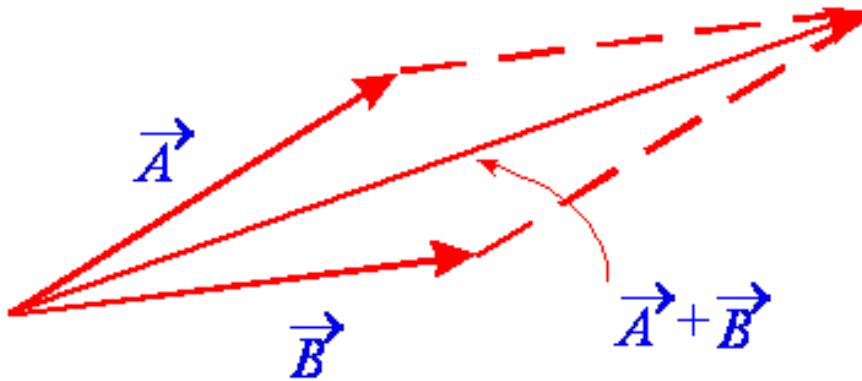


Fig.1.2 Procedimento geométrico para efetuar a soma entre dois vetores.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.2.2 Produto

Outro tipo de operação entre vetores é o produto, que pode resultar em uma grandeza escalar ou vetorial.

Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores \vec{A} e \vec{B} é definido por

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad , \quad (1.1)$$

onde $|\vec{A}|$ e $|\vec{B}|$ são as magnitudes dos vetores \vec{A} e \vec{B} , respectivamente, e α é o menor dos ângulos entre eles. A partir dessa definição, a magnitude de um vetor pode ser obtida da relação

$$|\vec{A}| = (\vec{A} \bullet \vec{A})^{1/2}$$

A operação produto escalar, satisfaz algumas propriedades, tais como:

- Comutatividade: $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$
- Distributividade: $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$

Produto vetorial

Este tipo de produto gera como resultado um vetor. Define-se esta operação pela relação

$$\vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha) \hat{u} \quad , \quad (1.2)$$

onde, conforme ilustrado na Fig.1.3, α é o menor dos ângulos entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , \hat{u} é um vetor de magnitude unitária, perpendicular ao plano que contém os vetores \vec{A} e \vec{B} , e cujo sentido é aquele do polegar,

quando simula-se com a mão direita a rotação do vetor \vec{A} em direção ao vetor \vec{B} .

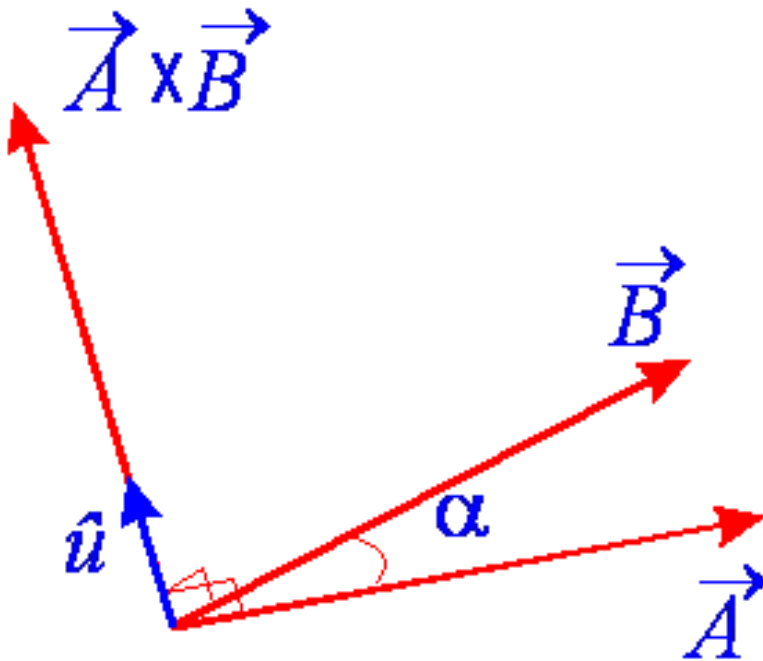


Fig.1.3 Disposição dos vetores na operação produto vetorial.

Algumas das propriedades satisfeitas pelo produto vetorial seguem diretamente da definição e das propriedades de soma de vetores. Duas dessas são:

- Anti-comutatividade: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Distributividade: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.2.3 Decomposição de vetores

No espaço tridimensional, um vetor arbitrário pode ser especificado em termos de três vetores ortogonais. Quando esses vetores possuem magnitude unitária eles formam uma base ortonormal no espaço tridimensional. Uma base ortonormal de vetores \hat{a}_1 , \hat{a}_2 e \hat{a}_3 satisfaz as seguintes propriedades:

$$\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

A base ortonormal é também uma base cíclica de vetores se

$$\hat{a}_i \times \hat{a}_j = \epsilon_{ijk} \hat{a}_k,$$

onde:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \neq k \neq i, \text{ e } i, j, k \text{ formam uma permutação cíclica a partir da sequência } 123 \\ -1 & \text{se } i \neq j \neq k \neq i, \text{ e } i, j, k \text{ formam uma permutação acíclica a partir de } 123 \\ 0 & \text{para dois índices iguais} \end{cases}$$

Uma seqüência cíclica a partir de 123 gera como resultado as combinações, 231, 312, etc. Uma seqüência acíclica é obtida trocando-se um dos índices da seqüência cíclica, como por exemplo, a seqüência 213.

A decomposição de um vetor \vec{A} em uma base cíclica ortonormal requer a determinação dos coeficientes A_1 , A_2 e A_3 , tal que

$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3 .$$

Os coeficientes da decomposição são denominados de **projeções** do vetor \vec{A} nos vetores de base, e essas projeções são obtidas simplesmente a partir da operação **produto escalar** com cada vetor de base. Por exemplo, a projeção A_1 é obtida do produto escalar

$$\vec{A} \cdot \hat{a}_1 = (A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3) \cdot \hat{a}_1 = A_1 \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1 + A_3 \hat{a}_3 \cdot \hat{a}_1 = A_1$$

Realizando-se a mesma operação com os outros vetores de base, obtém-se

$$A_i = \vec{A} \cdot \hat{a}_i , \quad i = 1, 2, 3$$

Utilizando-se a decomposição de vetores em uma base cíclica ortonormal, as operações de soma, produto escalar e produto vetorial entre dois vetores \vec{A} e \vec{B} podem ser representadas respectivamente por,

$$\vec{A} + \vec{B} = \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) \hat{a}_i ,$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j (\hat{a}_i \times \hat{a}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{a}_k$$

Para o produto vetorial, a soma resulta em

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{a}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{a}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{a}_3 \quad (1.3)$$

que também pode ser posta na forma de um determinante,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

(1.4)

Pode-se simplificar a notação de somatório utilizada nas várias operações descritas anteriormente, convencionando-se que a ocorrência de índices repetidos no segundo membro dessas operações indique somatório no índice correspondente. Por exemplo, na operação produto escalar, pode-se representar o resultado na forma simplificada

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i B_i \quad (1.5)$$

onde a dupla ocorrência do índice i no segundo membro da Eq.(1.5) indica $\sum_{i=1}^3$. No caso do produto vetorial a representação simplificada é da forma

$$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \hat{a}_k \quad (1.6)$$

onde a dupla ocorrência dos índices i, j e k , no segundo membro indica a soma tripla $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3$.

1.3. Alguns sistemas de coordenadas

Em problemas de teoria de campo, a escolha de um sistema de coordenadas adequado é fundamental para obtenção de representações simplificadas dos campos envolvidos. O sistema mais adequado é geralmente determinado levando-se em conta a geometria da região de existência dos campos. Vários sistemas de coordenadas podem ser definidos para atender uma larga gama de situações. Os três sistemas de coordenadas mais comuns e freqüentemente utilizados no estudo de eletromagnetismo serão tratados no texto, e esses são descritos a seguir.

1.3.1 Coordenadas cartesianas

Neste sistema, as coordenadas de um ponto no espaço são definidas a partir de três eixos x, y, z , perpendiculares aos planos $x = 0, y = 0$ e $z = 0$, respectivamente, conforme ilustrado na Fig.1.4. Qualquer vetor neste sistema de coordenadas pode ser representado como combinação linear dos três vetores unitários, $\hat{a}_1 = \hat{a}_x, \hat{a}_2 = \hat{a}_y, \hat{a}_3 = \hat{a}_z$, paralelos aos eixos x, y, z , respectivamente. A origem do sistema cartesiano é a interseção dos planos $x=0, y=0$ e $z=0$. A localização de um ponto no espaço pode ser representada pelo vetor posição

$$\vec{X} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

tendo uma das extremidades na origem do sistema, conforme ilustrado na Fig.1.4. A distância do ponto P a origem é obtida de,

$$|\vec{X}| = [(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) \bullet (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)]^{1/2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

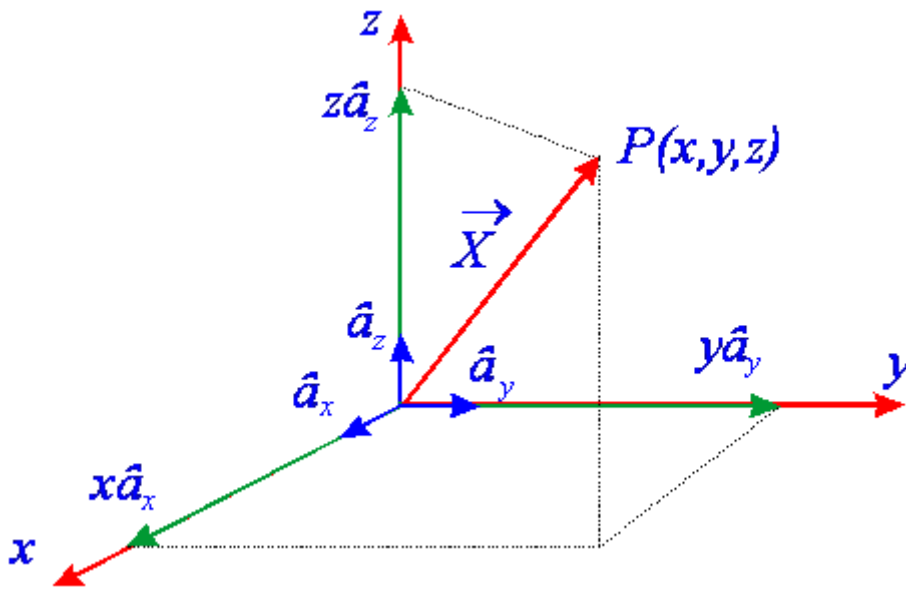


Fig.1.4 Representação de um ponto e vetores de base no sistema de coordenadas cartesianas.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.3.2 Coordenadas cilíndricas

Neste sistema as coordenadas de um ponto no espaço são representadas pelos parâmetros:

r = distância até a origem da projeção do ponto no plano xy .

ϕ = ângulo azimutal, que representa o desvio angular do vetor projeção no plano xy relativamente ao eixo x .

z = coordenada axial do ponto.

A base de vetores neste sistema é formada pelos vetores unitários ortogonais as superfícies,

$r = \text{constante}$, que representa a equação de uma superfície cilíndrica,

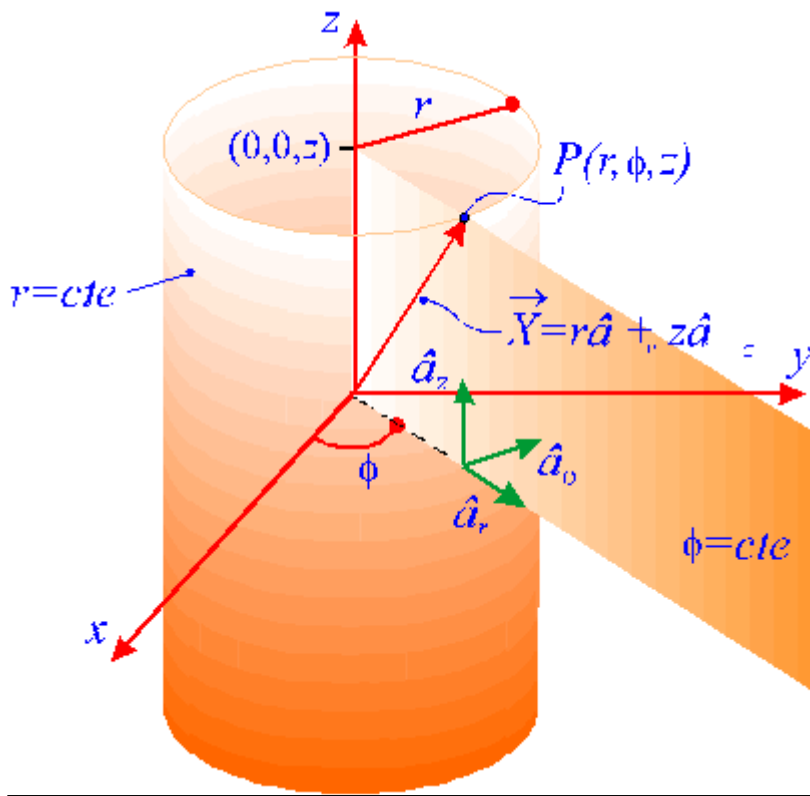
$\phi = \text{constante}$, que representa a equação de um semi-plano,

$z = \text{constante}$, que representa a equação de um plano.

Essas superfícies e os vetores unitários correspondentes,

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_r, \hat{a}_2 = \hat{a}_\phi, \hat{a}_3 = \hat{a}_z,$$

estão representados na Fig.1.5. É importante observar que a seqüência de vetores unitários da base deste sistema, está escrita na forma de uma seqüência cíclica, conforme definido anteriormente. Notemos também que diferentemente do que ocorre com os vetores de base do sistema de coordenadas cartesianas, neste sistema os dois primeiros vetores de base variam com a coordenada ϕ .



Sistema de coordenadas cilíndricas



Fig.1.5 Vetores de base e superfícies coordenadas do sistema de coordenadas cilíndricas.

1.3.3 Coordenadas esféricas

As coordenadas de um ponto neste sistema de coordenadas são representadas pelos parâmetros ilustrados na Fig.1.6, a saber:

R = distância do ponto à origem,

θ = ângulo polar, que representa o desvio angular do vetor posição em relação ao eixo z ,

ϕ = ângulo azimutal, comum ao sistema de coordenadas cilíndricas.

A base deste sistema é formada pelos vetores,

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_R, \quad \hat{a}_2 = \hat{a}_\theta, \quad \hat{a}_3 = \hat{a}_\phi,$$

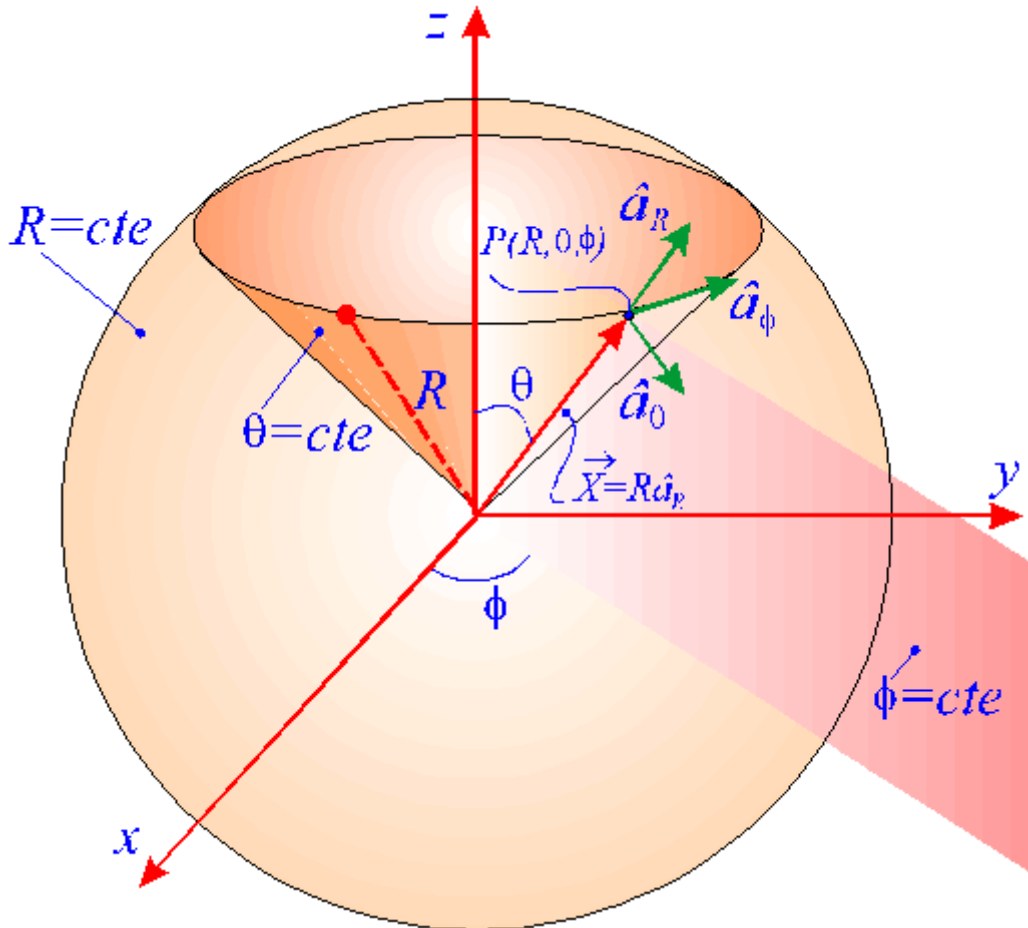
que são perpendiculares as superfícies,

$R = \text{constante}$, que representa a superfície de uma esfera.

$\theta = \text{constante}$, que representa a superfície de um cone.

$\phi = \text{constante}$, que representa a superfície de um semi-plano.

O espaço tridimensional é gerado pelas condições, $R \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. As superfícies coordenadas, bem como os vetores de base estão ilustrados na Fig. 1.6. Neste sistema de coordenadas, o vetor posição é representado por $\vec{X} = R\hat{a}_R$.



Sistema de Coordenadas Esféricas



Fig.1.6 Base de vetores e superfícies coordenadas do sistema de coordenadas esféricas.

1.4. Transformação de coordenadas e vetores

1.4.1 Cartesianas-Cilíndricas

Existem situações em que torna-se necessária a transformação de vetores e coordenadas de um sistema de coordenadas para outro. Considere-se inicialmente um vetor \vec{A} representado no sistema de coordenadas cartesianas. Qual seria a representação desse vetor, por exemplo, no sistema de coordenadas cilíndricas?

Essa questão pode ser resolvida com o emprego das propriedades básicas de vetores. Para isso, seja \vec{A} da forma

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

O objetivo é determinar as componentes A_r , A_ϕ e A_z de forma que o vetor \vec{A} assuma a representação

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

As componentes incógnitas podem ser obtidas pelo cálculo das projeções

$$A_r = \vec{A} \cdot \hat{a}_r = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_r + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_r,$$

$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\phi = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi,$$

$$A_z = \vec{A} \cdot \hat{a}_z = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = A_z$$

Os produtos escalares entre vetores unitários nessas últimas expressões, são obtidos com base na Fig.1.7, resultando em,

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \cos \phi, \quad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi = \cos(90 + \phi) = -\text{sen } \phi,$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = \cos(90 - \phi) = \text{sen } \phi, \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi = \cos \phi,$$

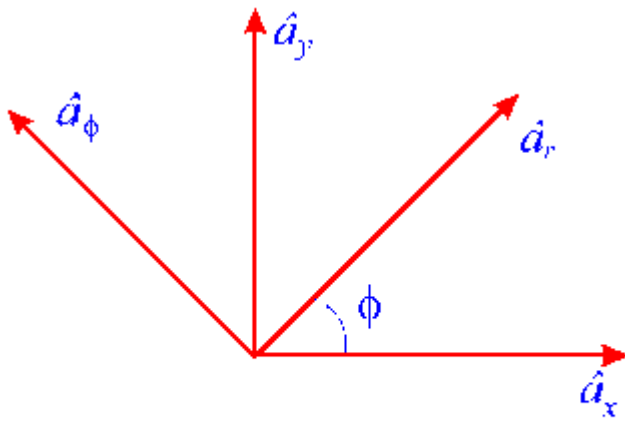


Fig.1.7 Disposição dos vetores unitários dos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas no plano xy .

portanto,

$$\begin{aligned} A_r &= \cos \phi A_x + \sin \phi A_y \\ A_\phi &= -\sin \phi A_x + \cos \phi A_y \\ A_z &= A_z \end{aligned}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Esse sistema de equações lineares relacionando as projeções no sistema de coordenadas cilíndricas àquelas correspondentes ao sistema de coordenadas cartesianas pode ser posto na forma matricial

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},$$

e essa forma matricial determina a lei de transformação de vetores entre os dois sistemas.

Pode-se representar a lei de transformação através da equação matricial

$$\tilde{A}_{r\phi z} = \tilde{T}(\phi) \tilde{A}_{xyz} \quad (1.7)$$

onde,

$$\tilde{A}_{r\phi z} \equiv \begin{pmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{xyz} \equiv \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{T}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Nas Eqs.(1.7) e (1.8), foi introduzida a representação matricial de vetores em um sistema de coordenadas. Com se pode observar na Fig.1.7, o efeito da matriz \tilde{T} é produzir uma rotação do sistema xy , de radianos no sentido anti-horário, em torno do eixo z . A matriz \tilde{T} possui um determinante unitário e sua inversa é igual a sua transposta. Essa matriz é portanto uma matriz unitária e satisfaz a relação

$$\tilde{T}\tilde{T}^t = \tilde{\mathcal{I}}$$

onde

$$\tilde{\mathfrak{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade.

Matrizes de transformação resultantes de rotação ou translação de eixos são unitárias pois essas transformações não alteram a magnitude de um vetor ou mesmo a orientação relativa entre vetores. Para demonstração dessa afirmativa, seja a operação produto escalar entre vetores, que na representação matricial assume a forma

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = (A_1 \quad A_2 \quad A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \vec{A}^t \vec{B} \quad (1.9)$$

Transformações de rotação ou translação de eixos não alteram a magnitude e orientação relativa de vetores e se tal transformação for representada pela matriz \tilde{M} , tal que

$$\vec{A}' = \tilde{M}\vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{B}' = \tilde{M}\vec{B} \quad (1.10)$$

o produto escalar no novo sistema de coordenadas pode também ser escrito como,

$$\vec{A} \bullet \vec{B} \equiv \vec{A}' \bullet \vec{B}' = \vec{A}'^t \vec{B}' = (\tilde{M}\vec{A})^t (\tilde{M}\vec{B}) = \vec{A}^t \tilde{M}^t \tilde{M} \vec{B} \quad (1.11)$$

Igualando-se as Eqs. (1.9) e (1.11), resulta,

$$\vec{A}^t \tilde{M}^t \tilde{M} \vec{B} = \vec{A}^t \vec{B}$$

e essa última relação só se verifica se a matriz \tilde{M} satisfizer a propriedade

$$\tilde{M}^t \tilde{M} = \tilde{\mathfrak{I}}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.4.2 Cilíndricas-Esféricas

Seguindo o procedimento descrito na seção anterior, considere-se agora o vetor \vec{A} expresso em coordenadas cilíndricas e a obtenção de sua representação em coordenadas esféricas. Seja portanto,

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

e quer-se determinar a representação correspondente em coordenadas esféricas

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$$

Seguindo as etapas já descritas na seção anterior, e com base na Fig. 1.8, obtém-se

$$\begin{pmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & 0 & \text{cos } \theta \\ \text{cos } \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix}$$

que pode ser posto na forma,

$$\tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta) \tilde{A}_{r\phi z}$$

com,

$$\tilde{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & 0 & \text{cos } \theta \\ \text{cos } \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

A transformação inversa é obtida de,

$$\tilde{A}_{r\phi z} = [\tilde{S}(\theta)]^t \tilde{A}_{R\theta\phi}$$

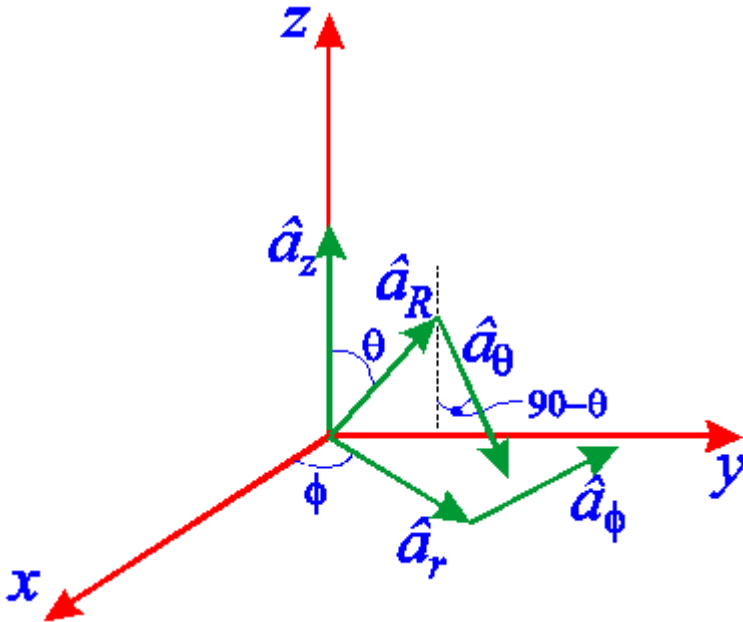


Fig.1.8 Disposição relativa dos vetores de base nos sistemas de coordenadas cilíndrica e esférica.

1.4.3 Cartesianas-Esféricas

Essa transformação é obtida pela aplicação sucessiva das transformações anteriores, ou seja,

$$\tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta) \tilde{A}_{r\phi z}$$

$$\tilde{A}_{r\phi z} = \tilde{T}(\phi) \tilde{A}_{xyz}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_{R\theta\phi} = \tilde{S}(\theta) \tilde{T}(\phi) \tilde{A}_{xyz}$$

e a transformação inversa é simplesmente,

$$\tilde{A}_{xyz} = [\tilde{T}(\phi)]^t [\tilde{S}(\theta)]^t \tilde{A}_{R\theta\phi}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.5. Integrais

Em eletromagnetismo operações de integração e diferenciação são geralmente efetuadas no espaço tridimensional e envolvem campos escalares e vetoriais. Essas operações são revisadas a seguir.

1.5.1 Integral de linha de uma função

Seja $f(x,y,z)$ uma função definida em uma região do espaço tridimensional e uma curva ou caminho C contida nessa região. A equação de uma curva no espaço tridimensional é obtida a partir da interseção de duas superfícies, cada uma representada por uma relação entre coordenadas do tipo,

$$S(x,y,z) = 0$$

onde S é uma função arbitrária das variáveis x , y e z . Conseqüentemente, uma curva no espaço tridimensional corresponde a solução do sistema de equações

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} S_1(x,y,z) = 0 \\ S_2(x,y,z) = 0 \end{array} \right\}$$

Define-se a integral de linha de f sobre C , com respeito a variável x , pela relação

$$\int_C f(x,y,z) dx$$

onde o subscrito C sob o sinal de integração implica que a função escalar $f(x,y,z)$ é calculada sobre os pontos compondo o caminho C , resultando em uma função $f_C(x,y,z)$. Portanto, para efetuar-se esta integração é necessária a utilização do sistema de equações definindo a curva C , o que implica

$$f_C(x,y,z) = F(x)$$

Definições semelhantes se aplicam a integrais de linha com respeito as variáveis y e z ou com respeito a variáveis compondo sistemas de coordenadas curvilíneas em geral.

Exemplo 1.1: Seja a função $f(x,y,z) = 2x + y + z^2$ e o caminho C , limitado pelos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ e definido pela interseção entre os planos,

$$y = x$$

$$z = x$$

Para calcular a integral de f sobre C com respeito a variável y , utilizam-se as duas equações anteriores para obter,

$$f_C = 2y + y + y^2 = 3y + y^2$$

e portanto

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_0^1 (3y + y^2) dy = 11/6$$

A integral de linha com respeito a uma das coordenadas do caminho é apenas um caso particular da situação mais geral envolvendo a integração com respeito ao **deslocamento ao longo** do caminho. Seja l uma variável que mede o comprimento ao longo da curva C . A integral de linha de f sobre C com respeito a variável l é definida pela relação,

$$\int_C f(x, y, z) dl$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

É possível reduzir-se essa última expressão para uma integral com respeito a uma das variáveis do sistema de coordenadas considerado, no caso, o sistema de coordenadas cartesianas. Para isso, seja o vetor $d\vec{l}$ tendo magnitude dl e direção tangente a curva C . Sua decomposição em coordenadas cartesianas é dada por

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

Para efetuar-se o cálculo da integral com respeito a variável x , por exemplo, calcula-se o efeito de um pequeno incremento dx sobre as coordenadas y e z da curva C , resultando em,

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

portanto,

$$d\vec{l} = dx \left(\hat{a}_x + \frac{\partial y}{\partial x} \hat{a}_y + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{a}_z \right)$$

$$|d\vec{l}| = \sqrt{d\vec{l} \cdot d\vec{l}} = dx \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

e a integração com respeito a variável l reduz-se a,

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_C f(x, y, z) \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

No cálculo dessa última integral, é necessário expressar-se as variáveis y e z em termos da variável x , o que equivale ao cálculo da função f sobre a curva C .

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.5.2 Integral de linha de um vetor

A função escalar no integrando da integral de linha pode representar uma das componentes de um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$. Seja um caminho C e um vetor \hat{t} tangente a curva C em cada um de seus pontos. Defina-se a integral de linha da projeção de \vec{F} sobre C por,

$$\int_C (\vec{F} \cdot \hat{t}) dl$$

Dados dl e \hat{t} , define-se o vetor deslocamento diferencial ao longo da curva por, $d\vec{l} = dl\hat{t}$, e a última integral pode ser posta na forma,

$$\int_C (\vec{F} \cdot \hat{t}) dl = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Para um caminho formando uma curva fechada, denota-se

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Essa última integral é também denominada de **circulação de \vec{F}** sobre C .

A decomposição do vetor deslocamento diferencial nos sistemas de coordenadas cilíndrica e esférica é obtida com base nas Figs. 1.9a e 1.9b e a integral de linha de um vetor, nos três sistemas de coordenadas considerados, pode ser expressa como a soma de integrais com respeito a uma única variável conforme delineado a seguir,

Cartesianas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C F_x dx + \int_C F_y dy + \int_C F_z dz$$

Cilíndricas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C F_r dr + \int_C F_\phi r d\phi + \int_C F_z dz$$

Esféricas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C F_R dR + \int_C F_\theta R d\theta + \int_C F_\phi R \sin \theta d\phi$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
 Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

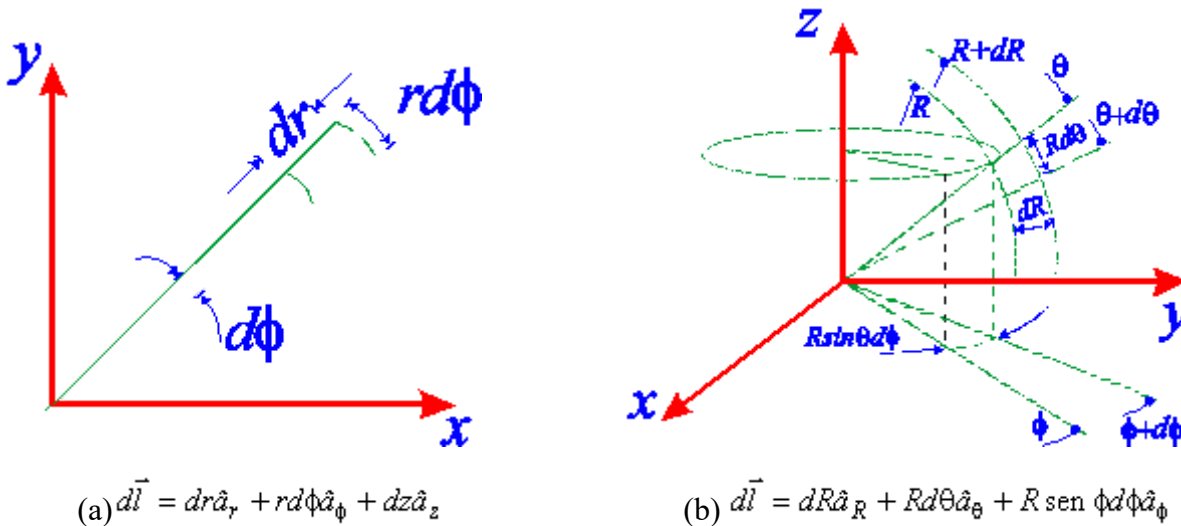
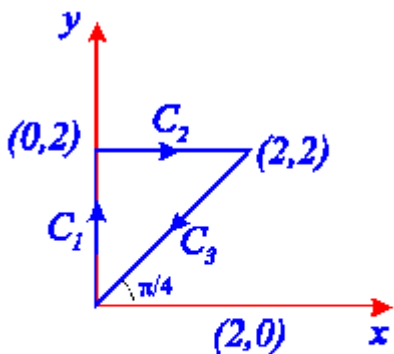


Fig.1.9 (a) Projeções no plano xy do vetor deslocamento diferencial no sistema de coordenadas cilíndricas. (b) Componentes do vetor deslocamento diferencial no sistema de coordenadas esféricas.

Exemplo 1.2: Para o caminho fechado C mostrado na Fig.1.10 calcular a circulação do campo vetorial, $\vec{F} = xy\hat{a}_x + y^2\hat{a}_y$ em coordenadas cilíndricas.

Primeiramente transforma-se \vec{F} utilizando-se a matriz de transformação dada pela Eq.(1.8)



$$\begin{aligned} \vec{F}_{r\phi z} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xy \cos \phi + y^2 \sin \phi \\ -xy \sin \phi + y^2 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 1.10 Geometria utilizada no Exemplo 1.2.

onde fez-se uso das transformações de coordenadas,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

Portanto em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{F} = r^2 \sin \phi \hat{a}_r,$$

Com base na Fig.1.10, as equações para os caminhos 1, 2 e 3 em coordenadas cilíndricas são

$$C_1 : \begin{cases} z = 0 \\ \phi = \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r \end{cases}, \quad C_2 : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{\pi}{2} > \phi > \frac{\pi}{4} \\ r \operatorname{sen} \phi = 2 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r + r d\phi\hat{a}_\phi \end{cases}, \quad C_3 : \begin{cases} z = 0 \\ \phi = \frac{\pi}{4} \\ 2\sqrt{2} > r > 0 \\ d\vec{l} = dr\hat{a}_r \end{cases}$$

portanto

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} F_r dr + \int_{C_2} F_r dr + \int_{C_3} F_r dr$$

Sobre os três caminhos, tem-se

$$C_1 : F_r = r^2, \quad C_2 : F_r = r^2 \frac{2}{r} = 2r, \quad C_3 : F_r = r^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{r^2}{\sqrt{2}},$$

resultando em

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^2 r^2 dr + \int_2^{2\sqrt{2}} 2r dr + \int_{2\sqrt{2}}^0 \frac{r^2}{\sqrt{2}} dr = \frac{4}{3}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.5.3 Integral de superfície

A integral de uma função sobre uma superfície é uma extensão do caso unidimensional. Seja S uma superfície e $f(x,y,z)$ uma função escalar. Seja $f_s(x,y,z)$ o valor dessa função calculada sobre pontos da superfície. Define-se a integral de superfície de f como sendo

$$\int_S f_s(x,y,z) dS,$$

onde dS é um elemento diferencial de área sobre a superfície S . Se f_s é a projeção de um campo vetorial \vec{F} ao longo da direção normal à superfície, denota-se,

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS,$$

como sendo o fluxo do vetor \vec{F} através de S , onde \hat{n} é o vetor unitário normal a superfície em cada ponto. Se a superfície é fechada, e o vetor \hat{n} aponta para fora do volume limitado por S , denota-se,

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS,$$

como sendo o fluxo líquido de \vec{F} para fora da região limitada por S . Note-se que se o vetor \vec{F} for tangente à superfície em todos os pontos, então o fluxo líquido é nulo. Será mostrado adiante que o cálculo do fluxo de um campo vetorial para fora de um volume limitado por uma superfície S auxilia na determinação de fontes de campo no interior do volume considerado.

É conveniente incorporar-se o caráter vetorial do vetor normal à superfície diretamente no elemento diferencial de área dS . Para isso, define-se um vetor área diferencial em cada ponto da superfície por,

$$d\vec{S} = dS\hat{n}$$

O vetor $d\vec{S}$, apontando em um dado sentido, tem magnitude igual ao produto de comprimentos diferenciais ao longo da superfície, e conseqüentemente as representações desse vetor nos três sistemas de coordenadas aqui considerados são dadas por:

- Cartesianas: $d\vec{S} = dydz\hat{a}_x + dx dz\hat{a}_y + dx dy\hat{a}_z$
- Cilíndricas: $d\vec{S} = rd\phi dz\hat{a}_r + dr dz\hat{a}_\phi + r dr d\phi\hat{a}_z$
- Esféricas: $d\vec{S} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi\hat{a}_R + R \sin\theta dR d\phi\hat{a}_\theta + R dR d\theta\hat{a}_\phi$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.5.4 Integral de volume

A integral de uma função ou vetor em um volume ocorre freqüentemente no estudo de Eletromagnetismo e em outras áreas da Física. Seja f uma função escalar e \vec{F} um campo vetorial, V um volume no espaço tridimensional e dV um volume diferencial. Denotam-se

$$\int_V f dV, \quad \int_V \vec{F} dV$$

como sendo as integrais de volume das grandezas f e \vec{F} , respectivamente. A escolha mais adequada para representação do elemento diferencial de volume depende da geometria do volume de integração. O elemento diferencial dV é o produto de três comprimentos diferenciais, e as representações correspondentes nos três sistemas de coordenadas são:

- Cartesianas: $dV = dx dy dz$
- Cilíndricas: $dV = r dr d\phi dz$
- Esféricas: $dV = R^2 dR \sin\theta d\theta d\phi$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.6. Operações diferenciais com vetores

1.6.1 Gradiente

Seja uma superfície descrita no sistema de coordenadas cartesianas pela equação $f(x,y,z)=C$. Na Fig.1.11a estão ilustradas duas superfícies adjacentes S_1 e S_2 , descritas respectivamente pelas equações,

$$\begin{aligned} S_1 : & \quad f(x,y,z) = C \\ S_2 : & \quad f(x,y,z) = C + dC \end{aligned}$$

onde $dC > 0$ é um pequeno incremento diferencial na constante C . O deslocamento do ponto P para o ponto Q ilustrados na Fig.1.11a, é representado pelo vetor deslocamento diferencial,

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

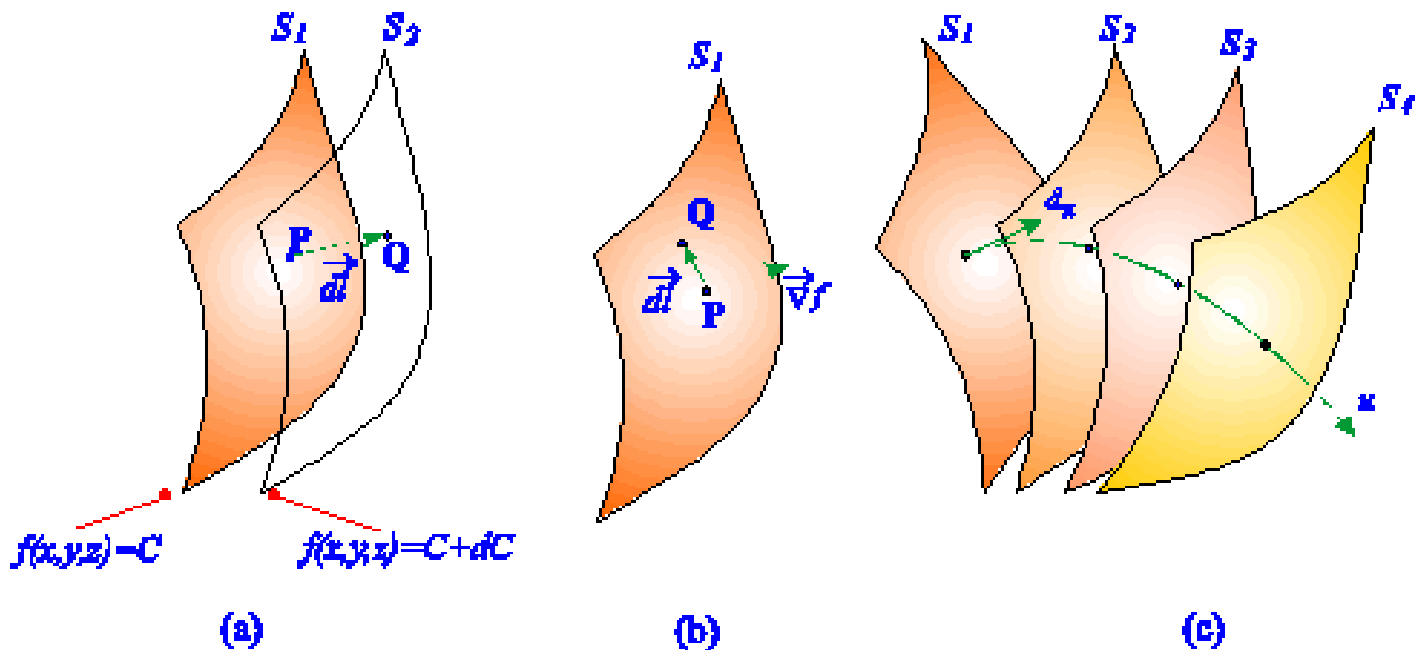


Fig.1.11 Geometria das superfícies e disposição de vetores utilizados na definição do gradiente de uma função.

A variação df , na função f , devido a esse deslocamento pode ser obtida utilizando-se o termo em primeira ordem de uma expansão de Taylor para funções de três variáveis

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

que pode ser expressa na forma do produto escalar

$$df = \left(\hat{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z) = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{l}$$

onde

$$\vec{\nabla}f = \left(\hat{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

é denominado de **gradiente da função f** . Esse vetor é resultante da ação do operador vetorial

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

sobre a função f , gerando como resultado um vetor.

Para pontos P e Q bem próximos e situados sobre S_1 conforme ilustrado na Fig.1.11b, a variação na função f é, $df = 0$, i.e.,

$$df = 0 = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{l}$$

o que indica que o vetor $\vec{\nabla}f$ é perpendicular a superfície S_1 no ponto P . Orientando-se o vetor $d\vec{l}$ de forma a torná-lo paralelo e no mesmo sentido do vetor $\vec{\nabla}f$, a magnitude de $d\vec{l}$ assume seu valor mínimo, resultando em

$$d\vec{l} \parallel \vec{\nabla}f \quad \Rightarrow \quad df = |\vec{\nabla}f| dl_{\min} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\nabla}f| = \frac{df}{dl_{\min}}$$

ou seja, o vetor $\vec{\nabla}f$ tem como magnitude a máxima taxa de variação da função f no ponto P e aponta no sentido dessa máxima variação. Definindo-se um caminho curvilíneo passando perpendicularmente a família de superfícies S_i descritas por equações do tipo, $f(x,y,z)=C_i$, conforme ilustrado na Fig.1.11c, permite expressar o gradiente na forma simples

$$\vec{\nabla}f = \hat{a}_u \frac{df}{du} \quad (1.13)$$

onde u é a variável que mede comprimento ao longo da direção normal ao conjunto de superfícies e \hat{a}_u é o vetor unitário, tangente a essa trajetória e orientado no sentido de crescimento de u .

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.6.2 Operador Nabla

O operador $\vec{\nabla}$ pode atuar sobre escalares ou vetores. Operação sobre uma função escalar resulta no vetor gradiente. A representação do vetor gradiente é feita com os vetores unitários escritos à esquerda dos respectivos operadores diferenciais, como na Eq.(1.13). Isso porque, em sistemas de coordenadas curvilíneas, vetores de base em geral dependem dessas coordenadas, e portanto essa notação evita que os operadores diferenciais atuem sobre os vetores de base. Da Eq.(1.13), o operador $\vec{\nabla}$, quando decomposto em uma base de vetores unitários, terá como componentes as derivadas com respeito aos comprimentos diferenciais medidos ao longo dos respectivos eixos coordenados, assumindo a forma geral,

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_1 \frac{\partial}{\partial l_1} + \hat{a}_2 \frac{\partial}{\partial l_2} + \hat{a}_3 \frac{\partial}{\partial l_3} \quad (1.14)$$

onde dl_i é o comprimento diferencial ao longo do eixo i . De acordo com essa expressão, as seguintes representações são obtidas nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas:

Cilíndricas:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.15)$$

Esféricas:

$$\vec{\nabla} = \hat{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\hat{a}_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{a}_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.16)$$

1.6.3 Divergente

O divergente é uma função escalar resultante de uma operação diferencial sobre um vetor. Considere-se um sistema ortogonal de coordenadas generalizadas, representadas pelas variáveis u , v e w . Os elementos diferenciais de comprimento associados a essas variáveis são definidos por

$$dl_1 = h_1 du, \quad dl_2 = h_2 dv, \quad dl_3 = h_3 dw.$$

Os parâmetros h , são fatores de escala, funções das coordenadas, que multiplicados pelos respectivos elementos diferenciais du , dv e dw , produzem os comprimentos diferenciais correspondentes. Na Tabela 1.1, estão tabulados os parâmetros h correspondentes aos três sistemas de coordenadas mais utilizados.

Tabela 1.1 Parâmetros h e variáveis correspondentes em três sistemas de coordenadas

	u	v	w	h_1	h_2	h_3
Cartesianas	x	y	z	1	1	1
Cilíndricas	r	ϕ	z	1	r	1
Esféricas	R	θ	ϕ	1	R	$R \sin \theta$

Seja o cubo curvilíneo de volume $\Delta V = h_1 h_2 h_3 du dv dw$, ilustrado na Fig.1.12, com centro no ponto $P(u_0, v_0, w_0)$, e um campo vetorial

$$\vec{F}(u, v, w) = \hat{a}_u F_u(u, v, w) + \hat{a}_v F_v(u, v, w) + \hat{a}_w F_w(u, v, w)$$

Define-se o divergente de \vec{F} no ponto P pela relação,

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.17)$$

que mede a densidade volumétrica de fluxo líquido do vetor \vec{F} para fora de um volume diferencial com centro no ponto P . Com base na geometria ilustrada nas Figs.1.12a e b, é possível determinar-se formalmente uma expressão para o divergente em termos das componentes de \vec{F} e das coordenadas u , v e w . Para isso basta computar-se o fluxo do vetor \vec{F} para fora do volume diferencial, através das seis superfícies do cubo curvilíneo. Na Fig.1.12b, estão indicadas as superfícies S_1 e S_2 , e a superfície intermediária S_0 . Sendo \hat{a}_u o vetor normal a superfície intermediária, obtém-se para o fluxo através dessa superfície

$$\Phi_u(u_0) = \vec{F} \cdot \hat{a}_u \Delta S = F_u h_2 h_3 dv dw$$

Os fluxos através das superfícies que têm em comum o vetor unitário \hat{a}_u , podem ser expressos em termos de $\Phi_u(u_0)$ a partir das expansões de Taylor em 1ª. ordem

$$\Phi_u(u_0 + du/2) = \Phi_u(u_0) + \frac{\partial \Phi_u}{\partial u} \frac{du}{2}, \text{ para o exterior do cubo através de } S_1$$

$$\Phi_u(u_0 - du/2) = \Phi_u(u_0) - \frac{\partial \Phi_u}{\partial u} \frac{du}{2}, \text{ para o interior do cubo através de } S_2$$

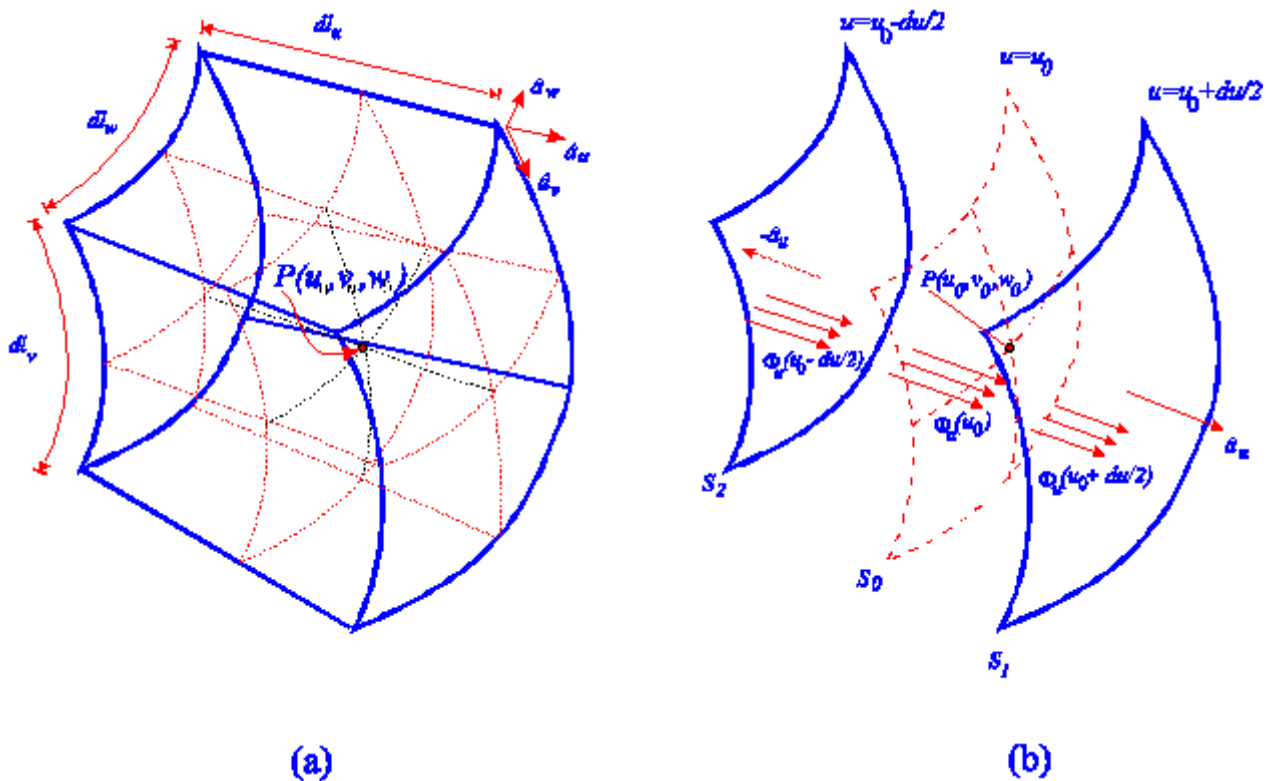


Fig.1.12. Cubo curvilíneo utilizado no cálculo formal do divergente de um campo vetorial.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Assim, a contribuição das superfícies S_1 e S_2 para o fluxo total para o exterior da região limitada pelo cubo pode ser obtida de

$$\Phi_u(u_0 + du/2) - \Phi_u(u_0 - du/2) = \frac{\partial \Phi_u}{\partial u} du = \frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} dudvdw$$

A contribuição das outras superfícies é obtida fazendo-se permutações cíclicas sobre os respectivos índices e coordenadas, resultando em,

$$\Phi_v(v_0 + dv/2) - \Phi_v(v_0 - dv/2) = \frac{\partial(F_v h_1 h_3)}{\partial v} dudvdw,$$

$$\Phi_w(w_0 + dw/2) - \Phi_w(w_0 - dw/2) = \frac{\partial(F_w h_1 h_2)}{\partial w} dudvdw,$$

donde

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} du dv dw + \frac{\partial(F_v h_1 h_3)}{\partial v} du dv dw + \frac{\partial(F_w h_1 h_2)}{\partial w} du dv dw \right) du dv dw$$

Inserindo-se essa última expressão na Eq.(1.17), fornece

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_1 h_3)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_1 h_2)}{\partial w} \right) \quad (1.18)$$

Utilizando-se os parâmetros da Tabela 1.1 e a Eq.(1.18), as seguintes expressões são obtidas nos três sistemas de coordenadas:

$$xyz: \quad \text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.19)$$

$$r\phi z: \quad \text{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

$$R\theta\phi: \quad \text{div} \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 F_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (1.21)$$

A divergência de um campo vetorial, indica a existência de fontes ou sumidouros associados a esse campo. Se a divergência em um ponto é nula, o fluxo total que entra é o mesmo que sai em um volume arbitrariamente pequeno circundando o ponto considerado, indicando assim uma certa conservação das linhas de campo naquele ponto. Se a divergência é positiva, existe um fluxo líquido para o exterior do volume diferencial ao redor do ponto considerado, indicando a presença de uma fonte capaz de produzir essas linhas de campo. Finalmente, quando a divergência é negativa, existe um fluxo líquido convergindo para o interior do volume diferencial, indicativo da existência de um sumidouro de linhas de campo no ponto sob consideração.

Considerando-se a Eq.(1.19), pode-se escrever o divergente de um campo vetorial na forma

$$\text{div} \vec{F} = \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \hat{a}_x + F_y \hat{a}_y + F_z \hat{a}_z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Ou seja, no sistema de coordenadas cartesianas, o divergente de um campo vetorial é obtido diretamente do produto escalar do vetor $\vec{\nabla}$ com o vetor \vec{F} . Essa expressão também se verifica em qualquer sistema de coordenadas, mas deve-se levar em conta que em outros sistemas os vetores de base dependem das coordenadas, e que os operadores diferenciais atuam sobre os vetores de base. Por exemplo, considerando-se o sistema de coordenadas cilíndricas e a Eq.(1.17), tem-se

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_r \hat{a}_r + F_\phi \hat{a}_\phi + F_z \hat{a}_z) \\ &= \hat{a}_r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (F_r \hat{a}_r) + \frac{\partial}{\partial r} (F_\phi \hat{a}_\phi) + \frac{\partial}{\partial r} (F_z \hat{a}_z) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (F_r \hat{a}_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi \hat{a}_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_z \hat{a}_z) \right) \\ &\quad + \hat{a}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} (F_r \hat{a}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (F_\phi \hat{a}_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (F_z \hat{a}_z) \right) \end{aligned}$$

Antes da realização dos produtos escalares, deve-se observar que os vetores \hat{a}_r e \hat{a}_ϕ dependem da coordenada. A forma explícita dessa dependência é obtida decompondo-se esses vetores na base de vetores do sistema de coordenadas cartesianas. Com base na matriz de transformação dada pela Eq.(1.8), tem-se que,

$$\hat{a}_r = \cos \phi \hat{a}_x + \sin \phi \hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\phi = -\sin \phi \hat{a}_x + \cos \phi \hat{a}_y$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Diferenciação desses vetores com respeito a variável ϕ fornece

$$\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{a}_x + \cos \phi \hat{a}_y = \hat{a}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial \phi} = -\cos \phi \hat{a}_x - \sin \phi \hat{a}_y = -\hat{a}_r$$

Levando-se em conta essas propriedades no desenvolvimento da operação $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, resulta em

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \cdot \left(\hat{a}_r \frac{\partial F_r}{\partial \phi} + F_r \hat{a}_\phi + \hat{a}_\phi \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + F_\phi (-\hat{a}_r) \right) \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

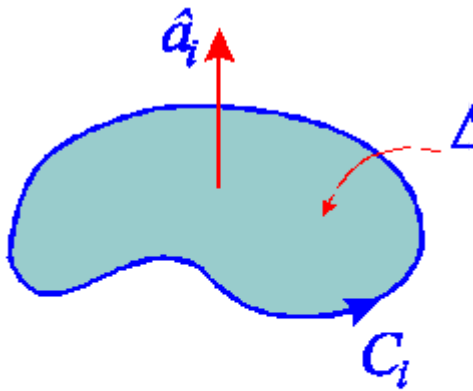
Comparando-se essa última expressão com a Eq.(1.20) tem-se

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.6.4 Rotacional

O rotacional é uma operação diferencial realizada sobre um vetor, produzindo como resultado um outro vetor e é útil na determinação das propriedades de circulação de campos vetoriais. Com base na Fig.1.13, define-se o rotacional de um campo vetorial \vec{F} pela relação



$$rot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{1.22}$$

Fig.1.13 Geometria utilizada para o cálculo do rotacional de um campo vetorial

Verifica-se da definição dada pela Eq.(1.22) que cada componente do vetor rotacional é a razão entre a circulação do campo vetorial e a área limitada pelo caminho de integração, calculada no limite quando essa área tende a zero. No cálculo da Eq.(1.22), a orientação do caminho é definida de forma que a área por ele limitada esteja sempre situada à esquerda no decorrer do percurso de integração. O vetor unitário normal a área diferencial é orientado no sentido da extremidade do polegar ao simular-se a trajetória de integração com a mão direita.

Considere-se um sistema genérico de coordenadas curvilíneas (u, v, w) e a geometria ilustrada na Fig.1.14 para o cálculo da componente u da Eq.(1.22). Admitindo-se um campo vetorial da forma

$$\vec{F} = \hat{a}_u F_u(u, v, w) + \hat{a}_v F_v(u, v, w) + \hat{a}_w F_w(u, v, w) ,$$

a integral de linha da Eq.(1.22) reduz-se a

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

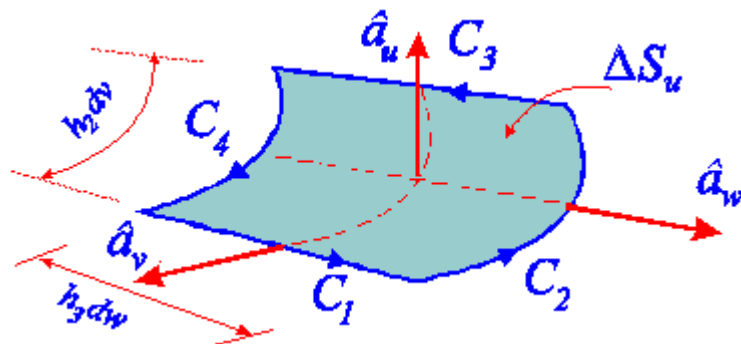


Fig.1.14 Geometria para o cálculo do rotacional em termos das componentes do campo vetorial \vec{F}

Supondo-se conhecidas as integrais de linha sobre os dois caminhos que cruzam o centro do retângulo curvilíneo, as integrais ao longo dos quatro segmentos indicados na Fig.1.14 podem ser obtidas a partir das expansões de Taylor em 1ª. ordem

$$I_1 = I_w + \frac{\partial I_w}{\partial v} \frac{dv}{2}, \quad -I_2 = I_w - \frac{\partial I_w}{\partial v} \frac{dv}{2},$$

$$-I_3 = I_v - \frac{\partial I_v}{\partial w} \frac{dw}{2}, \quad I_4 = I_v + \frac{\partial I_v}{\partial w} \frac{dw}{2}$$

onde,

$$I_v = F_v h_2 dv, \quad I_w = F_w h_3 dw,$$

são as integrais de linha intermediárias no sentido crescente das variáveis v e w , respectivamente.

A integral de linha resultante é portanto,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = dv \frac{\partial I_w}{\partial v} - dw \frac{\partial I_v}{\partial w} = dv dw \left[\frac{\partial(F_w h_3)}{\partial v} - \frac{\partial(F_v h_2)}{\partial w} \right]$$

A área do retângulo diferencial é aproximadamente,

$$\Delta S_u = h_2 h_3 dv dw$$

e a componente u do rotacional, obtida da Eq.(1.22),

$$(\text{rot} \vec{F})_u = \lim_{\Delta S_u \rightarrow 0} \frac{dv dw \left[\frac{\partial(F_w h_3)}{\partial v} - \frac{\partial(F_v h_2)}{\partial w} \right]}{h_2 h_3 dv dw}$$

donde

$$(\text{rot} \vec{F})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(F_w h_3)}{\partial v} - \frac{\partial(F_v h_2)}{\partial w} \right] \quad (1.23)$$

As outras componentes são obtidas realizando-se permutações cíclicas nos índices e coordenadas, o que fornece:

$$(\text{rot} \vec{F})_v = \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(F_u h_1)}{\partial w} - \frac{\partial(F_w h_3)}{\partial u} \right] \quad (1.24)$$

$$(\text{rot} \vec{F})_w = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(F_v h_2)}{\partial u} - \frac{\partial(F_u h_1)}{\partial v} \right] \quad (1.25)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

As Equações (1.23)-(1.25) são válidas para um sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas generalizadas. Nos três sistemas de coordenadas mais usados e com base na Tabela 1.1, essas expressões assumem as formas:

Cartesianas:

$$\text{rot} \vec{F} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (1.26)$$

Cilíndricas:

$$\text{rot} \vec{F} = \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \quad (1.27)$$

Esféricas:

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{\hat{a}_R}{R\sin\theta} \left(\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi} \right) + \frac{\hat{a}_\theta}{R} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_R}{\partial\phi} - \frac{\partial(RF_\phi)}{\partial R} \right) + \frac{\hat{a}_\phi}{R} \left(\frac{\partial(RF_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial F_R}{\partial\theta} \right) \quad (1.28)$$

A operação $\text{rot}\vec{F}$ pode ser obtida diretamente do produto vetorial do operador $\vec{\nabla}$ com o vetor \vec{F} , levando-se em conta a operação diferencial sobre os vetores unitários do sistema de coordenadas curvilíneas. Por exemplo, no sistema de coordenadas cilíndricas obtém-se formalmente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{a}_r F_r + \hat{a}_\phi F_\phi + \hat{a}_z F_z) \\ &= \hat{a}_r \times \left(\frac{\partial}{\partial r} (\hat{a}_r F_r) + \frac{\partial}{\partial r} (\hat{a}_\phi F_\phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\hat{a}_z F_z) \right) + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_r F_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_\phi F_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_z F_z) \right) + \\ &+ \hat{a}_z \times \left(\frac{\partial}{\partial z} (\hat{a}_r F_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{a}_\phi F_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{a}_z F_z) \right) \end{aligned}$$

Em coordenadas cilíndricas os vetores \hat{a}_r e \hat{a}_ϕ dependem apenas da coordenada ϕ , conforme descrito na Sec. 1.6.3. Efetuando-se os produtos vetoriais entre vetores unitários obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \hat{a}_r \times \left(\hat{a}_\phi \frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \hat{a}_z \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_r F_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_\phi F_\phi) + \hat{a}_z \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \right) + \hat{a}_z \times \left(\hat{a}_r \frac{\partial F_r}{\partial z} + \hat{a}_\phi \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \\ &= \hat{a}_z \frac{\partial F_\phi}{\partial r} - \hat{a}_\phi \frac{\partial F_z}{\partial r} + \frac{\hat{a}_r}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} + \hat{a}_\phi \frac{\partial F_r}{\partial z} - \hat{a}_r \frac{\partial F_\phi}{\partial z} + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_r F_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{a}_\phi F_\phi) \right) \\ &= \hat{a}_z \frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \frac{\hat{a}_\phi}{r} \times \left(\hat{a}_\phi F_r + \hat{a}_r \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \hat{a}_r F_\phi + \hat{a}_\phi \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right) \\ &= \hat{a}_z \frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) - \frac{\hat{a}_z}{r} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - F_\phi \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \hat{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \frac{\hat{a}_z}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

Comparando-se essa última expressão com a Eq. (1.27) fornece

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (1.29)$$

Existe uma segunda forma de definição da operação rotacional que envolve uma integração na superfície fechada que limita o ponto considerado. Essa definição é útil no desenvolvimento de algumas relações integrais e pode ser desenvolvida com base na geometria do cubo curvilíneo ilustrado na Fig.1.12a. Seja $d\vec{S}$ o vetor área diferencial em cada face do cubo e dV o volume diferencial correspondente. O rotacional pode então ser definido na forma

$$\text{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} \quad (1.30)$$

Note-se que a Eq.(1.30) tem uma forma semelhante a Eq.(1.17) a menos da natureza vetorial. Para verificar-se que o resultado obtido com essa nova definição é idêntico àquele obtido da Eq.(1.22), considere-se as contribuições das superfícies S_1 e S_2 para a integração de superfície, expressas em termos da contribuição da superfície S_0 , conforme ilustrado na Fig.1.12b. Na superfície S_0 tem-se

$$\vec{I}_0 = \int_{S_0} d\vec{S} \times \vec{F} \approx h_2 h_3 dv dw \hat{a}_u \times (\hat{a}_u F_u + \hat{a}_v F_v + \hat{a}_w F_w) = h_2 h_3 dv dw (F_v \hat{a}_w - F_w \hat{a}_v)$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

De forma semelhante àquela descrita anteriormente as integrações nas superfícies S_1 e S_2 podem ser expressas como as expansões de Taylor em 1ª. ordem

$$\vec{I}_1 = \int_{S_1} d\vec{S} \times \vec{F} = \vec{I}_0 + \frac{du}{2} \frac{\partial \vec{I}_0}{\partial u}$$

$$\vec{I}_2 = \int_{S_2} d\vec{S} \times \vec{F} = - \left(\vec{I}_0 - \frac{du}{2} \frac{\partial \vec{I}_0}{\partial u} \right)$$

onde o sinal negativo na última expressão é decorrência de a normal para o exterior da região na superfície S_2 apontar no sentido do vetor $-\hat{a}_u$. Assim a contribuição das superfícies S_1 e S_2 é dada por

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = du \frac{\partial \vec{I}_0}{\partial u} = du dv dw \frac{\partial}{\partial u} [h_2 h_3 (F_v \hat{a}_w - F_w \hat{a}_v)]$$

que pode ser reescrita na forma

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = du dv dw \left\{ \left[h_3 \hat{a}_w \frac{\partial}{\partial u} (h_2 F_v) - h_2 \hat{a}_v \frac{\partial}{\partial u} (h_3 F_w) \right] + \left[h_2 F_v \frac{\partial}{\partial u} (h_3 \hat{a}_w) - h_3 F_w \frac{\partial}{\partial u} (h_2 \hat{a}_v) \right] \right\}$$

A partir desse resultado, as integrações nas quatro superfícies restantes podem ser obtidas realizando-se permutações cíclicas nas coordenadas, resultando em

$$\begin{aligned} \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} &= du dv dw \left\{ \hat{a}_u h_1 \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 F_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 F_v) \right] + \hat{a}_v h_2 \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 F_w) \right] \right. \\ &\quad + \hat{a}_w h_3 \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 F_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_u) \right] + h_3 F_w \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 \hat{a}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 \hat{a}_u) \right] \\ &\quad \left. + h_1 F_u \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 \hat{a}_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 \hat{a}_v) \right] + h_2 F_v \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 \hat{a}_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 \hat{a}_w) \right] \right\} \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que os últimos três termos do segundo membro da expressão anterior são todos nulos. Para isso, é suficiente mostrar que um deles se anula e utilizar a correspondência cíclica entre os termos. A demonstração é como segue. Considere-se o vetor deslocamento diferencial

$$d\vec{X} = du \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} + dv \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} + dw \frac{\partial \vec{X}}{\partial w}$$

que no sistema uvw pode também ser escrito na forma

$$d\vec{X} = duh_1\hat{a}_u + dvh_2\hat{a}_v + dwh_3\hat{a}_w$$

A igualdade dessas duas relações fornece

$$\hat{a}_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}, \hat{a}_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}, \hat{a}_w = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{X}}{\partial w}$$

Assim, o primeiro dos três últimos termos da integral de superfície pode ser escrito na forma

$$h_3 F_w \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 \hat{a}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 \hat{a}_u) \right] = h_3 F_w \left[\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v \partial u} \right] = 0,$$

e o mesmo resultado se aplica para os dois últimos termos. Com esse resultado a integral na superfície do cubo curvilíneo reduz-se a

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{F} = dudvdw \left\{ \hat{a}_u h_1 \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 F_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 F_v) \right] + \hat{a}_v h_2 \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 F_w) \right] \right. \\ \left. + \hat{a}_w h_3 \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 F_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_u) \right] \right\}$$

Utilizando-se esse último resultado juntamente com a expressão $\Delta V = h_1 h_2 h_3 dudvdw$, na definição dada pela Eq.(1.30) obtém-se finalmente

$$\text{rot} \vec{F} = \left\{ \frac{\hat{a}_u}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 F_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 F_v) \right] + \frac{\hat{a}_v}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 F_w) \right] + \frac{\hat{a}_w}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 F_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_u) \right] \right\}$$

o que corresponde ao resultado contido nas Eqs.(1.23)–(1.25).

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.7. Identidades vetoriais

O operador $\vec{\nabla}$ pode operar sobre escalares ou vetores ou combinações de produtos dessas grandezas e várias identidades vetoriais podem ser obtidas da definição básica do operador $\vec{\nabla}$ conforme ilustrado a seguir:

1.7.1 $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A})$

Utilizando-se a notação compacta e a definição do produto escalar, tem-se

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \hat{a}_i \nabla_i \cdot (f\hat{a}_j A_j)$$

onde é subtendida a soma nos índices i e j e $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$. Utilizando-se a regra da cadeia para a operação de diferenciação, obtém-se

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \hat{a}_i \cdot \nabla_i (f\hat{a}_j A_j) + \hat{a}_i \cdot (\hat{a}_j A_j) \nabla_i f + f\hat{a}_i \cdot \nabla_i (\hat{a}_j A_j)$$

$$= (\hat{a}_j A_j) \cdot (\hat{a}_i \nabla_i) f + f (\hat{a}_i \nabla_i) \cdot (\hat{a}_j A_j)$$

donde

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (1.31)$$

1.7.2 $\vec{\nabla} \times (f\vec{A})$

Utilizando-se o procedimento delineado anteriormente, obtém-se

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = \hat{a}_i \times \nabla_i (f \hat{a}_j A_j) + \hat{a}_i \times (\hat{a}_j A_j) \nabla_i f + f \hat{a}_i \times \nabla_i (\hat{a}_j A_j)$$

$$= -(\hat{a}_j A_j) \times (\hat{a}_i \nabla_i) f + f (\hat{a}_i \nabla_i) \times (\hat{a}_j A_j)$$

donde

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = -\vec{A} \times \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.32)$$

1.7.3 $\nabla^2 f$

A divergência do gradiente de um escalar é denominada de *Laplaciano* que é um operador diferencial de 2a. ordem encontrado freqüentemente em teoria de campos. Utilizando-se a Eq.(1.14), e os parâmetros h definidos anteriormente, o gradiente de um escalar pode ser expresso como

$$\vec{\nabla} f = \frac{\hat{a}_u}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\hat{a}_v}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\hat{a}_w}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \equiv \hat{a}_u F_u + \hat{a}_v F_v + \hat{a}_w F_w$$

O divergente do vetor $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ é obtido da Eq.(1.16), resultando em

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \quad (1.33)$$

Utilizando-se os parâmetros da Tabela 1.1, obtém-se as seguintes expressões nos sistemas de coordenadas considerados neste capítulo:

Cartesianas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.34)$$

Cilíndricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.35)$$

Esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.36)$$

1.7.4 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$

Considere-se a determinação do rotacional do gradiente de uma função escalar. Utilizando-se a notação compacta, com índices repetidos representando soma, o gradiente e o rotacional podem ser representados por,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\hat{a}_j}{h_j} \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial}{\partial u_i} (h_j F_j) \varepsilon_{ijk} \hat{a}_k$$

onde, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$. Fazendo-se $F_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial f}{\partial u_j}$, obtém-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \varepsilon_{ijk} \hat{a}_k = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \varepsilon_{ijk} \hat{a}_k$$

Para uma função f com 2ª. derivada contínua tem-se que, $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}$. Portanto, fixado o índice k , e fazendo-se uso da propriedade $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, conclui-se que,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \quad \forall f \quad (1.37)$$

Essa identidade implica que: **qualquer campo vetorial obtido do gradiente de uma função escalar é irrotacional.**

1.7.5 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

Considere-se agora o divergente do rotacional de um vetor. Para isso, a Eq.(1.16) é expressa na forma compacta,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} (A_i h_j h_k) \frac{|\varepsilon_{ijk}|}{2}$$

com índices repetidos indicando soma, e o último fator na expressão anterior, satisfaz a,

$$\frac{|\varepsilon_{ijk}| + |\varepsilon_{jik}|}{2} = \begin{cases} 1 & \text{para os três índices distintos} \\ 0 & \text{com dois dos índices iguais} \end{cases}$$

Seja

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = A_i \hat{a}_i = \frac{1}{h_l h_m} \frac{\partial}{\partial u_l} (h_m F_m) \varepsilon_{ilm} \hat{a}_i$$

cuja divergência é,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_4} \left(\frac{h_j h_k}{h_l h_m} \frac{\partial}{\partial u_l} (h_m F_m) \right) \varepsilon_{lmi} \frac{|\varepsilon_{ijk}|}{2}$$

onde nessa última expressão tem-se uma soma sobre os índices repetidos i, j, k, l, m . Notando-se que,

$$\varepsilon_{lmi} |\varepsilon_{ijk}| = \varepsilon_{lmi} |\varepsilon_{jki}|$$

e este termo será não nulo para cada valor do índice i , se a seguinte condição for satisfeita,

$$l, m = \begin{cases} j, k \\ k, j \end{cases}$$

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Quando esta condição é satisfeita, tem-se que,

$$\varepsilon_{lmi} |\varepsilon_{ijk}| = \varepsilon_{lmi} \quad , \quad \frac{h_j h_k}{h_l h_m} = 1 \quad ,$$

portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial^2}{\partial u_4 \partial u_l} (h_m F_m) \frac{\varepsilon_{lmi}}{2}$$

Para F_m com 2ª. derivada contínua tem-se

$$\frac{\partial^2}{\partial u_l \partial u_l} (h_m F_m) = \frac{\partial^2}{\partial u_l \partial u_l} (h_m F_m)$$

e utilizando-se a propriedade $\varepsilon_{lmi} = -\varepsilon_{iml}$, obtém-se finalmente,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad \forall \vec{F} \quad (1.38)$$

Essa identidade implica que: **qualquer campo vetorial derivado do rotacional de outro vetor, possui divergência nula.**

1.7.6 Outras identidades vetoriais

Existem outras identidades envolvendo operadores e vetores que são de importância no formalismo matemático da teoria eletromagnética, algumas das quais listadas a seguir. A demonstração dessas expressões é geralmente realizada seguindo procedimentos semelhantes àqueles delineados anteriormente.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (1.39)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (1.40)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (1.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (1.42)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (1.43)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.44)$$

1.8. Alguns teoremas da análise vetorial

Várias relações integrais são de importância no formalismo matemático da teoria eletromagnética e algumas destas são descritas a seguir.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.8.1 Teorema de Gauss

A definição da divergência de um vetor expressa pela Eq.(1.15), pode ser posta na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{d\Phi}{dV}$$

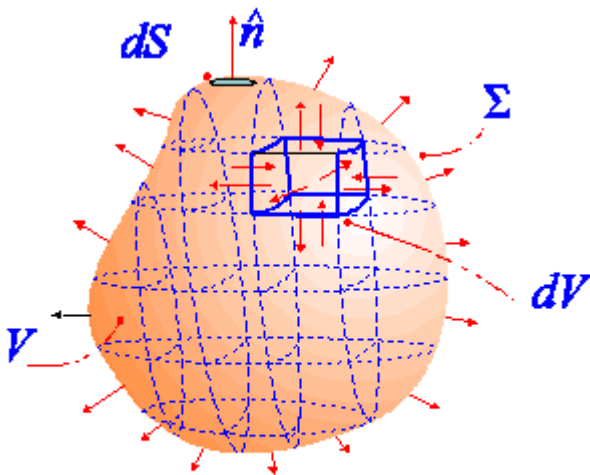


Fig.1.15 Geometria utilizada na demonstração do teorema de Gauss.

com $d\Phi$ representando o fluxo líquido do vetor \vec{A} para fora da região diferencial em torno do ponto P . Essa última relação permite obter o fluxo líquido a partir do conhecimento do divergente e do volume diferencial uma vez que

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (1.45)$$

A generalização dessa expressão para o caso de um volume macroscópico V limitado por uma superfície fechada Σ pode ser obtida com base na Fig.1.15. O volume V é subdividido em elementos diferenciais, e sobre cada elemento a Eq.(1.45) é utilizada para calcular o fluxo líquido para fora do elemento diferencial de volume. Efetuando-se a soma dos fluxos diferenciais de cada elemento, componentes de fluxo calculadas sobre superfícies

comuns a elementos adjacentes se cancelam. Conseqüentemente, ao se somar as contribuições diferenciais, as únicas componentes de fluxo que não se cancelam são aquelas calculadas sobre a superfície Σ . Dessa forma, pode-se escrever,

$$\int d\Phi = \oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{A}$$

que leva ao *teorema de Gauss*,

$$\oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (1.46)$$

onde $d\vec{S} = \hat{n}dS$ é o vetor área diferencial dirigido para fora do volume V .

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana
Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

1.8.2 Teorema de Stokes

A definição do rotacional de um vetor dada pela Eq.(1.19) pode ser expressa na forma,

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

onde \hat{n} é um vetor unitário normal ao elemento de área ΔS , e C é o caminho de integração, orientado de acordo com a regra da mão direita. Essa relação permite obter a circulação do campo vetorial a partir do conhecimento da projeção do rotacional na direção normal à superfície limitada pelo caminho. Definindo-se no limite,

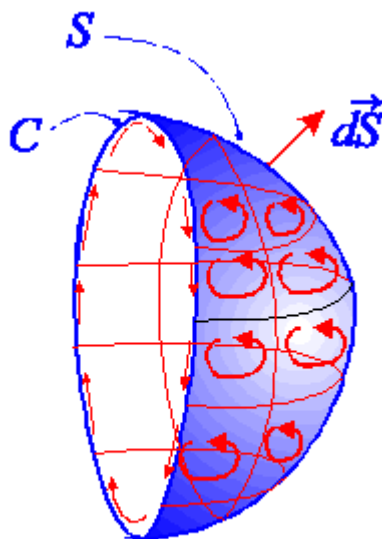


Fig.1.16 Geometria utilizada na demonstração do teorema de Stokes

$$dI = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

pode-se escrever,

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{dI}{dS}$$

donde

$$dI = d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \quad (1.47)$$

A Eq.(1.47) pode ser generalizada para o cálculo de circulação de um campo vetorial, qualquer que seja a forma e tamanho do caminho, conforme ilustrado na Fig.1.16. A superfície é subdividida em elementos diferenciais, e sobre cada elemento, a Eq.(1.47) é utilizada para o cálculo da integral de

linha no caminho limitando o elemento de superfície correspondente. Efetuando-se a soma dessas circulações diferenciais sobre todos os elementos da superfície, integrais de linha calculadas sobre segmentos comuns a elementos adjacentes se cancelam. Conseqüentemente, ao somar-se as contribuições diferenciais, o único segmento que contribui para a integral de linha do vetor \vec{F} é o caminho C limitando a superfície S . Pode-se escrever portanto,

$$\int dI = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

resultando no **teorema de Stokes**,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (1.48)$$

Uma outra identidade integral envolvendo o rotacional de um campo vetorial decorre diretamente da Eq.(1.30). Com base naquela equação e seguindo procedimento semelhante àquele que levou a Eq. (1.46) pode-se mostrar que

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oint_{\Sigma} d\vec{S} \times \vec{A} \quad (1.49)$$

onde Σ é a superfície fechada que limita o volume V , conforme ilustrado na Fig.1.15.

1.8.3 Identidades de Green

As identidades de Green seguem diretamente do teorema da divergência e são úteis no formalismo das funções de Green para determinação de campos. Considere-se duas funções f e g , que são utilizadas para gerar os vetores, $\vec{\nabla}f$ e $\vec{\nabla}g$. Utilizando-se a identidade vetorial expressa pela Eq.(1.26), obtém-se,

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\nabla^2 g \quad (1.50)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (g\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}g \cdot \vec{\nabla}f + g\nabla^2 f \quad (1.51)$$

Efetuando-se a diferença entre as Eqs.(1.50) e (1.51) e integrando-se o resultado em um volume V , resulta em

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot (g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g) = \int_V dV (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)$$

Aplicando-se o teorema de Gauss, expresso pela Eq. (1.46), no primeiro membro, resulta em

$$\oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot (g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g) = \int_V dV (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g) \quad (1.52)$$

que é o Teorema de Green. Procedimento semelhante aplicado à Eq.(1.50), leva a primeira identidade de Green,

$$\oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot f\vec{\nabla}g = \int_V dV (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\nabla^2 g) \quad (1.53)$$

1.8.4 Teorema de Helmholtz

O Teorema de Helmholtz estabelece que um campo vetorial é univocamente especificado em uma região, se forem conhecidos seu divergente, rotacional e sua componente normal sobre a superfície que limita a região. A importância deste teorema na teoria eletromagnética é consequência da forma de representação matemática do comportamento de campos eletromagnéticos em termos de operações de divergência e rotacional. Para demonstrar-se o teorema, seja um vetor \vec{A} definido em uma região limitada por uma superfície fechada, tal que,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f$$

com \vec{F}, f especificadas em toda região, conjuntamente com a componente normal de \vec{A} sobre $A_n(\Sigma)$. Admitindo-se a existência de um vetor distinto \vec{B} satisfazendo as mesmas propriedades, ou seja

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = f$$

$$B_n(\Sigma) = A_n(\Sigma),$$

a unicidade do vetor \vec{A} ficará demonstrada se a condição, $\vec{A} = \vec{B}$, for satisfeita. Para isso, constrói-se o vetor,

$$\vec{U} = \vec{A} - \vec{B}$$

que satisfaz as propriedades,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = 0$$

$$U_n(\Sigma) = 0$$

Como \vec{U} é irrotacional, da Eq.(1.37), pode-se definir uma função, tal que,

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \Phi,$$

e a divergência nula de \vec{U} fornece

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0$$

Utilizando-se a 1ª. identidade de Green dada pela Eq.(1.53), com $f = g = \Phi$, resulta em

$$\oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \Phi \vec{\nabla} \Phi = \oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \Phi \vec{U} = \int_V dV \left(|\vec{\nabla} \Phi|^2 + \Phi \nabla^2 \Phi \right) = \int_V dV |\vec{\nabla} \Phi|^2$$

donde

$$\oint_{\Sigma} dS \Phi U_n(\Sigma) = \int_V dV |\vec{\nabla} \Phi|^2$$

Dado que $U_n(\Sigma) = 0$ vem

$$\int_V dV |\vec{U}|^2 = 0$$

Como a grandeza $|\vec{U}|^2$ é positiva definida, a integração de volume só será nula se $\vec{U} = \vec{0}$ para qualquer ponto no interior do volume, o que implica $\vec{A} = \vec{B}$, como se queria demonstrar.

Copyright Versão Impressa 1994 by Eduardo Fontana

Copyright Versão ebook 2011 by Eduardo Fontana

Problemas

- 1.1) Considere a função, $\Psi = f(\vec{k} \cdot \vec{X})$, com $\vec{k} = a\hat{a}_x + b\hat{a}_y + c\hat{a}_z$ e $\vec{X} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$. Mostre que $\vec{\nabla}\Psi = \vec{k} \frac{df}{du}$, onde $u = \vec{k} \cdot \vec{X}$.
- 1.2) Calcule o valor da integral de linha,

$$\int_C \frac{\cos \phi}{r} dy$$

onde C é o segmento de reta orientado do ponto $(a,0,0)$ ao ponto $(a,a,0)$.

- 1.3) Determine,

$$\int_C (\sin \phi \hat{a}_r + r \cos \phi \hat{a}_\phi + \tan \phi \hat{a}_z) \cdot d\vec{l}$$

onde C é o arco de circunferência orientado, definido por $r=3, z=0, 0 \leq \phi \leq \pi/2$.

- 1.4) Dado o campo vetorial $\vec{A} = x^2 \hat{a}_x + yz \hat{a}_y + xy \hat{a}_z$, determine o fluxo desse vetor através da superfície definida pelas condições, $\{z=4, 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$.

- 1.5) Para o campo vetorial $\vec{A} = x^2 y \hat{a}_x$, determine $\int_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}$, sobre a superfície Σ do cubo cujos vértices estão localizados nos pontos,

$(0,0,0); (1,0,0); (1,1,0); (0,1,0)$

$(0,0,1); (1,0,1); (1,1,1); (0,1,1)$

Admita que $d\vec{S}$ seja o vetor área diferencial dirigido para fora da região limitada por Σ .

- 1.6) Use o teorema de Gauss e determine a resposta da questão anterior, pelo cálculo de uma integral de volume na região limitada por Σ .
- 1.7) Dado o campo vetorial $\vec{A} = f(R)\hat{a}_R$, mostre que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$.
- 1.8) Dado o campo vetorial $\vec{A} = f(r)\hat{a}_\phi$, mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

1.9) Calcule as seguintes integrais:

$$\int_C \hat{a}_r d\phi, \int_C \hat{a}_\phi d\phi, \int_C \hat{a}_r \cos \phi d\phi, \int_C \hat{a}_\phi \cos \phi d\phi, \int_C \hat{a}_r \sin \phi d\phi, \int_C \hat{a}_\phi \sin \phi d\phi$$

onde C é a circunferência $z=0, r=1$.

1.10) Calcule as seguintes derivadas e expresse suas respostas na base de vetores do sistema de coordenadas esféricas.

$$\frac{\partial \hat{a}_R}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{a}_R}{\partial \phi}, \frac{\partial \hat{a}_R}{\partial R}, \frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \phi}, \frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial R}, \frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial \phi}, \frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial R}$$

1.11) Calcule as integrais de superfície:

$$\int_\Sigma \hat{a}_R \cos \theta dS, \int_\Sigma \hat{a}_\theta \cos \theta dS, \int_\Sigma \hat{a}_R \sin \theta dS, \int_\Sigma \hat{a}_\theta \sin \theta dS$$

$$\int_\Sigma \hat{a}_R \cos \phi dS, \int_\Sigma \hat{a}_\theta \cos \phi dS, \int_\Sigma \hat{a}_R \sin \phi dS, \int_\Sigma \hat{a}_\theta \sin \phi dS$$

onde Σ é a superfície esférica $R=1$.

1.12) Calcule as integrais de volume

$$\int_V \hat{a}_R \cos \theta dV, \int_V \hat{a}_R \cos \phi dV, \int_V \hat{a}_\theta \cos \theta dV, \int_V \hat{a}_\theta \sin \phi dV$$

onde V é o volume esférico $R \leq 1$.

1.13) Utilize o teorema de Stokes em uma superfície fechada, com o auxílio do teorema de Gauss, para mostrar que

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

1.14) Use o resultado da questão anterior para mostrar que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \forall \vec{A}$

1.15) Verifique que para uma função f e um elemento diferencial de deslocamento $d\vec{l}$, tem-se que $d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}f = dl \frac{\partial f}{\partial l} = df$, onde df é a diferencial de f .

1.16) Utilize o resultado da questão anterior, juntamente com o teorema de Stokes, para mostrar que

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$$

1.17) Aplique o resultado da questão anterior em uma área de integração diferencial para mostrar que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0, \forall f$.

1.18) Demonstre a Eq.(1.49)

1.19) Verifique que o gradiente de uma função escalar ψ pode ser obtido da definição

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Sigma} \psi d\vec{S}$$

onde Σ é uma superfície fechada que limita o volume diferencial ΔV e $d\vec{S}$ é o vetor área diferencial dirigido para o exterior do volume ΔV .